Principi di Fisica

Meccanica Quantistica

Carlo Cosmelli

2012

Indice

1. Onde ………………………………………………………………………………………………. 2
2. Probabilità 7
3. Meccanica Quantistica……………………………………………………………….. 8
4. Comportamento quantistico di onde ed elettroni 10
5. Spiegazione di tutto ciò che è stato detto prima: facciamo un po' di ordine nei concetti e nelle formule della MQ……………………………….. 14
6. Come si lavora con la funzione d'onda e le misure sul sistema fisico relativo…………………………………………………………………………………..… 15
7. Principi della Meccanica Quantistica (ancora, tanto perché siano chiari)…………………………………………………………………………………….. 21
8. Note aggiuntive 23
9. Riferimenti bibliografici…………………………………………………………………. 25

Note introduttive

In meccanica quantistica si utilizzano due concetti fondamentali: quello di "onda" con tutti i fenomeni collegati, e quello di Probabilità di un evento casuale.

Qui di seguito si riportano alcune brevi note su questi due argomenti.

E' assolutamente necessario impadronirsi dei termini che li descrivono, così come del significato da attribuire a qualunque termine o evento collegato.

La mancata comprensione porta ad una idea completamente errata di quale sia il significato della Meccanica Quantistica, delle sue previsioni , e del significato di ciò che avviene in natura.

1. Onde – [A, T, λ, φ]

In fisica, con il termine onda, si indica una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio, trasportando energia o quantità di moto senza comportare un associato spostamento della materia.

Nota: un'onda è una perturbazione che **può** propagarsi; esistono anche onde che non si propagano, vedi dopo (le onde stazionarie).

Le onde possono propagarsi sia attraverso un materiale, sia nel vuoto. Ad esempio la radiazione elettromagnetica (la luce) può esistere e propagarsi anche in assenza di materia, mentre altri fenomeni ondulatori (le onde sonore) esistono unicamente in un mezzo, che deformandosi produce le forze elastiche di ritorno che permettono all'onda di propagarsi.

Vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_(fisica)

Punti chiave:

- Un'onda è una "perturbazione" che si trasmette, la perturbazione può avere una forma qualunque, non necessariamente un'onda sinusoidale.
- Tuttavia, quando si parla di onde, si utilizza come forma base una funzione sinusoidale; questo perché esiste un teorema (Fourier) che dice che qualunque "forma", per un'onda, può essere scritta come una somma di seni e coseni (cioè di funzioni trigonometriche). Quindi la descrizione del comportamento delle onde può essere fatta rigorosamente considerando solo onde sinusoidali.

Parametri di un'onda [1]:

L'onda più generale possibile, che viaggia nel tempo ***t*** e nella direzione ***x*** si può scrivere come:

$$A(x,t) = A_0 cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)$$

A(x,t) è la grandezza che rappresenta l'onda; nel caso di un'onda del mare rappresenta lo spostamento di un punto della superficie del mare, nel caso del suono che viaggia nell'aria rappresenta lo spostamento delle molecole dell'aria, nel caso della luce l'ampiezza del campo Elettrico e Magnetico...

Nota che al posto del cos(…), si può usare anche il sen(…), è solo un cambio del sistema di riferimento.

[1] Questi sono i termini che vanno imparati e capiti bene, altrimenti non si può sperare di capire qualunque fenomeno che riguardi le onde, e in particolar modo la meccanica quantistica.

I parametri caratteristici di un'onda sono:

- **A_0** Ampiezza dell'onda. E' l'ampiezza massima dell'onda, cioè di quanto vibra, o quanto vale al massimo della sua escursione, la grandezza che sta oscillando. Dato che il coseno può andare da un minimo di -1 ad un massimo di 1, l'ampiezza totale dell'onda ***A(x,t)*** varierà da ***–A_0*** a ***A_0***.
- **T** Il periodo dell'onda. Disegnando l'andamento dell'onda per una ***x*** costante (vuol dire che l'osservatore si mette in punto fisso e misura l'onda in funzione del tempo), avremo la forma, nel caso x=0 (vedi figura 1):

$$A(t) = A_0 cos(\omega t + \varphi) = A_0 cos\left(\frac{2\pi}{T}\, t + \varphi\right)$$

Dove ***T*** è la periodicità dell'onda in funzione del tempo, cioè quanto tempo ci mette a tornare nello stesso stato . Il periodo ***T*** è legato alla pulsazione dell'onda ω ed alla frequenza dell'onda υ, dalle relazioni:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad T = \frac{1}{\nu} \quad , \quad \omega = 2\pi\upsilon$$

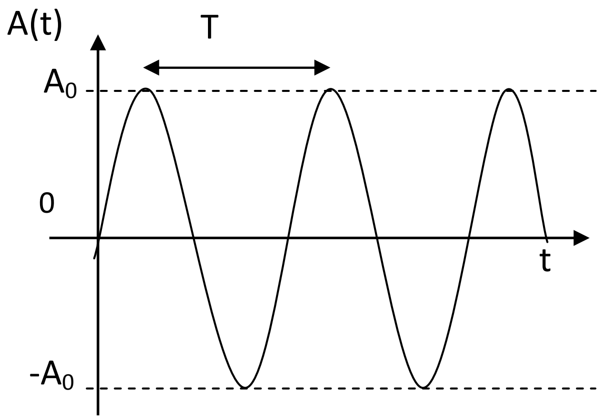


Fig.1 Andamento di un'onda sinusoidale in funzione del tempo t.

- **λ** La lunghezza d'onda. Disegnando l'andamento dell'onda in funzione della posizione ***x***, per una ***t*** costante (vuol dire "fotografare" la funzione ad un istante qualunque fissato), ho la forma, nel caso t=0:

$$A(x) = A_0 cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi\right)$$

Dove λ, la lunghezza d'onda, è la periodicità dell'onda in funzione della posizione. Vedi figura 2.

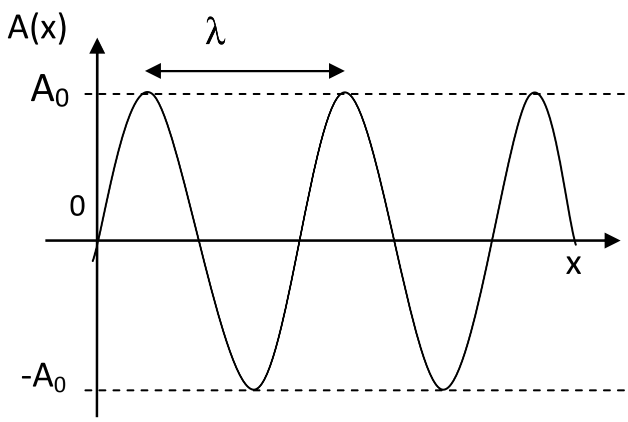


Fig.2 Andamento di un'onda sinusoidale in funzione della posizione x.

- **λ,υ; v** : La lunghezza d'onda λ, la frequenza υ, e la velocità ***v*** con cui si propaga l'onda sono legate dalla seguente relazione

$$v = \lambda \cdot \nu$$

Il valore della velocità con cui si trasmette l'onda dipende dalle caratteristiche del mezzo in cui si trasmette l'onda e dalle caratteristiche dell'onda di partenza.

Ricordarsi che, mentre nel caso della luce nel vuoto, la velocità è una costante universale c, irraggiungibile da qualunque altro segnale, nei mezzi materiali la luce si muove a velocità inferiori a c, in generale:

$\boldsymbol{v(luce)} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{n(v)}} \leq \boldsymbol{c}$, $n(\upsilon)\geq 1$ è l'indice di rifrazione del materiale, che in genere dipende dalla lunghezza d'onda della luce (sole al tramonto, arcobaleno, scomposizione della luce solare nei vari colori…) e dalle caratteristiche del materiale; per il vuoto n=1.

