Relatività e Invarianza galileiana

Le ipotesi e le leggi su cui si basa la Dinamica Classica:
- L'isotropia e l'omogeneità dello spazio euclideo, e del tempo.
- Il tempo e lo spazio assoluti.
- I tre principi della dinamica.

- La relatività galileiana:

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

♦ Per "forma" si intende la forma algebrica, e il significato dei termini, non quello che succede.
Quindi, per esempio, in un qualunque sistema di riferimento inerziale posso scrivere il secondo principio della dinamica ***F = ma***, dove ***F*** e ***a*** sono misurate nel sistema in oggetto.

♦ **Nota:** Quando scrivo una legge, una relazione (***F=ma***), e devo misurare e calcolare le grandezze che compaiono nella formula, ho sempre almeno **due** "oggetti" che sto considerando:

1) Il corpo o il sistema fisico in esame.
2) Il valore della misura delle grandezze che descrivono il corpo → (chi fa la misura ideale) → Il sistema di riferimento rispetto a cui il corpo viene misurato.

- Invarianza galileiana:

Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a trasformazioni galileiane.

Definizione: Trasformazione di coordinate, una trasformazione è un insieme di relazioni che permettono di passare dal valore delle coordinate (della posizione) di un punto in un certo sistema di riferimento al valore delle coordinate che **lo stesso punto** assume in un altro sistema di riferimento.
In generale la trasformazione è definita fornendo le relazioni che permettono di passare dai valori (x, y, z, t) che definiscono la posizione nello spazio nel tempo di un punto P in un sistema di riferimento O, ai valori (x', y', z', t') che descrivono lo stesso punto nel sistema O'.

♦ **Trasformazioni galileiane**

Definizione: una trasformazione galileiana è una trasformazione di coordinate che permette di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema che abbia una velocità ***V*** costante rispetto al primo.

Esempio: caso particolare di due sistemi ***O(x,y,z,t)*** e ***O'(x',y',z',t'),*** in cui le origini ***O*** ed ***O'*** e gli assi ***x,y,z*** e ***x',y',z'*** all'istante t=0 coincidano, ed in cui uno dei due (O') si muova di moto rettilineo uniforme rispetto all'altro (O), con velocità ***V***, in direzione ***x.***

Tempi

Si assume che le due origini (O e O') coincidano al tempo ***t=0, t'=0***. Data l'ipotesi di "tempo assoluto" che vale per tutta la meccanica classica $\Delta t=\Delta t'$. Quindi, se coincidono anche le origini dei tempi misurati nei due sistemi di riferimento, si avrà che ***t=t'***.

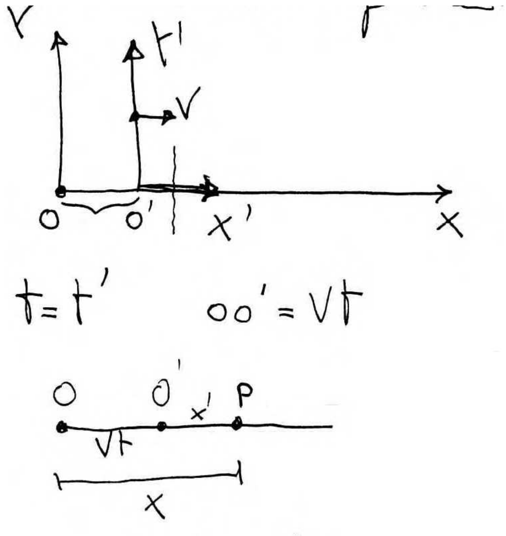
Spazi (vedi figura)

La posizione del punto P, ad un certo isatnte t=t' sarà x rispetto ad O, e x' rispetto ad O'.

