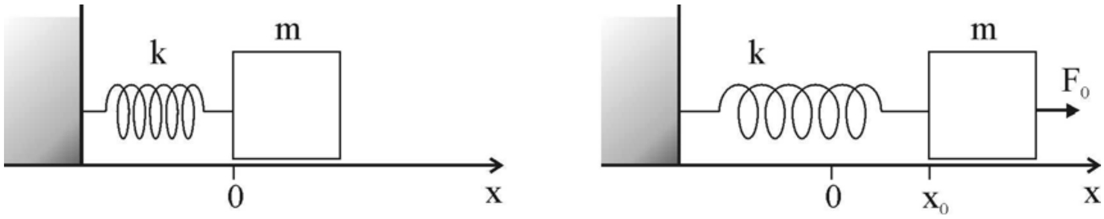
Molla, descrizione teorica– Misura di *g*



La forza esercitata dalla molla (supposta ideale, quindi con massa zero ed attrito nullo[1]) sul suo estremo è $\overline{F} = -k\overline{x}$; questa relazione, proiettata sull'asse x, diventa :

$$F = -kx \,. \qquad (1)$$

Per il corpo di massa *m* , solidale con l'estremo della molla, si può quindi scrivere:

$$ma = -kx + F_0 \qquad (2)$$

dove F_0 è la forza (non dovuta alla molla) eventualmente applicata ad *m*.

- Moto libero (F_0=0): si ha: $m\ddot{x} + kx = 0$, oppure $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ e, chiamando $\frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3)$$

  Questa è l'equazione di un oscillatore armonico (senza dissipazione) che ha soluzione:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)\,, \qquad (4)$$

  dove *A* è l'ampiezza massima delle oscillazioni, φ la fase (e queste due grandezze dipendono dalle condizioni iniziali), mentre ω_0 è la pulsazione del moto, legata al periodo *T* ed alla frequenza ν dell'oscillazione dalla relazione:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (5)$$

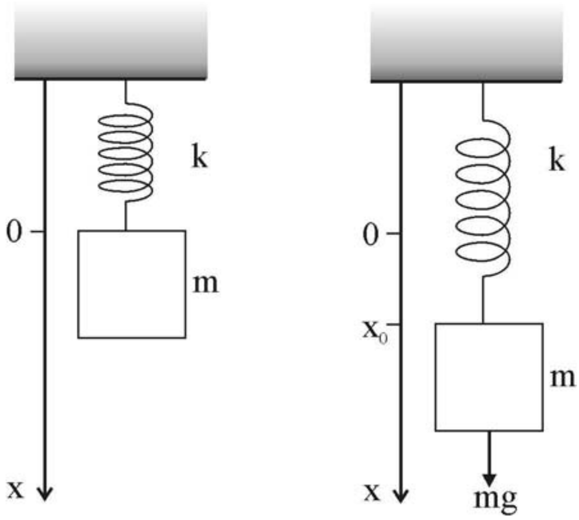
- $F_0 = \text{costante} \neq 0$

  In questo caso il moto è identico a quello descritto precedentemente, l'unica differenza è che cambia la posizione di equilibrio della massa *m*, all'equilibrio infatti $\ddot{x} = 0$, quindi : $0 = -kx + F_0$, da cui $x_0 = \frac{F}{k}$ è la posizione di equilibrio, e quella intorno a cui avviene l'oscillazione se la massa venisse spostata per breve tempo dalla posizione di equilibrio.

---

[1] [1]Nota: una molla reale è caratterizzata anche dalla sua massa *m* e da un fattore γ che rappresenta la dissipazione della molla quando è in movimento. In seguito vedremo che l'attrito si può trascurare, mentre non si può trascurare la massa della molla.