- φ La fase d'onda. Se scriviamo la forma d'onda al tempo ***t=0*** , e nel punto ***x=0*** abbiamo:

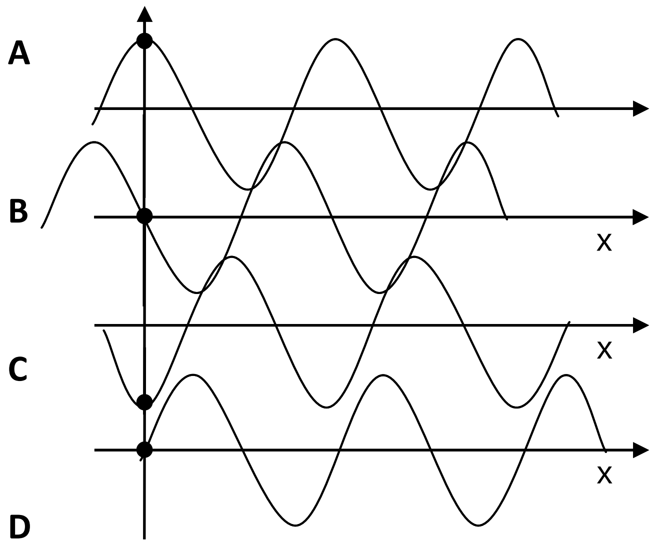
$\boldsymbol{A(0,0) = A_0 cos(\varphi)}$, il valore della fase è un'indicazione legata all'ampiezza dell'onda all'istante iniziale e nel punto iniziale (x=0 e t=0 non corrispondono necessariamente a **dove** è stata emessa ed a **quando** è stata emessa, le origini degli assi sono convenzionali).

Vedi in figura alcuni casi particolari:

A: **φ=0** **→ cos φ= 1** **→** **A(0,0) = A_0**

B-D: **φ=±90^0** **→ cos φ= 0** **→** **A(0,0) = 0**

C: **φ=180^0** **→ cos φ= -1** **→** **A(0,0) = -A_0**

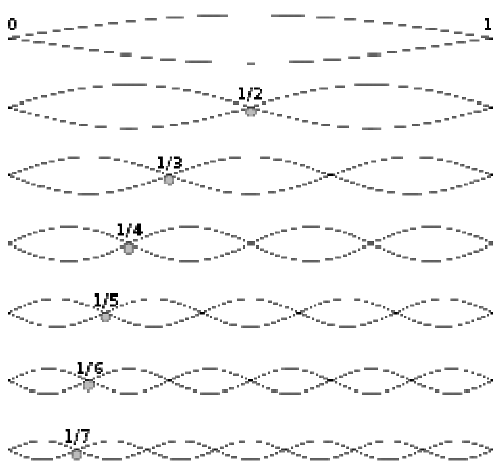


Per maggiori dettagli vedi:
http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_(fisica)

1.1 Fra tutte le modalità con cui si può descrivere un'onda, o che si incontrano nella realtà fisica, ve ne sono alcune di fondamentale importanza nella descrizione di molti fenomeni:

L'onda stazionaria, l'onda piana e l'onda trasversale.

L'onda stazionaria è un'onda che non "trasporta" una perturbazione, essendo **limitata nello spazio**. La limitazione è dovuta alla limitazione dello "spazio" in cui l'onda può oscillare.



Ad esempio l'onda con cui oscilla la corda di un pianoforte o di una chitarra. In questo caso l'oggetto che oscilla (per esempio la corda) ha gli estremi fermi, mentre alcune sue parti oscillano. L'onda stazionaria può esistere solo per alcune determinate lunghezze d'onda caratteristiche del mezzo, del tipo di oggetto…ecc.

In figura si vede come esempio una corda con gli estremi fissi, con i primi modi di oscillazione possibili. Il numero rappresenta l'inverso dell'armonica. La prima, la seconda, la terza…

Quindi l'onda stazionaria è **quantizzata.** Una corda di una certa lunghezza e con una certa tensione, una volta colpita, emetterà suoni solo alla sua frequenza fondamentale υ_o (per esempio un "la") e/o alle frequenze $2\upsilon_o$, $3\upsilon_o$, $4\upsilon_o$…

Per dettagli e per "vedere" come oscilla un'onda stazionaria vedi:
http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_stazionaria

L'onda piana è un'onda che si propaga, virtualmente infinita, ed i cui fronti d'onda sono infiniti piani paralleli di ampiezza costante normali alla direzione di propagazione. Vedi:
http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_piana

Un esempio approssimato è quello di un'onda del mare, che viene da molto lontano….e il cui fronte d'onda (l'onda vera e propria) è perpendicolare alla direzione di propagazione.

L'onda trasversale è un'onda in cui le particelle del mezzo in cui si propaga l'onda oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione. Vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_trasversale

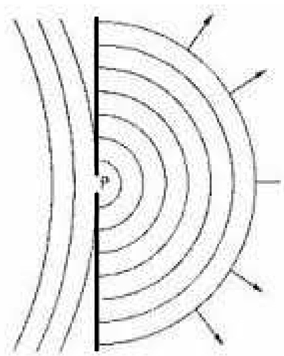
Importante: sono trasversali le onde di un corda di chitarra/pianoforte che vibra, ed anche le onde elettromagnetiche (la luce). In questo caso la grandezza che oscilla è il campo Elettrico (e/o Magnetico).

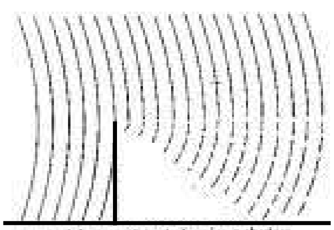
1.2 Di tutti i fenomeni che avvengono con le onde due sono fondamentali per descrivere il loro comportamento quando si incontrano o quando incontrano altri oggetti:

Diffrazione:

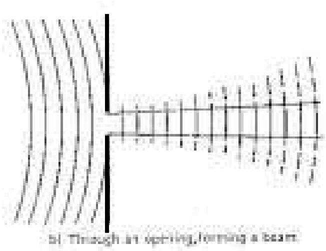
Il fenomeno per cui un'onda che incontra un ostacolo, genera una serie di onde che possono essere descritte come se l'ostacolo fosse una sorgente di onde sferiche. Il fenomeno avviene essenzialmente (cioè gli effetti sono macroscopici) quando l'ostacolo ha dimensioni dell'ordine di grandezza o minori della lunghezza d'onda dell'onda che incide sull'ostacolo. Questa è anche la scala con cui l'onda "interagisce" con l'ostacolo.

Per esempio (vedi figure) se un'onda incide su di uno schermo con un "piccolo foro", al di la dello schermo la luce sarà "come se" fosse stata generata da una sorgente puntiforme posta nel foro.





a) Past an obstacle, forming a shadow



b) Through an opening, forming a beam

Se l'onda incontra un ostacolo (un muro) succede la stessa cosa

Gli effetti quindi si vedranno in questi casi:

Suono udibile: $\lambda \sim$ 10m-2cm Il suono “gira” intorno alle porte, alle case… gli strumenti musicali hanno queste dimensioni tipiche.

Luce visibile: $\lambda \sim$ 0,4-0,7 10^{-6} m Per vedere gli effetti della diffrazione della luce servono ostacoli “piccoli” (cd).

Onde radio LF/MF, basse/medie frequenze $\lambda \sim$ 10km-100 m il segnale radio AM oltrepassa case, montagne…

Onde radio VHF/UHF: $\lambda \sim$ 10m – 10 cm Il segnale radio FM-TV- cellulari, l’antenna deve essere lunga da qualche metro (TV) a pochi centimetri (cellulare). Il segnale viene fermato da una casa, una montagna…

Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Diffrazione

Interferenza:

La somma di due (o più) onde che hanno la stessa frequenza. Il risultato dipende **essenzialmente** dalla fase relativa.

Quello che si ha è che, partendo da due onde con identica pulsazione ω e, per semplicità, con la stessa ampiezza A_0, se ne facciamo la somma, ovviamente nello stesso istante t, si ha:

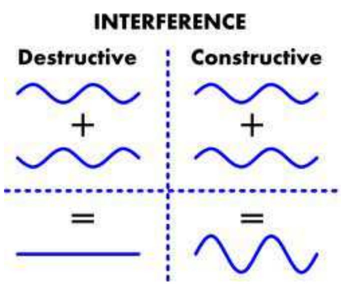
partiamo dalle due onde A_1 e A_2: $A_1(x,t)=A_0\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_1+\varphi_1\right)$; $A_2(x,t)=A_0\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_2+\varphi_2\right)$

e sommiamole: $A_{TOT} = A_1(x,t) + A_2(x,t) = 2A_0 + 2A_0\cos\left(\Delta\varphi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\right)$

Se, per esempio, le onde hanno percorso la stessa distanza da una origine comune, quindi se $\Delta x=0$, ho:

Interferenza distruttiva: $\mathbf{\Delta\varphi= 180^0}$ $\rightarrow$ **cos 180^0= -1** $\rightarrow$ $\mathbf{A_{TOT} = 2A_0 - 2A_0 = 0}$ **Non c’è nulla!**

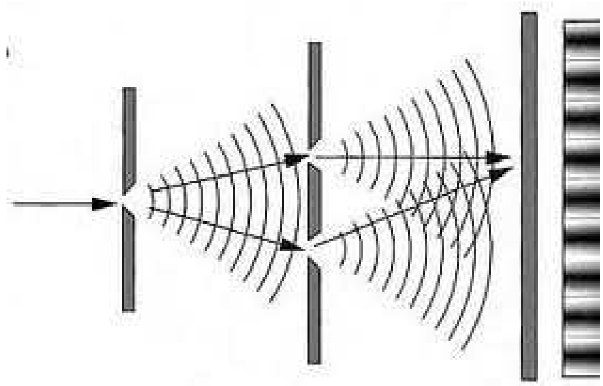
Interferenza costruttiva: $\mathbf{\Delta\varphi= 0}$ $\rightarrow$ **cos 0 = 1** $\rightarrow$ $\mathbf{A_{TOT} = 2A_0 + 2A_0 = 4A_0}$ **C’è un’onda !**



Quello che succede è che l’energia si “ridistribuisce” nello spazio, in alcuni punti ho più energia di prima (interferenza costruttiva: $A_{TOT} = 4A_0$), in altri punti non ho nessun onda (interferenza distruttiva, $A_{TOT}=0$).

Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Interferenza_(fisica)

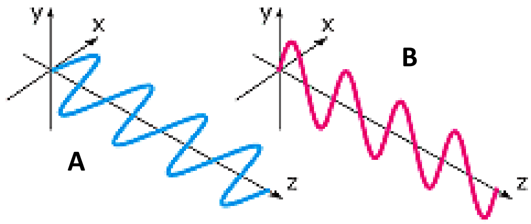
Se ad uno schermo con due piccoli fori arriva un’onda, avviene prima un fenomeno di diffrazione, e poi l’interferenza fra le onde che escono dai due fori. Il risultato è di avere alcune zone dello spazio in cui le onde si sommano ed altre in cui non c’è luce



Polarizzazione

Nel caso di un'onda trasversale si chiama **polarizzazione** la direzione che ha, ad un certo istante di tempo, la grandezza che oscilla.

La polarizzazione può essere lineare (la direzione è costante nel tempo), circolare (la direzione ruota con velocità angolare costante), o una qualunque combinazione di due polarizzazioni lineari.



In figura si vede l'esempio di due onde polarizzate linearmente, una (A) secondo l'asse x, l'altra (B) secondo l'asse y.

Questa figura rappresenta anche l'andamento di un'onda elettromagnetica con polarizzazione lineare. Le due onde rappresentano le oscillazioni del campo elettrico e magnetico, che hanno sempre piani di oscillazione perpendicolari tra loro.

Al limite un'onda può non avere nessuna polarizzazione media; per esempio la luce che arriva sulla terra, o quella emessa da una lampadina incandescente, hanno una polarizzazione casuale, che varia con la frequenza di emissione dei fotoni. In questo caso si parla di onda non polarizzata.

2. Probabilità

Un evento casuale è definito come un evento che può presentarsi con varie modalità, ed il cui risultato è appunto "casuale", cioè singolarmente non predicibile:

- L'evento può avere più modalità.
- Ripetendolo identico a se stesso può portare a risultati diversi, non predicibili.

Anche se i singoli eventi sono casuali, le medie sul totale delle ripetizioni hanno valori definiti, sempre meno differenti all'aumentare delle ripetizioni. Si definisce la probabilità di un evento il rapporto tra il numero di eventi 'favorevoli' (*n*) e il numero di eventi totali (*N*), ovvero:

$$P(n) = \frac{n}{N}$$ (si noti che la Probabilità è un valore a priori, teorico)

Ad esempio, prendiamo un dado a sei facce; l'evento è il lancio di un dado, e la lettura del numero che sat sulla faccia superiore. Il numero di eventi possibili quindi è $N = 6$. *S* e diciamo che l'evento favorevole è (per esempio) l'uscita del 6. allora avremo che $P = 1/6$.

Oppure diciamo che l'evento favorevole è l'uscita di un numero pari: il numero di eventi possibili è sempre $N = 6$ ma adesso il numero di eventi favorevoli è $n = 3$ perché in questo caso può essere un evento favorevole l'uscita della faccia con il numero 2, o 4 o 6. Quindi: $p = 3/6 = 1/2 = 50\%$.

Da un punto di vista sperimentale il concetto di probabilità può essere basato sulla definizione frequentista: se eseguo *N* ripetizioni di un evento e conto il numero degli eventi favorevoli *n*, si definisce frequenza la quantità (sperimentale, quindi a posteriori)

$$f = \frac{n}{N}$$

Se N→ ∞ $\Longrightarrow |f - P| < \epsilon$, dove ε è un numero piccolo a piacere, cioè la frequenza tende alla probabilità teorica quando il numero di ripetizioni che tende all'infinito.

La valutazione del numero di eventi favorevoli apsettati per un evento n_e sarà il prodotto della probabilità dell'evento P(e) per il numero di ripetizioni effettuate o prove N:

$$n_e = N \cdot P(e).$$

Ad esempio, la probabilità che esca testa (T) in un lancio di una moneta è *P(T)* = 1/2; se faccio *N* =200 lanci della moneta mi aspetto di osservare $n_e(T) = N \cdot P(T)$ = 200 · 1/2 = 100 eventi in cui è uscita Testa.

3. Meccanica Quantistica

Prerequisiti, cosa è necessario sapere:

Cos'è un'onda [*A, v, T, λ, ϕ*]

- Interferenza
- Diffrazione
- Luce: onda trasversale; l'Ampiezza dell'onda è proporzionale al campo elettrico: $\boldsymbol{A \propto E}$
  L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza: $\boldsymbol{I = A^2}$ **.** Cosa è la polarizzazione.

Meccanica classica

- Newton: 'poche' particelle, no attrito
- + Termodinamica: "molte" particelle → medie sulle grandezze meccaniche.
  Calore, Temperatura → irreversibilità → direzione fenomeni naturali (attrito ≠ 0).
- + Maxwell (Elettromagnetismo): la luce è un onda elettromagnetica

Relatività Speciale (sistemi inerziali)

- Apprezzabile per velocità v~*c, la velocità della luce.*
- *c = costante nel vuoto*
- spazio e tempo sono concetti relativi; la realtà misurabile dipende dallo spazio-tempo, in cui le due grandezze sono interdipendenti. Non esiste il concetto di contemporaneità assoluta.

3.2 Meccanica Quantistica – Alcuni punti chiave

- Nuova rappresentazione degli elementi della realtà microscopica (onde, matrici).
- Problemi di interpretazione con il senso comune.
- Principi (7), comprensibili solo se si conosce il formalismo appropriato.
- Limitazione della conoscenza
  - Esperimento delle due fenditure : Feynmann con le pallottole.
  - Principi; discussione.

- Sovrapposizione ⇌ Corrispondenza
- Indeterminazione ⇌ Collasso

3.3 Problemi irrisolti in meccanica classica [3]

- Effetto Fotoelettrico $I \sim v$ con $v > v_s$ e $I \nsim A$. Perché?
- Il colore degli oggetti è una funzione della temperatura *f(T)*. Perché?
- Emissione radiazione di corpo nero: paradosso dell'ultravioletto, calcolo di $E \to \infty$
- Proprietà degli atomi

3 Costanti, perché? Sistema planetario, ma con orbite 'assolutamente' costanti. Perché?

4 Togliendo un solo elettrone, quello esterno, le modifiche sono molto maggiori che togliendone molti $^{10}Ne = {}^{54}Xe \nsim {}^{53}Ne$. Perché?

- Gli elettroni ruotano introno al nucleo $\to \ddot{a} \neq 0 \to$ irradiano $\to$ dovrebbero perdere Energia secondo la teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo . Ma non cadono nel nucleo. Perché?