$\boldsymbol{x = OP}$, $\boldsymbol{x' = O'P}$, inoltre si ha che : $\boldsymbol{OO' = V \cdot t}$

quindi, dato che $\boldsymbol{OP = OO' + O'P}$,

si avrà che $\boldsymbol{x = V \cdot t + x'}$



Le trasformazioni dal sistema O(x,y,z,t) al sistema O'(x',y',z',t'), e viceversa, sono quindi:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x' + V \cdot t} \\ \boldsymbol{y = y'} \\ \boldsymbol{z = z'} \\ \boldsymbol{t = t'} \end{cases}$$

Dalle trasformazioni di coordinate posso ricavare le leggi di trasformazione per le altre grandezze; per esempio per la velocità:

dalla trasformazione : $\boldsymbol{x = x' + V \cdot t}$, se derivo rispetto al tempo t ottengo :

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V} \quad \text{da cui,} \quad \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V}, \quad \text{quindi :}$$

$\boldsymbol{v = v' + V}$ e, derivando ancora, ottengo le accelerazioni :

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v' + V\right) = \frac{dv'}{dt}} + 0 = \boldsymbol{a'}$$

Da cui si vede che, mentre le velocità cambiano nei due sistemi di riferimento (la velocità è relativa), le accelerazioni sono le stesse.

Le velocità invece si sommano seconda la: $\boldsymbol{v[P(O)] = v'[P(O')] + V[O'O]}$

Forze

Come si trasforma la Forza? Dall'ipotesi di relatività ho che ***F'=m'a'*** ; nella fisica classica la massa si assume indipendente dalla velocità, quindi ***m=m'***.

Dalla relazione mostrata sopra abbiamo inoltre che ***a=a'***, quindi avremo:

F'=m'a'=ma=F

Le forze, in due sistemi di riferimento inerziali, sono uguali: ***F=F'***; gli osservatori di tutti i sistemi di riferimento inerziali misureranno quindi le stesse forze e le stesse accelerazioni.

Leggi di Keplero

Keplero scrive, fra il 1609 e il 1618, tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al sistema solare. Le leggi sono inferite utilizzando i dati di misurati con grande precisione dal suo maestro, Tycho Brahe, negli ultimi decenni del 1500.

1) **I pianeti si muovono secondo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.**
2) **Per ogni pianeta il raggio [sole-pianeta] descrive aree uguali in tempi uguali.**
3) **Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo dell'asse maggiore ha lo stesso valore per tutti i pianti - è una costante -.**

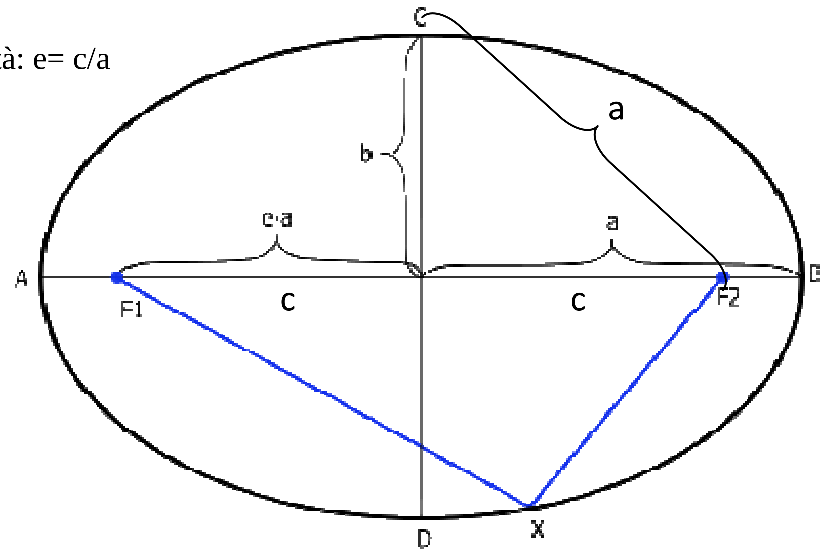
NOTA MATEMATICA: Ellisse

L'ellisse è la curva del piano descritta da un punto tale che la somma delle distanze dal punto e da due punti fissi (i fuochi) sia costante.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente ***a*** e ***b*.** La costante ***a*** è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante ***b*** è la lunghezza del semiasse minore.

Eccentricità: e= c/a

$a^2=b^2+c^2$



L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico P (x; y) e il doppio del semiasse maggiore. $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $c = \sqrt{a^2-b^2}$ e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani x-y con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse è definito dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$x = a\cos t$$

$$y = b\sin t$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

La **forma** di un'ellisse è espressa da un numero detto **eccentricità** dell'ellisse, convenzionalmente denotata da ***e*** (da non confondere con la costante matematica e=2,72...). L'eccentricità è legata ad *a* e *b* dall'espressione ***e = c/a*** ed è un numero positivo compreso tra 0 e 1. Se e è uguale a 0, l'ellisse degenera in una circonferenza, se è uguale a 1 degenera in una retta. Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra ***a*** e ***b***, quindi l'ellisse sarà più allungata. La distanza tra i due fuochi è 2*c*.

