Valutazione errori ed incertezze di tipo A (statistico) 4.08

(gli errori di tipo B sono quelli che non possono essere valutati da considerazioni statistiche)

Misure dirette di una sola grandezza

I caso: una sola misura: $\{x_i \text{ , } \Delta x\}$

La misura con l'errore di lettura o di sensibilità è: $M = x \pm \Delta x$, l'errore Δx è: $\Delta x = \frac{D}{2}$ dove D è la più piccola divisione dello strumento analogico, oppure il valore del digit meno significativo (LSD= least significant digit) nel caso di uno strumento digitale.
Questo valore può essere ridotto a D/4 o D/8 nel caso di letture particolarmente precise o fatte su di una scala ben visibile.
Oppure può essere aumentato a 1,5-2-3 D se il valore letto fluttua notevolmente mentre si fa la misura, o se non fosse possibile leggere bene la misura.
Nel caso di alcuni strumenti il manuale fornisce direttamente il valore minimo di Δx. Quindi è necessario leggere sempre il manuale dello strumento.
La relativa deviazione standard = $(\text{varianza})^{1/2}$ è (assumendo una distribuzione di probabilità uniforme delle misure nell'intervallo $x \pm \Delta x$, per cui $\sigma^2=(2\Delta x)^2/12$): $\boldsymbol{\sigma_l = \Delta x / \sqrt{3}}$.
Quindi: $\boldsymbol{M = x \pm \Delta x/\sqrt{3}}$ dove M è il risultato della misura e la migliore stima del valore vero della grandezza misurata. Se la misura fosse particolarmente "buona", si può assumere una distribuzione triangolare, in questo caso la deviazione standard è: $\boldsymbol{\sigma_l = \Delta x/\sqrt{6}}$.

II° caso: più misure (anche solo due) ripetute con lo stesso apparato: $\{x_i \text{ , } \Delta x\}$

Supponiamo di avere N misure $\{x_i\}$; i=1, N ognuna con lo stesso errore di lettura Δx.
La migliore stima della grandezza x è la media aritmetica degli N valori delle x:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N}$$

La deviazione standard statistica si calcola utilizzando la seguente formula: $\boldsymbol{\sigma_S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}}$

[inserire solo N a denominatore se il valore di $\boldsymbol{\bar{x}}$ non proviene dalla media delle misure, ma da altre misure o considerazioni]. La deviazione standard della serie di misure è data dalla somma quadratica della deviazione standard statistica e da quella determinata dall'errore di lettura:
$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_l^2}}$ (le sigma si sommano quadraticamente), in genere si prende semplicemente la maggiore delle due.
Quindi il valore da attribuire alla misura (la migliore stima del suo valore) sarà $\boldsymbol{M = \bar{x} \pm \sigma_x}$ mentre la migliore stima del **valor medio** con la sua deviazione standard sarà:

$$\boldsymbol{\overline{M} = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}} \text{ dove } \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$

III° caso: più misure della stessa grandezza x, fatte con apparati differenti: $\{x_i, \sigma_i\}$

In questo caso ho varie misure x_i ognuna con la sua deviazione standard σ_i:

Se definiamo il "peso" da attribuire ad ogni misura come : $p_i = 1/(\sigma_i)^2$ allora la migliore stima della grandezza x con la relativa deviazione standard (la media pesata) è $\frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i} \pm \frac{1}{\left(\sum_i p_i\right)^{1/2}}$

Valutazione della deviazione standard per funzioni di una o più variabili

Supponendo di voler valutare la sigma nel caso che si abbia $G = f(x_1, x_2, x_3, ... x_i, ... x_N)$ dove di ogni grandezza x_i abbiamo il valore e la deviazione standard: $x_i \pm \sigma_i$, la deviazione standard da attribuire a G è: $\sigma_G = \sqrt{\sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 \cdot \sigma_i^2}$, cioè le sigma si sommano **quadraticamente.**

Nel caso di espressioni monomie ricordarsi che, per semplificare i calcoli, si può utilizzare la derivazione logaritmica. Se abbiamo per esempio:
$f = \frac{ab}{c}$, $\ln f = \ln a + \ln b - \ln c$ e, differenziando: $\frac{df}{f} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}$ che, passando alle incertezze diventa, e passando al modulo delle grandezze (le incertezze sono valori definiti positivi): si ha: $\boldsymbol{\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}}$ o, per la varianza: $\frac{\sigma_f^2}{f^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}$

Fit rettilineo di una serie di dati $\{x_i; y_i, \sigma_y\}_{i=1,N}$

Ipotesi: si abbiano N coppie $\{x_i, y_i\}$. Si supponga che $\sigma_x / x \ll \sigma_y / y$ (le incertezze relative sulle x trascurabili rispetto a quelle sulle y), si suppongano inoltre tutte uguali le σ_y. Se cerchiamo la retta migliore che segue la legge ***y=ax+b*** i due coefficienti ***a*** e ***b***, con le relative deviazioni standard, saranno:

1) **Retta generica:** y=ax+b

$$\boldsymbol{a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \pm \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{\bar{y} \sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \pm \frac{\sigma_y \sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{N \sum (x_i - \bar{x})^2}}}$$

2) **Retta per l'origine:** y=ax

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \pm \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

3) **Retta costante:** y=b $\Rightarrow$ media pesata

dove le sommatorie sono estese a tutti i valori 1....N, e $\bar{x}$, $\bar{y}$ indicano le medie aritmetiche delle x_i e delle y_i.