3.4 Soluzioni della Meccanica Quantistica – la nuova teoria

In ordine cronologico:

- Planck (1900): l'energia viene scambiata per multipli. Un campo di radiazione scambia energia con la materia per multipli di *hv,* con $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$
- Einstein (1905): l'energia della luce è distribuita nello spazio con discontinuità: il 'fotone', $E = h\upsilon$
- Bohr (1912): gi elettroni, in un atomo, possono muoversi solo su alcune orbite. Ogni orbita può accogliere un numero massimo di elettroni → Righe spettrali OK
- De Broglie (1924):

5 Ad ogni particella con massa *m* e velocità *v* è "associata" un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

6 In un'orbita l'onda non deve interferire, quindi per avere uno stato stazionario $2\pi r = n\lambda$

7 Ogni particella è "anche" un'onda (è uno stato quantistico)

- Schrödinger (1926):

8 Ogni sistema è descritto da una funzione d'onda $\psi\ (r,t)$ che contiene tutta l'informazione che è possibile ottenere dal sistema

9 $\psi\ (r,t)$ è un'ampiezza di probabilità (ha infiniti parametri, non sei)

10 $dP = |\ \psi\ |^2\, dV$ è la probabilità di trovare la particella nel volume *dV.*

11 Una particella di massa *m*, soggetta ad un potenziale *V (r, t)* è descritta dall'equazione di Schrödinger, che predice esattamente l'evoluzione temporale della ψ(r,t).

$$i\hbar\frac{\theta}{\theta t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

L'equazione è lineare e quindi vale il principio di sovrapposizione, cioè la somma di due soluzioni è anch'essa una soluzione [4].

$$S_1 \cup S_2 = S$$

- Heisenberg (1927):

12 Non possiamo, per una questione di principio, conoscere tutti i dettagli del presente

13 Le due grandezze $\vec{x}$, $\vec{p}$, non hanno più significato contemporaneo nella rappresentazione della Meccanica Quantistica.

14 Molte coppie di grandezze [x,p], [E,t]… non hanno intrinsecamente un significato contemporaneo, indipendentemente dal fatto se vengano "osservate" o no.

Ma nel mondo macroscopico non ce ne accorgiamo:

- Sistema Macroscopico piccolo: un granello di polvere , $p{\sim}10^{-18}J \cdot s/m$
  Se $\Delta x \sim 0.01\mu m \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim 10^{-26} J \cdot s/m$
- Sistema Microscopico: elettrone, modello di Bohr con orbita classica

$$p = mv \qquad\qquad pr = n\hbar \qquad (1)$$

La traiettoria:

$$\Delta x \ll r \qquad\qquad \Delta p \ll p$$

Quindi:

$$\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \ll 1,$$

ma per il principio di indeterminazione:

$$\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{\hbar}{rp}, \qquad (2)$$

che, usando la(1), diventa:

$$\frac{\Delta x}{r} \cdot \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1}{n},$$

che è incompatibile con la (2) per n=1.

- Einstein, Podolsky, Rosen (1935): Assumendo il principio di località, e quello di relatività, se ne deduce che la Meccanica Quantistica è incompleta. Cioè non descrive tutta la realtà.
- J. Bell (1964): propone un test sperimentale per verificare la località di qualunque teoria.
- A. Aspect (1982): realizza l'esperimento di Bell: le predizioni della meccanica quantistica vengono confermate, la teoria è completa, la realtà è non locale.

4. Comportamento quantistico di onde ed elettroni

Per capire la natura quantistica delle particelle microscopiche e il dualismo onda-particella consideriamo il seguente esperimento [2]. Prendiamo un cannone che spara proiettili in maniera continua su un muro sul quale sono state praticate due fenditure (Fig. 1).

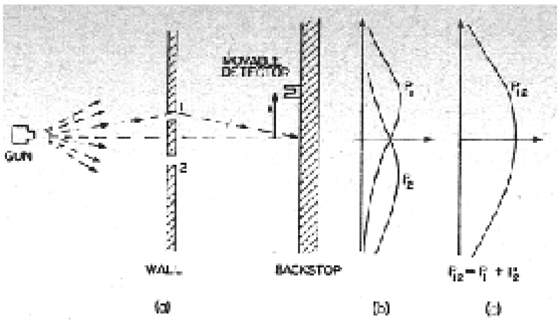


Figura 1: Esperimento delle due fenditure fatto con i proiettili.

Al di là del muro abbiamo una parete di fondo con un rivelatore mobile che può essere spostato avanti e indietro e che è in grado di contare i proiettili che passano per le fenditure [N_c]. Inoltre abbiamo un contatore che rivela l'emissione dei proiettili: emette un 'click' ogni volta che viene sparato un proiettile [N_s].

Supponiamo di chiudere prima la seconda fenditura e di contare quanti proiettili sono arrivati sulla parete di fondo passando attraverso la prima fenditura; poi facciamo il contrario. Otteniamo due curve P_1 e P_2 che rappresentano la probabilità che un proiettile arrivi sulla parete terminale quando viene aperta solo la prima o solo la seconda fenditura, rispettivamente , come il rapporto tra il conteggio dei proiettili che sono arrivati sul rivelatore e il numero totale dei proiettili sparati dal cannone [$P=N_C/N_S$].

Se ripetiamo l'esperimento con entrambe le fenditure aperte otteniamo una curva di distribuzione delle probabilità P_{12} che è la somma delle due distribuzioni di probabilità $P_{12}= P_1 + P_2$, avendo ben stabilito che i proiettili arrivano sulla parete di fondo uno per volta.

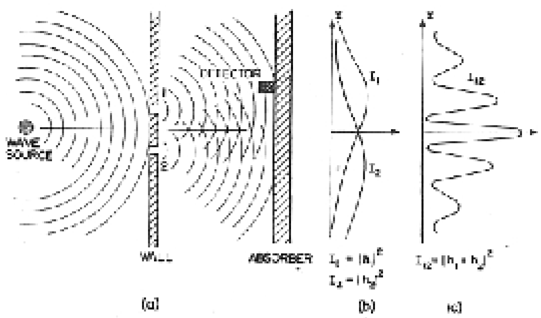


Figura 2: Esperimento fatto con le onde.

Adesso ripetiamo l'esperimento con onde (luce o acqua) al posto di proiettili e con un rivelatore che in questo caso misura l'ampiezza dell'onda A (Fig. 2). L'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza $I \propto A^2$. Procedendo come prima, vediamo che l'intensità dell'onda quando è chiusa la seconda fenditura risulta essere $I_1 = |A_1|^2$, mentre quando chiudiamo la prima fenditura è $I_2 = |A_2|^2$. Le due curve assomigliano a quelle ottenute nel caso dei proiettili. Quando però apriamo entrambe le fenditure, la curva di probabilità risultante non è più la somma (algebrica) delle due curve di probabilità, ma otteniamo una curva che definisce il fenomeno dell'*interferenza*, che è ben noto dalle leggi della fisica classica. Nella figura (2) si vede l'interferenza distruttiva (nei minimi della figura di interferenza) e l'interferenza costruttiva (nei massimi).

$$I_{12} = |A_1 + A_2|^2 = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1}I_2\, cos\delta}_{termine\ di\ interferenza}$$

Se $A_1 = A_2 = \sqrt{I} \rightarrow I_{12} = 2I + 2I\,cos\delta$

dove δ è la differnza di fase, che diopende dal cammino percorso Δx: $\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$.

Si vede che se $\Delta x=0 \Rightarrow \delta=0$, $\cos\delta = 1 \Rightarrow I_{12} = 4I$
Se invece $\Delta x=\pm\lambda/2 \Rightarrow \delta=\pi/2$, $\cos\delta = -1 \Rightarrow I_{12} = 0$

Infine ripetiamo l'esperimento ancora una volta, questa volta con elettroni, sparati da un cannone elettronico (Fig. 3). Il rivelatore è analogo al caso dei proiettili (si pensi ad un contatore Geiger): in ogni caso al passaggio di un elettrone questo emetterà un 'click'.

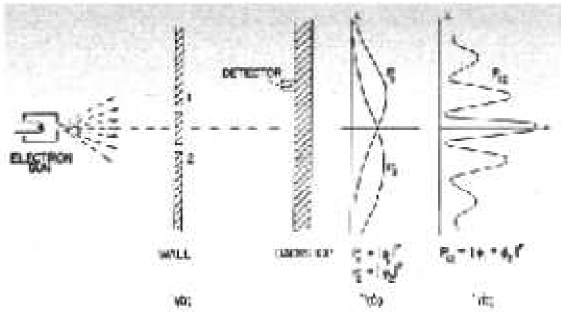


Figura 3: Esperimento fatto con elettroni.

Eseguendo l'esperimento secondo le modalità dei due casi precedenti possiamo notare che il contatore si comporta come nel caso dei proiettili: si sentono singoli 'click', di intensità (sonora) sempre uguale; ciò significa che gli elettroni arrivano al rivelatore uno per volta e tutti uguali tra loro. Per quanto riguarda i 2 casi in cui una sola delle due fenditure è aperta, la loro curva di probabilità è simile alle curve nel caso dei proiettili.

Quando però apriamo entrambe le fenditure si ottiene una curva di probabilità risultante che è simile a quella che si ottiene nel caso delle onde. Pur essendo una particella, l'elettrone interferisce (con chi?), comportandosi come un'onda.