Il semilato retto di un'ellisse, solitamente denotato dalla lettera *l*, è la distanza tra il fuoco dell'ellisse e l'ellisse stessa misurata lungo una linea perpendicolare all'asse maggiore. È legata ad *a* e *b* dalla formula $al = b^2$.

In coordinate polari, un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione:

$$r(1 + e\cos\theta) = l$$

L'area racchiusa da un'ellisse è $S=\pi ab$. La lunghezza della circonferenza è $c=4aE(e)$, dove la funzione *E* è l'integrale ellittico del secondo tipo.

L'eccentricità dell'orbita della Terra oggi è 0.0167. Nel tempo l'eccentricità dell'orbita terrestre varia lentamente come risultato dell'attrazione gravitazionale tra i pianeti.

PIANETA	**A (UA)**	**Periodo (10^7s)**	**e**
Mercurio	0,387	0,76	0,205
Venere	0,723	1,94	0,006
Terra	1	3,16	0,016
Marte	1,523	5,94	0,093
Giove	5,202	37,4	0,048
Saturno	9,554	93,0	0,055
Urano	19,218	266	0,046
Nettuno	30,109	5200	0,008
Plutone	39,60	7820	0,246

Note alle tre leggi:

1) Le ellissi, per quasi tutti i pianeti, sono delle ellissi...molto poco ellittiche, l'orbita è in realtà molto vicina ad una circonferenza.

In figura 1 sono state sovrapposte una circonferenza (traccia nera - e=0) ed un'ellisse con e=0,08 (traccia rossa), quindi più "ellittica" della maggior parte dei pianeti.

Fig.1

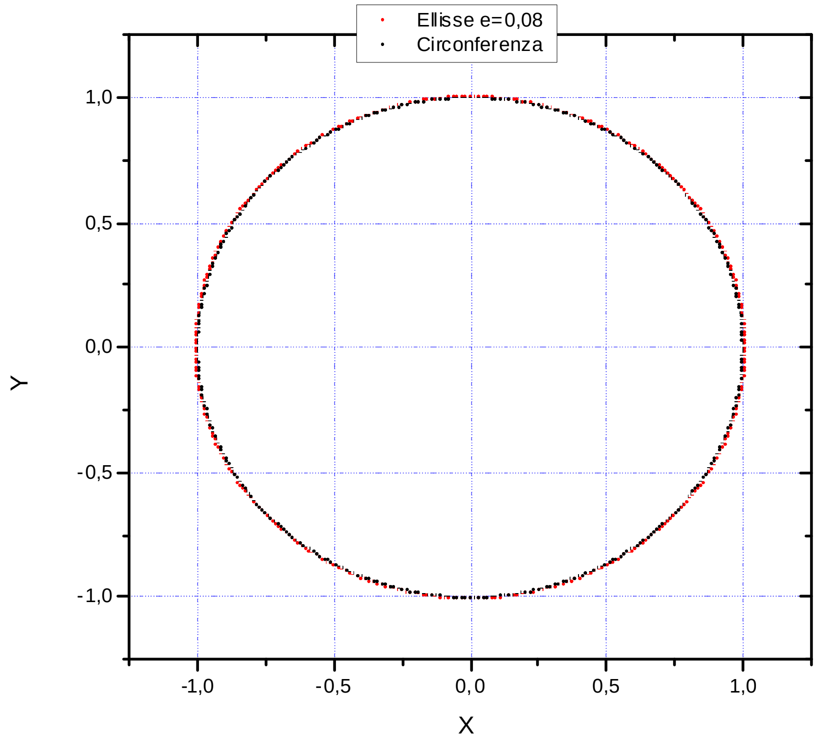
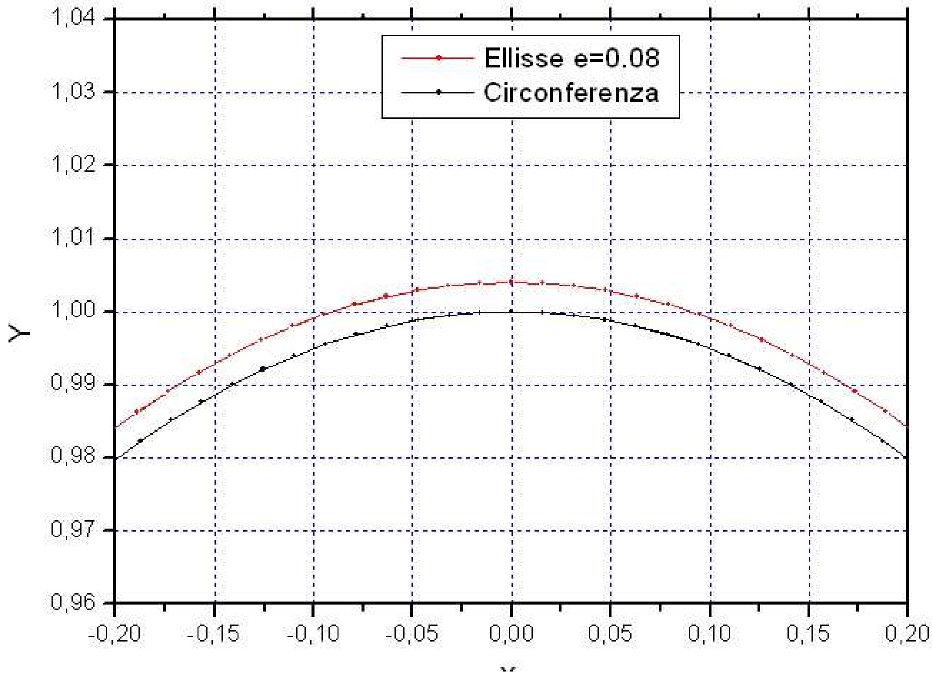