Molla verticale con massa *m*



In questo caso la massa *m* esercita sulla molla la forza costante $F_0 = mg$, dove con *g* si è indicata l'accelerazione di gravità.
La posizione di equilibrio dipende quindi dalla massa *m*: $x_0 = m\dfrac{g}{k}$ Mentre il periodo continua a dipendere esclusivamente da *m:* $\boldsymbol{T^2 = (2\pi)^2 \dfrac{m}{k}}$.
Infatti riscrivendo la (2) con F_0=*mg* , si ha: $ma = -kx + mg$, da cui $m\ddot{x} + kx - mg = 0$ e

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x - g = 0$ che , ponendo $x_0 = g\dfrac{m}{k}$ si può scrivere come $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}(x - x_0) = 0$ che è l'equazione di un oscillatore armonico che ha lo stesso periodo della (3), ma con la posizione di equilibrio nel punto x_0.

Procedura per la misura dell'accelerazione di gravità *g:*

1. Misura del periodo in funzione della massa applicata per determinare la costante *k.*
2. Misura della posizione di equilibrio in funzione della massa per determinare *g*.

Misura di *k:* (nota: con m_i si intendono le masse di un numero ***i*** di dischi)

- Per ogni massa m_i misurare n periodi nT_i .
- Ricavare per ogni massa il periodo T_i.
- Riportare i punti $P_i(m_i, T_i)$ in carta doppio-logaritmica e verificare la dipendenza quadratica fra la massa ed il periodo. ($m=cT^2$)
- Riportare i punti su di una scala lineare con assi (m,T^2), e calcolare la costante della molla *k* dal coefficiente angolare della retta ottenuta. ($m=k(2\pi)^2\ T^2$)

Misura di g:

- Per ogni massa m_i misurare la posizione di equilibrio x_i.
- Riportare in un grafico lineare i punti $P_i(m_i, x_i)$ e calcolare il rapporto *g/k* dal coefficiente angolare della retta ottenuta.

- Utilizzando il valore di *k* ottenuto dalla misura precedente, calcolare il valore di *g.*

Note alle misure di *g:*

- E' conveniente preparare fin dall'inizio una tabella in cui inserire in seguito i seguenti valori:

m	Δm	x	Δx	T_n	ΔT_n	T	ΔT	T^2	ΔT^2

- La massa che va inserita nella determinazione di *k*, quando la si utilizza nel comportamento dinamico della molla, non è solo quella delle masse appese. Al moto, e quindi all'energia cinetica, contribuiscono anche le masse del supporto e la massa della molla stessa che non è zero come nei casi ideali.

  La massa della molla da aggiungere va però calcolata opportunamente. Infatti non tutte le parti della molla si muovono alla velocità dell'estremo della molla, mentre nei calcoli fatti si assume che tutta la massa sia concentrata all'estremo della molla. Quindi per valutare la "massa equivalente" m_e della molla (quella cioè da inserire nell'equazione del moto) bisogna fare un'equivalenza fra l'energia cinetica reale associata a tutte le porzioni della molla reale che si muovono a velocità diversa, e l'energia associata ad una massa equivalente posta tutta all'estremo della molla. In formule: [sia *L* la lunghezza della molla e v_L la velocità del suo estremo]

  L'energia cinetica di un elemento *dm* della molla, nella posizione *x,* che si muove con velocità *v(x)* é:

$$\boldsymbol{dE = \frac{1}{2} dm \cdot v^2(x)} \tag{8}$$

se ρ è la densità lineare della molla, definita come: $\rho = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{L}$, allora $dm = \rho\, dx$ e, ponendo $v(x) = \frac{x}{L} v_L$, $dE = \frac{1}{2} \frac{m}{L} dx \frac{x^2}{L^2} v_L^2$ quindi si può integrare l'energia infinitesima su tutta la lunghezza della molla:

$$E_c = \int_0^L dE = \frac{m v_L^2}{2L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m}{3} v_L^2 \tag{9}$$

questa Energia deve essere uguale all'energia associata alla massa equivalente m_e

$E_c = \frac{1}{2} m_e\, v_L^2$, quindi si deve avere che $m_e = \frac{m}{3}$.

Questo valore è quello che deve essere aggiunto alle altre masse in gioco .

La massa totale che partecipa al moto sarà quindi:

$$m_T = \sum m_i + m(\text{supporto}) + m_e \tag{10}$$