In formule:

se $P_1=|\phi 1|^2$ e $P_2=|\phi 2|^2$ la probabilità congiunta $P_{12} \neq P_1 + P_2$ ma $P_{12}=|\phi 1 + \phi 2|^2$.

Ma con chi interferisce l'elettrone se ne arriva uno per volta al contatore (e non, per esempio, mezzo…)?

Cerchiamo di 'osservare'questi elettroni nel loro cammino, per vedere dove passano, per esempio piazzando una sorgente di luce tra le due fenditure (Fig. 4).

Vedremo un lampo vicino alla fessura 1 (o 2) se l'elettrone nel suo cammino fino alla parete di fondo passa vicino al primo (o secondo) foro. In questo caso ritroviamo gli stessi risultati dell'esperimento con i proiettili, come se la luce perturbasse a tal punto l'esperimento da cancellare l'interferenza.

Quindi non è possibile guardare gli elettroni che passano senza distruggere l'interferenza (Principio di Indeterminazione, forma debole).

Proviamo ad osservarli con una luce più debole per cercare di eliminare la perturbazione al sistema che questa produce. Una luce più debole non significa una energia minore, perché data la frequenza *v*, in ogni caso, ogni fotone ha $E = hv, p = h/\lambda$. Significa solo che ho meno fotoni al secondo , qualcuno intercetterà l'elettrone, così da vedere dove passa; qualcuno invece non intercetterà l'elettrone e non vedrà dove è passato. Nel primo caso non avremo interferenza, nel secondo si.

Allora diminuiamo l'energia del fotone, quindi diminuiamo la frequenza *v*, cioè aumentiamo la lunghezza d'onda λ. Adesso però non sappiamo più distinguere da quale fenditura è passato l'elettrone, perché vedremo solo un lampo diffuso tra le due fessure, e la risoluzione necessaria per distinguere due oggetti è ~λ. In quest'ultimo caso però il nostro esperimento produce di nuovo la figura di interferenza.

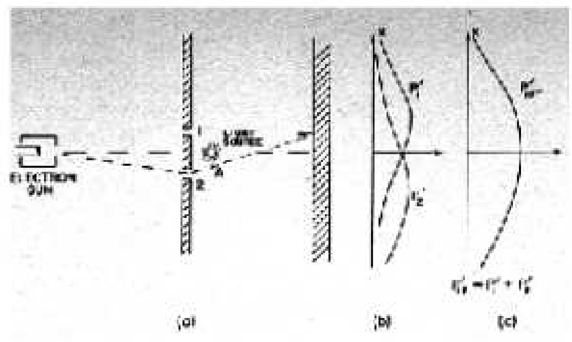


Figura 4: Cosa succede se poniamo una sorgente di luce tra le fenditure per osservare il passaggio degli elettroni

E questo è quanto predice il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \qquad (26)$$

Possiamo riassumere i risultati degli esperimenti precedenti, in modo schematico con la tabella:

Esperimento	**'Oggetto'**	**Probabilità (Intensità) misurata**	**P_{12}**	**Intera. ?**
Proiettili N	"Pacchetto" singolo "Oggetto" singolo	Discreto: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$	$P_1 + P_2$	NO
Onde sonore, onde luminose, Acqua	Onda di ampiezza *A(x,t)*	Grandezza continua: $I(x) = \lvert A(x)\rvert^2 =$ $A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2}\cos\delta$	$I_{12} = \lvert A_1(x) + A_2(x)\rvert^2$	SI
Elettroni, emessi uno per volta. Tutti con la stessa velocità v_e.	• Onda di $\lambda = h/p$ • Particella di m_e, v_e (Dualismo)[2]	Discreto: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$ Ma: figura di diffrazione	$P_{12} \neq P_1 + P_2$ Onda con $I = \lvert A(x)\rvert^2$ A= amp. di Probabilità, I = Probabilità	SI[1]

5 Spiegazione di tutto ciò che è stato detto prima – Facciamo un po' di ordine nei concetti e nelle formule della MQ.

5.1 Note onde-particelle:

- Onda e.m.- fotone [massa a riposo m=0]
  - onda con velocità c, nel vuoto; frequenza ν; lunghezza d'onda λ; $c=\lambda\nu$=300'000 km/s
  - particella [quanto di luce] con energia $E=h\nu$, impulso $p=E/c$, $\Rightarrow m_{inerziale}= h\nu/c^2$
- Particella - onda associata [massa a riposo $m\neq 0$]
  - particella con massa m, [posizione r al tempo t] ^{classica}, impulso p=mv.
  - onda con lunghezza d'onda $\lambda=h/p=h/mv$

5.2 I cardini della MQ:

a) La descrizione completa dello stato di un sistema [di una particella] è data dalla funzione d'onda ψ(r,t), che rappresenta un'ampiezza di probabilità (NON EPISTEMICA).

b) Principio di Indeterminazione: alcune coppie di grandezze fisiche non possono avere, contemporaneamente, valori arbitrariamente precisi.

c) L'evoluzione della funzione d'onda ψ(r,t) è determinata dall'equazione di Schrödinger il cui risultato è completamente deterministico.

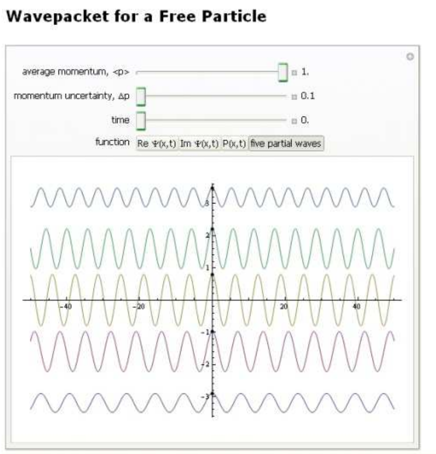
La funzione d'onda ψ(r,t) è una **Ampiezza di probabilità,** questo vuol dire che non è una grandezza fisica direttamente misurabile, ma è tale che il suo modulo quadro fornisce la probabilità di trovare la particella in (r,t).

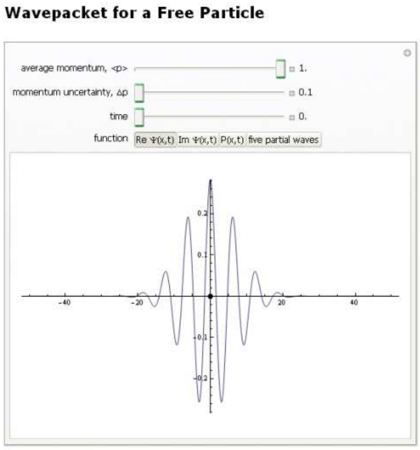
$$P(r,t) = |\psi(r,t)|^2 \qquad (1)$$

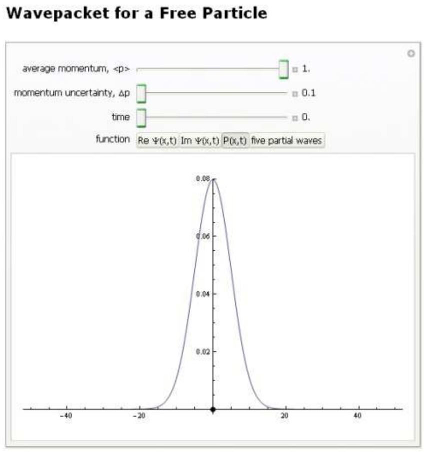
Risolvendo l'equazione di Schrödinger (vedi dopo per i dettagli) si ha che la funzione d'onda ha, in genere, la forma matematica di una somma di onde, il cosiddetto "pacchetto d'onde".

Schema di un (semplice) pacchetto d'onde:

Le 5 onde che compongono la funzione d'onda | La funzione d'onda ψ(r,t) | La Probabilità $P(r,t) = |\psi(r,t)|^2$







Simulazioni con Mathematica:
http://demonstrations.wolfram.com/topics.html

→ Physical Sciences → Physics → Quantum Physics → Wavepacket for a Free Particle:
http://demonstrations.wolfram.com/WavepacketForAFreeParticle/
http://www.wolfram.com/products/player/download.cgi

Evolution of a gaussian wave packet: come variano dx e dp secondo il Principio di Indeterminazione.

1) five partial waves $\psi_1(r,t)$, $\psi_2(r,t)$…. $\psi_5(r,t)$
2) Re $\psi(r,t)$, variare $p=h/\lambda$ // Vedere anche la parte immaginaria: Im $\psi(r,t)$,
3) $P(r,t)= |\psi|^2$ variare t, variare dp.