Fig.2



Nella figura 2 è mostrato un ingrandimento della parte superiore della figura 1, in cui si può valutare la differenza fra le due curve. La distanza dal centro delle due figure (il raggio) è 1 (esatto) per la circonferenza, e 1,004 per l'ellisse. Quindi la variazione percentuale del raggio è:

$$\frac{\boldsymbol{R_e - R_c}}{\boldsymbol{R_c}} = \frac{1{,}004 - 1}{1} = 0{,}004 = \frac{4}{1000} = 0{,}4\%$$

si ha cioè una variazione dello 0,4 %.

Questo vuol dire che per apprezzare questa variazione devo essere in grado di fare delle misure con una precisione almeno 10 volte migliore, quindi serve una precisione dello 0,04% cioè di 4 parti su 10'000. E' equivalente a misurare la distanza di un metro con la precisione di 0,4 mm cioè di meno di mezzo millimetro.

Questa, circa, è la precisione necessaria nella misura della posizione del pianeta se si vuole distinguere l'orbita circolare da quella ellittica.

2) La seconda legge, detta con altre parole, ci dice come cambia la velocità del pianeta lungo l'orbita, che quindi non è costante. La velocità è maggiore quando il pianeta è più lontano e minore quando è più vicino. Come nel caso precedente questa differenza è molto piccola, proprio perché l'orbita è quasi circolare, quindi le distanze minime e massime sono circa uguali, e quindi anche le velocità.

3) La terza legge fu scoperta da Keplero che cercava un rapporto "pitagorico" (cioè una frazione fra numeri semplici) fra il valore del periodo di rivoluzione e quello dell'asse maggiore. E' un caso che poi quello giusto fosse effettivamente 3/2. Non sempre la natura è così benigna da essere descritta da formule e numeri "semplici".

Principi/ Leggi/ Leggi fenomenologiche

I principi, le leggi generali e le leggi fenomenologiche hanno diversa origine, diversa importanza e diverso potere predittivo. Consideriamo tre: il secondo principio della dinamica, la legge di gravitazione universale e le leggi di Keplero.

- ***F=ma:*** E' un principio, forse IL PRINCIPIO. Un principio vale sempre, per ogni sistema, a parte il limite al sistema di riferimento in cui vengono misurate le grandezze coinvolte, è la forma più generale che posso dare ad una legge.
- **Legge di Gravitazione Universale**

$$\boldsymbol{F_G} = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2}{\boldsymbol{R}^2}$$

  - Dare la forma matematica della forza permette di fare previsioni utilizzando il secondo principio della dinamica:
    - [Legge di gravitazione universale] + [***F=ma***] permettono di calcolare le accelerazioni, le velocità e le traiettorie di qualunque oggetto che si muova sotto l'azione della Forza gravitazionale.