6 Come si lavora con la funzione d'onda e le misure sul sistema fisico relativo

Se ho più possibilità [modalità] relative al verificarsi di un evento, per esempio se ho due modalità 1, 2 ognuna descritta da una funzione d'onda ψ_1, ψ_2 , allora ho

$$\boldsymbol{\psi_{tot} = \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{e} \qquad P_{tot}(r,t) = |\psi_{tot}|^2} \tag{2}$$

Cioè:

- PRIMA si sommano le ampiezze di probabilità per calcolare la ψ_{tot}
- POI si fa il modulo quadro della ψ_{tot} per avere la probabilità.

Esempio:

Consideriamo la luce, cioè un'onda elettromagnetica, l'intensità luminosa in un punto x è proporzionale al quadrato del campo elettrico in quel punto:

$$\boldsymbol{I(x) \propto E^2(x)} \tag{3}$$

Se in un punto x arrivano due onde luminose **1** e **2** : $E_1(x)$, $E_2(x)$, l'intensità luminosa risultante si calcola prima sommando le ampiezze del campo Elettrico risultante:

$\Rightarrow E_{tot}(x)= E_1(x)+E_2(x)$, e poi calcolando l'intensità dal quadrato del campo Elettrico totale.

$$I_{tot}(x) \propto [E_{tot}(x)]^2 = [E_1(x)+E_2(x)]^2 = \underbrace{[E_1(x)]^2}_{\text{Intensità di } \mathbf{1}} + \underbrace{[E_2(x)]^2}_{\text{Intensità di } \mathbf{2}} + \underbrace{\mathbf{2\, E_1(x)E_2(x)}}_{\textbf{Termine di interferenza}} \quad (4)$$

E' il termine di interferenza che fa la differenza fra una somma "classica" (due eventi che avvengono nello stesso luogo e che si sommano semplicemente) ed la somma "quantistica" in cui c'è un termine di interferenza che può essere positivo, negativo o nullo.

Il termine di interferenza, se le due onde hanno la stessa frequenza ν, dipende dalla differenza di fase fra le due onde, cioè dalla differenza nel cammino percorso Δx.

$$2\, E_1(x)E_2(x) = 2\, E_1\, E_2 \cos\delta \;, \quad \text{dove la differenza di fase: } \delta = 2\pi\, \Delta x/\lambda \quad (5)$$

Δx	δ	$\cos\delta$	$2\, E_1\, E_2 \cos\delta$	I_{tot} se $E_1=E_2$
0	0	1	$2\, E_1\, E_2$	$4E^2$
$\lambda/4$	90^0	0	0	$2E^2$
$\lambda/2$	180^0	-1	$-2\, E_1\, E_2$	0

6.1 Il principio di sovrapposizione

[applicato a sistemi descrivibili da un oscillatore armonico, o da una somma di oscillatori armonici, in generale da un sistema la cui equazione è l'equazione delle onde)

Se un sistema, descritto p.e. dalle equazioni di Maxwell, ha come soluzioni due onde $E_1(x,t)$, $E_2(x,t)$ allora anche:

$$E(x,t) = a_1\, E_1 + a_2\, E_2 \quad (6)$$

sarà una soluzione del sistema, dove a_1 e a_2 sono due costanti arbitrarie.

La ragione è legata alla linearità delle equazioni che descrivono il sistema, è una proprietà matematica del sistema..

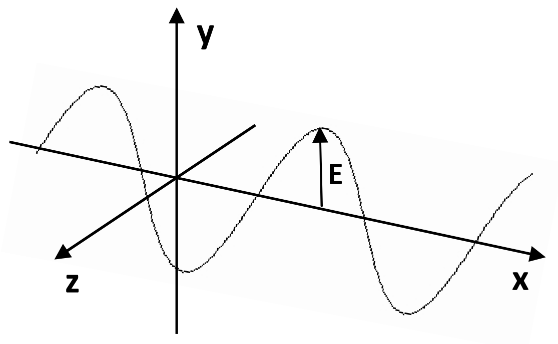
6.2 Decomposizione spettrale – scomposizione di uno stato.

Descrizione di un sistema quantistico in termini di sovrapposizione di stati

La Polarizzazione della luce

Un raggio di luce si dice polarizzato quando la direzione di oscillazione del campo elettrica ha una direzione che non varia nel tempo (l'asse di polarizzazione = $\mathbf{e_p}$)

Fig. 1 Esempio: il campo elettrico oscilla lungo la direzione **y,** la luce quindi ha polarizzazione $\mathbf{e_p} = \mathbf{y}$.



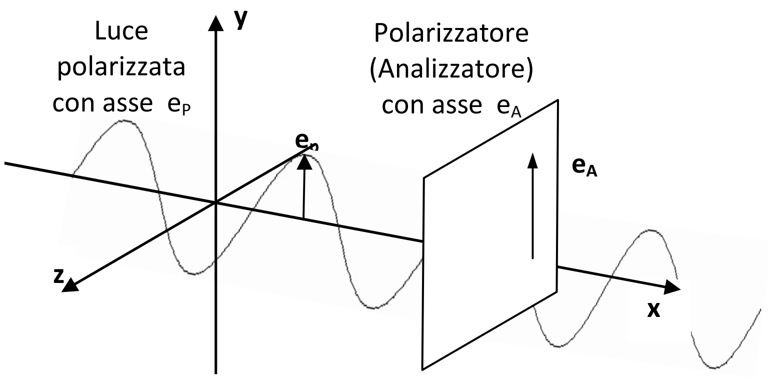
Un polarizzatore (Analizzatore) è un elemento fisico, in genere piano, caratterizzato da una direzione particolare, la direzione del polarizzatore $\mathbf{e_A}$, che seleziona la luce che incide su di esso, facendola passare tutta, o nulla, o una parte.

Se un polarizzatore $\mathbf{e_A}$ viene investito da luce polarizzata $\mathbf{e_p}$, ho due casi limite:

A)

Se $\mathbf{e_p} = \mathbf{e_A} \Rightarrow$ la luce passa:

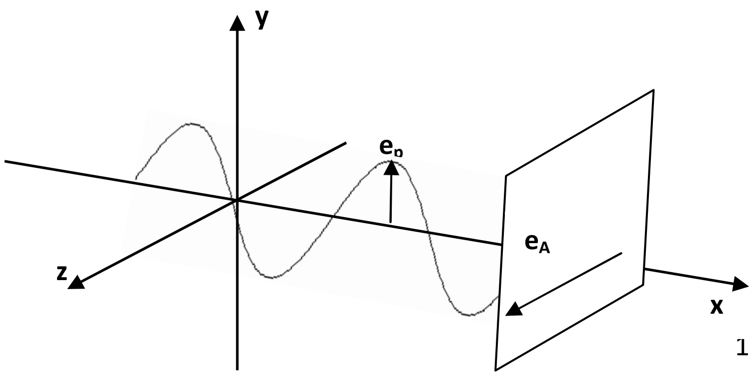
$\mathbf{E_{out} = E_{in}}$



B)

Se $\mathbf{e_p} \perp \mathbf{e_A} \Rightarrow$ la luce non passa:

$\mathbf{E_{out} = 0}$

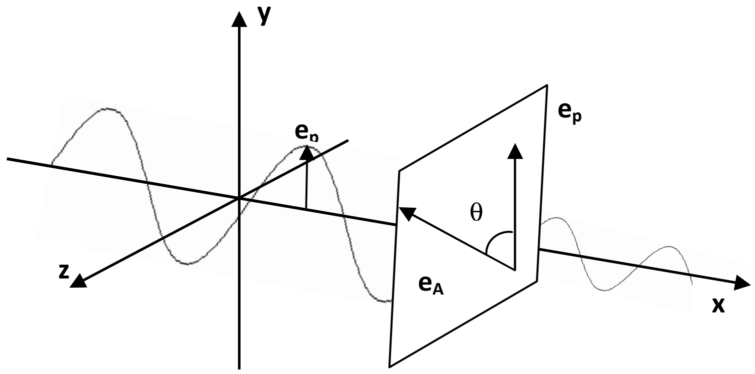


C)

Nel caso generale, in cui il polarizzatore fa un angolo θ con la polarizzazione del campo elettrico ho:

$$\mathbf{E_{out} = E_{in} \cos \theta}$$

quindi $\mathbf{I_{out} = I_{in} \cos^2 \theta}$



IMPORTANTE: il campo in uscita, più piccolo di quello in ingresso di un fattore $\cos^2 \theta$, ha polarizzazione $\mathbf{e_A}$.