- **Leggi di Keplero:** sono leggi fenomenologiche, cioè ricavate dai dati, descrivono matematicamente un particolare fenomeno, non è detto che possano essere utilizzate per descrivere altri sistemi, ma posso utilizzarle per verificare (falsificare) un'ipotesi, per esempio la validità di una legge più generale.

Conoscendo ***x(t)*** posso calcolare ***a(t),*** e viceversa:

- Diretto: misura [x(t), t]
  - calcolo $v(t)=\frac{dx}{dt}$ da cui → $[v(t),t]_m$
  - calcolo $a(t)=\frac{dv}{dt}$ da cui → $[a(t),t]_m$
  - → inferisco e calcolo F(t)=a(t)/m

- Inverso: (prevedo – calcolo) $(a, t)_c$
  - calcolo v(t): $v(t)_c = \int a(t)_c dt$
  - calcolo x(t): $x(t)_c = \int v(t)_c dt$
  - verifico se $(x(t), t)_m$ misurato = $(x(t),t)_c$ calcolato

---

♦ Principio di Equivalenza (A. Einstein 1916)

Relatività Generale: Accelerazione ≡ Gravità
[da Wikipedia]

Ci sono due versioni del **principio di equivalenza**, entrambe dovute ad Albert Einstein:

- la versione *forte* afferma che in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale scegliere un intorno di un punto in cui gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- quella *debole* asserisce che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali.

Gli appellativi di forte e debole si giustificano dal momento che se vale il principio di equivalenza nella forma forte deve valere anche quello nella forma debole, mentre da un punto di vista logico l'implicazione non è reversibile. Questa caratteristica fa sì che, anche se il principio in forma debole è stato sperimentalmente confermato con precisione elevatissima, ciò non è sufficiente a garantire lo stesso grado di certezza anche alla forma forte, che deve essere dunque considerata ancora come un postulato.

Dal secondo principio della dinamica ho:

$F = m_I \bar{a}$ dove m_I = massa inerziale

e dalla legge di gravitazione universale:

$F_G = G \frac{m_G m_2}{R^2}$ dove m_G = massa gravitazionale

Il Principio di equivalenza pone:

$$m_I = m_G$$

$m_I = \frac{\bar{F}}{\bar{a}}$ (molla) $m_G = \frac{F_G R^2}{G m_T}$ (m_T= massa terra) (caduta libera-pendolo-bilancia di torsione)

Per approfondire e per il dettaglio sul funzionamento della bilancia di torsione vedi “La Fisica di Berkeley”, Meccanica, Cap. 14, Principio di equivalenza.

Test Sperimentali:

• Galileo Galilei	1690	caduta libera	2×10^{-2}
• Newton	1686	pendolo	10^{-3}
• Eötvos	1922	bilancia di torsione	5×10^{-9}
• Dicke et al.	1964	bilancia di torsione	3×10^{-11}
• Adelberger et al.	2008	bilancia di torsione	3×10^{-14}

Pendolo: il periodo di oscillazione di un pendolo di lunghezza L, massa m_x, posto in dove l’accelerazione gravitazionale è g è:

$$\boldsymbol{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\boldsymbol{m_G}}{\boldsymbol{m_I}}\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{g}}}$$

♦ I fotoni in un campo gravitazionale

Cosa succede per i fotoni?
Il fotone ha massa nulla; dalle formule di teoria della relatività si ha:

$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{c}^4$, fotone dove M è la massa a riposo, per il fotone si ha quindi :

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{pc}$, ma anche $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{h}\nu$, da cui si ha : $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{h}\nu}{\boldsymbol{c}}$,

quindi un fotone ha massa inerziale, equivalemnte alla sua energia E : $\boldsymbol{m_I} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{h}\nu}{\boldsymbol{c}^2} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}^2}$

Un fotone di frequenza $\boldsymbol{\upsilon}$ che cade per un’altezza $\boldsymbol{h}$, aumenterà la sua frequenza secondo la:

$$\boldsymbol{h}\nu' = \boldsymbol{h}\nu + \frac{\boldsymbol{h}\nu}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{gh}$$

Le misure hanno confermato il calcolo.