Questo vuol dire che un polarizzatore agisce attivamente su di un raggio di luce, non solo variandone l'intensità, ma anche cambiandone la polarizzazione.

Supponiamo di inviare molta luce (molti fotoni) al polarizzatore $\mathbf{e}_a$, e consideriamo tre casi particolari:

Direzione	θ	cos θ	$\cos^2 \theta$	risultato
$\mathbf{e_p} = \mathbf{e_A}$	0	1	1	$I_{out} = I_{in}$
$\mathbf{e_p} \perp \mathbf{e_A}$	90^0	0	0	$I_{out} = 0$
$\mathbf{e_p} \angle \mathbf{e_A}$	45^0	$1/\sqrt{2}$	½	$I_{out} = I_{in}/2$

Se quindi mandiamo N fotoni (N) , **se** $\boldsymbol{\theta = 45^0}$ $\Rightarrow$

- Una frazione N/2 dei fotoni passa
- Una frazione N/2 dei fotoni non passa

Quindi dal polarizzatore ne escono N/2, cioè la metà di N $\Rightarrow$ $I_{out} = I_{in}/2$

Ma cosa succede se la luce è talmente debole che al polarizzatore arriva un fotone alla volta di una luce con direzione di polarizzazione $\theta = 45^0$?

Se la luce è "tanta" (molti fotoni) l'intensità in uscita è semplicemente la metà di quella in ingresso, ma se ho un solo fotone per volta, <u>non può</u> passare ½ fotone!

Quello che succede, e la relativa "spiegazione" è data dall'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica.

6.3 L'interpretazione ortodossa della MQ (Copenhagen)

Ogni dispositivo di misura può dare solo alcuni risultati determinati (autovalori)

Nel caso del polarizzatore si hanno due soli risultati possibili:

a) il fotone passa,

b) il fotone non passa,

Ad ognuno dei due risultati possibili (passa ; non passa) corrisponde un autostato del sistema fisico da esaminare (in questo caso del fotone).

Esempio: Polarizzatore con polarizzazione $\mathbf{e_A = y}$

I due auto valori sono "passa" ; "non passa"

Se l'autostato del fotone è: $\mathbf{e_p = e_A = y}$ $\Rightarrow$ ho l'autovalore "passa"

Se l'autostato del fotone è: $\mathbf{e_p \perp e_A = y}$ $\Rightarrow$ ho l'autovalore "non passa"

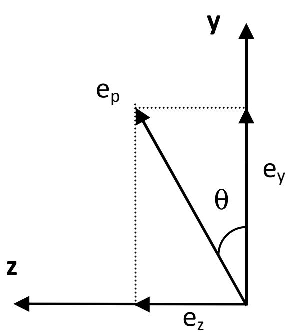
- Se il sistema in esame è in un "autostato" sappiamo con certezza il risultato della misura.
- Altrimenti possiamo sapere solo la probabilità di ottenere un certo risultato.

- Come si fa a calcolare la probabilità di ottenere un certo risultato?

"Scomponiamo lo stato del sistema in una combinazione lineare degli autostati del sistema di misura"

[è la decomposizione spettrale]

Nel caso del fotone $\mathbf{e_p}$,e di una misura fatta con un polarizzatore $\mathbf{e_A}$ **,** scompongo lo stato e_p del fotone secondo due assi y,z :



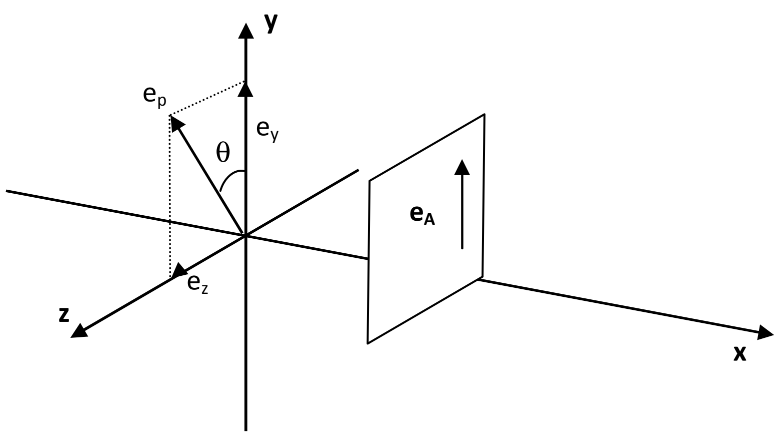
$$\Rightarrow \quad \mathbf{e_p = e_y \cdot \cos\theta + e_z \cdot sen\,\theta}$$

La probabilità di ottenere un certo risultato (che deve essere uno degli autovalori) è proporzionale al modulo quadro del coefficiente del rispettivo autostato.

Sia $\mathbf{e_A = y}$ e

$\mathbf{e_p = \cos\theta \cdot e_y + sen\theta \cdot e_z}$

Cosa passa? Passa l'autostato $\mathbf{e_y}$, il coefficiente è **cosθ**, la probabilità di ottenere che passi è $\mathbf{\cos^2\theta}$**.**



Se ho, per esempio, $\theta=45^0$, allora $\cos^2\theta= ½$, cioè passa 1 fotone ogni 2.

Il risultato è che il fotone, che aveva polarizzazione $\mathbf{e_p}$, passa o non passa con probabilità del 50%.

- Cosa succede e cosa è successo

❖ Il fotone che passa (tutti i fotoni che passano) risulta polarizzato secondo la direzione del polarizzatore $\mathbf{e_A}$

❖ C'è stato un brusco cambiamento nello stato dei fotoni: $\mathbf{e_p} \rightarrow \mathbf{e_A}$. E' il cosiddetto "collasso" della funzione d'onda del sistema. Se avessi scelto un polarizzatore con un asse di polarizzazione diverso, il fotone che usciva sarebbe stato diverso.

❖ Il misuratore (l'interazione del sistema quantistico con il sistema "esterno") cambia il sistema fisico.

❖ Le probabilità (a priori) si realizzano in un risultato certo.

❖ La misura modifica (disturba) il sistema in esame.

In generale se ho uno sistema fisico descritto da una funzione d'onda $\psi(r,t)$, e lo voglio "misurare", lo devo scrivere scomponendolo in **tutti** i possibili risultati:

PRIMA della misura: $\psi(r,t) = c_a\,\psi_a(r) + c_b\,\psi_b(r) + c_c\,\psi_c(r)$ …..

Questo vuol dire che avrò la probabilità $|c_a|^2$ di ottenere $\psi_a(r)$, la probabilità $|c_b|^2$ di ottenere $\psi_b(r)$…

DOPO la misura: ….**se** ho ottenuto $\psi_a(r) \Rightarrow \psi'(r,t)= \psi_a(r)$

A partire da una funzione d'onda $\psi(r,t)$, la sua evoluzione temporale è descritta in modo completamente deterministico dall'equazione di Schrödinger; per esempio per una particella di massa **m** non relativistica, in presenza di un potenziale V(r):

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(r)\cdot\psi$$

Esempi di soluzione $\psi(r,t)$

- Particella libera $\Rightarrow$ la soluzione è un'onda piana: $\psi(x,t)= A\cos(\omega t)\cos(2\pi x/\lambda)$
  λ= costante, quindi p = costante , v = costante, $E= ½\, mv^2$ = costante
  $\Delta p=0$, da cui $\Delta x=\infty$, cioè l'onda è estesa in tutto lo spazio.

- In generale non si ha un'onda piana:
  $\psi(r,t) = \psi_1(r) + \psi_2(r) + \psi_3(r)$ ….. è il cosiddetto "pacchetto d'onde"

Simulazioni:

Vedi il sito di PHET:

http://phet.colorado.edu/

→ How to Run Simulation → Full installation → Download installer

Una volta installato → Play with Sims

http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/new

→ Simulations → Physics → Wave Interference

→ *Quantum tunnelling and wave paket*:

barriera alta a destra + misura, oppure: barriera bassa al centro + misura

7 Principi della Meccanica Quantistica (ancora, tanto perché siano chiari)

- Planck-Einstein-de Broglie (fotoni; particelle):

per i fotoni, che hanno massa nulla: $E = h\nu \quad |p| = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}$

per le particelle materiali con m≠0: $p = mv \quad \lambda = \frac{h}{p}$

- Dualismo Onda-Particella: gli aspetti, i comportamenti, di un oggetto come onda e/o come particella non sono separabili.

- Le predizioni sulle misure effettuate su onde e particelle sono probabilistiche.

- L'informazione è data un'ampiezza di probabilità $\bar{A}(\vec{r}, t)$.

- Prima di fare una misura un sistema ha la"potenzialità" di assumere, se misurato, determinati valori. La funzione d'onda ci fornisce le probabilità di ottenere questi valori.

- Dopo la misura il sistema ha acquisito con certezza uno dei possibili valori, e ricomincia un'evoluzione con un'altra funzione d'onda.

- La funzione d'onda:

15 Al concetto classico di 'traiettoria' si sostituisce il concetto di 'stato', variabile nel tempo. Lo stato quantistico di una particella è caratterizzato da una funzione d'onda $\psi\,(\vec{r}, t)$ che contiene tutta l'informazione che è possibile ottenere dalla particella.

16 $\psi\,(\vec{r}, t)$è interpretata come ampiezza di probabilità d$P(\vec{r}, t)$ =| $|\,\psi\,(\vec{r}, t)|^2 \cdot dV$

17 L'evoluzione di $\psi\,(\vec{r}, t)$ con il tempo è la soluzione dell'equazione di Schrödinger (non relativistica), una volta forniti i valori iniziali del sistema:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi\,(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi\,(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\psi\,(\vec{r}, t)$$

7.1 Onde classiche e onde quantistiche

Principio di Indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

(mentre per le onde classiche $k = 2\pi/\lambda$, si ha: $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1$, la Meccanica Quantistica entra in gioco nel momento in cui associamo una lunghezza d'onda λ ad una particella).

La posizione x e lì'impulso p, non hanno contemporaneamente la proprietà di avere dei valori con una incertezza tale da violare la relazione di indeterminazione.

In generale il principio di Indeterminazione vale per tutte le variabili "che non commutano" (termine tecnico per indicare che il prodotto delle loro incertezze è sempre >0).

Alcune di queste coppie di grandezze:

posizione - impulso	x, p
Energia – tempo	E, t

Quindi:

- L'equazione di Schrödinger[2] è *deterministica*.
- L'indeterminazione appare quando viene misurata una quantità fisica. Ma è "intrinseca" alla natura. Il sistema fisico "non possiede" contemporaneamente le proprietà delle variabili [x,p], oppure [E, t].
- Vale il Principio di sovrapposizione [5]:

$$|\text{Sovrapposizione}\rangle = |1\rangle + |2\rangle$$

Immaginiamo una luce qualunque, cioè non polarizzata rispetto ad alcuna direzione, con intensità I_0, che passi attraverso 2 filtri polarizzati; se il primo filtro ha l'asse di polarizzazione diretto lungo una delle tre direzioni di un sistema ortogonale (poniamo che sia l'asse *z*, quindi in Verticale) la luce ne uscirà polarizzata rispetto all'asse V con intensità trasmessa $I_V = I_0 \cos^2\theta$. Passando poi attraverso un filtro che abbia l'angolo di polarizzazione a lungo l'asse *x*, quindi in Orizzontale, questa luce avrà intensità nulla rispetto a tale asse.

Immaginiamo che ora passi attraverso 3 filtri; il primo ha le stesse caratteristiche dell'esempio precedente, quindi la luce ne uscirà sempre polarizzata lungo l'asse V; in questo secondo caso però la facciamo poi passare attraverso un filtro con l'asse di polarizzazione diretto a 45° tra l'asse x e l'asse y e poi attraverso il secondo filtro dell'esempio precedente: l'intensità trasmessa sarà $I \Rightarrow I_V \Rightarrow I_V/2 \Rightarrow I_V/4$ (vedi Tab. 1).

[2] Quando non si capisce una cosa si inventa un nuovo termine e si credo di averla capita (Principio di Complementarietà di Bohr per il dualismo onda-corpuscolo: si completano escludendosi, esistono 'in potenza' fin quando non vengono misurate).

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\sin^2\theta$	$\cos^2\theta$
0	0	1	0	1
30	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/4	3/4
45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$ 1/2	1/2	
60	$\sqrt{3}/2$	1/2	3/4	1/4
90	1	0	1	0
120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	3/4	1/4
135	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2

Tabella 1: Tabella con i valori delle funzioni di alcuni angoli.

7.2 Interpretazione probabilistica del funzionamento di un polarizzatore per singoli fotoni.

Se una luce polarizzata secondo un angolo $\theta = 30°$ con intensità I_0^θ passa attraverso un filtro con asse di polarizzazione Verticale o attraverso un filtro con asse Orizzontale avrà un'intensità trasmessa, rispettivamente di:

$$I_T^V = I_O cos^2\theta = I_0 \frac{3}{4}$$

$$I_T^O = I_O sin^2\theta = I_0 \frac{1}{4}$$

Nel caso di un polarizzatore per singoli fotoni, se consideriamo, per esempio, *n = 4* fotoni si avrà:

$$n_T^V = n \cdot cos^2\theta = n \cdot 3/4 = 3$$

$$n_T^O = n \cdot sin^2\theta = n \cdot 1/4 = 1$$

8 Note aggiuntive

- **Formule famose**

Legge di Wein per il corpo nero:

$$u = \frac{av^3}{e^{\frac{bv}{T}}}$$

con b/T = λ_{max}.

Legge di Rayleigh-Jeans per il corpo nero:

$$u(, T) = \frac{8\pi T v^3}{c^3} kT.$$

Legge di Stefan-Boltzmann

$$E = \sigma T^4 \text{ [J/s]}$$

Legge di Planck

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

con h = $6.6 \cdot 10^{-34}$ nel S.I.

- **Perché non si vedono le proprietà ondulatorie della materia macroscopica**

- Polvere:

$$\emptyset = 1\mu m, \quad m \sim 10^{-15} kg, \quad v = 1mm/s$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{Å}, \quad \text{[trascurabile vs 1 } \mu m]$$

- Neutrone termico:

$m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, T~300K

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{3}{2}kT$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \cong 1.4 \text{ Å}$$

Nell'ultima equazione la lunghezza d'onda di De Broglie è comparabile con la distanza tra gli atomi, perciò si ha diffrazione.

- Elettrone:

$$m_e = 0.9 \cdot 10^{-30} kg$$

$$E = qV, \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} \cong \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ Å} \quad \text{[accelerato da V]}$$

- Elettrone acceleratore:

E = 1 GeV = $\sqrt{p^2c^2 + m_0^4 c^4}$ $\lambda = \frac{hc}{E} \sim 1.2 \cdot 10^{-15} m$ [Nucleo Atomico]

- **Stabilità dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale**

Un elettrone nel campo Coulombiamo del protone

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r}$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \equiv e^2$$

$$\bar{V} \sim \frac{e^2}{r_0} \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{r_0} \quad [r_0 = \text{raggio medio}]$$

$$\Rightarrow T \geq \bar{T}_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2}$$

$$E_{min} = \overline{T}_{\min} + \overline{V} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0}$$

Il minino si ha per:

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me_0^2} \Rightarrow E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$$

- **Decomposizione di un vettore secondo le sue componenti su due assi arbitrari.**

Esempio: polarizzazione del campo Elettrico (onda elettromagnetica):
E_V: polarizzazione Verticale, direzione $\hat{x}$
E_O: polarizzazione Orizzontale, direzione $\hat{y}$ (N.B. Orizzontale e Verticale sono convenzioni).

$$\overline{E}_{45} = \overline{E}'_V \ \overline{E}'_0$$

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}E \quad , \quad E_V = \frac{1}{\sqrt{2}}E$$

$$E_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_V + \frac{1}{\sqrt{2}}E_0$$

$$E_{45}^2 = \frac{1}{2}\ E^2 + \frac{1}{2}\ E^2 = E^2$$

In generale,

$$\overline{E} = \alpha\overline{E}_A + b\overline{E}_B$$

$$\overline{E} = \cos\theta\ \overline{E}_A + \sin\theta\overline{E}_B$$

$$\begin{cases} E_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_V + \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 & E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{45} - \frac{1}{\sqrt{2}}E_{135} \\ E_{135} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_V - \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 & E_V = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{45} + \frac{1}{\sqrt{2}}E_{135} \end{cases}$$

9. Riferimenti bibliografici

|1| A. Einstein, “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abbängig?”, Annal der Physik 18, 639 (1905
|2|Feynman, ‘Sei pezzi facili’, [VI- Comportamento Quantistico], Adelphi (2002).
|3|Gian Carlo Ghirardi, *Un’occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore (2009), cap.1,
|4| GCG cap. 4 pag. 94
|5| GCG pag. 71
|6| GCG pag. 160
|7| GCG pag. 159, disegno 8.3
|8| GCG pag.33