I fondamenti della Meccanica Classica (MC)

Ipotesi di base:

- Lo spazio è euclideo
  - Lo spazio è descritto dalla geometria euclidea [lo spazio è "piatto"]. Quindi, per esempio, dato un triangolo nello spazio, la somma degli angoli interni deve dare sempre 180^0. Se lo spazio fosse curvo la somma degli angoli interni di un triangolo sarebbe minore, oppure maggiore di 180^0 [geometrie non-euclidee].
  - Uno spazio euclideo è una buona approssimazione per descrivere il mondo che ci circonda. In realtà secondo la Relatività Generale lo spazio in presenza di materia è sempre curvo, ma gli effetti sulla Terra sono quasi sempre trascurabili.

- Lo spazio è isotropo e omogeneo
  - La spazio è identico a sé stesso sia in seguito a traslazioni che a rotazioni. Le proprietà fisiche dei corpi, non dipendono dalla posizione o dalla direzione nello spazio; quindi non cambiano se sposto il corpo da un punto ad un altro o se misuro una certa proprietà in varie direzioni.

- Il tempo è isotropo e omogeneo
  - Come sopra...per direzioni nel tempo si intendono quella verso il passato e quella verso il futuro. L'omogeneità consiste nell'invarianza per traslazioni nel tempo. Quindi se non variano le condizioni, le proprietà di una grandezza non dipendono da quando le misuro.
- Esiste un spazio assoluto - esiste un tempo assoluto universale.

Nota: spazio e tempo, che in meccanica classica sono due grandezze indipendenti, in meccanica relativistica non lo sono più e si parla di spazio-tempo. Ma per corpi che si muovono a velocità molto minori della velocità della luce nel vuoto (300'000 km/s), questi effetti sono trascurabili e possiamo considerare lo spazio ed il tempo come grandezze indipendenti.

La Meccanica Classica

- In un sistema inerziale valgono i tre principi della MC (le tre leggi di Newton):

I. Se la somma delle forze (esterne) che agiscono su di un corpo è zero, allora il corpo ha accelerazione nulla, cioè velocità costante: $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{a}} = 0$.

II. Vale la relazione: $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$, dove ***m***, la massa, rappresenta la quantità di materia del corpo.

III. Quando due corpi interagiscono, la forza $\boldsymbol{F}_{12}$ che il primo corpo esercita sul secondo è uguale ed opposta alla forza $\boldsymbol{F}_{21}$ che il secondo esercita sul primo: $\overline{\boldsymbol{F}}_{12} = -\overline{\boldsymbol{F}}_{21}$.

- E' valida la legge di gravitazione universale di Newton: $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{G}\dfrac{\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2}{\boldsymbol{R}^2}\hat{\boldsymbol{R}}$.

Assunzione ulteriore (verificata sperimentalmente): le forze e tutte le interazioni diminuiscono di intensità con la distanza relativa dei corpi interagenti, quindi se un corpo è "abbastanza" isolato non è soggetto a forze esterne. Questo permette di definire un sistema di riferimento in cui non agiscono forze esterne come un sistema abbastanza lontano da altri corpi, per esempio un sistema fra una galassia e l'altra.

Invarianza galileiana

- Le leggi della fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme (non accelerato) l'uno rispetto all'altro. [Sistemi di riferimento inerziali]
- Oppure: le leggi fondamentali della fisica hanno la stessa forma in due sistemi di riferimento collegati da una trasformazione galileiana.

Nota matematica

- **Il significato di variazione di una grandezza**

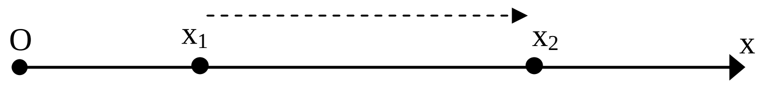
Con il simbolo *Δg* si indica la variazione della grandezza *g*.

Se scrivo ***Δx,*** per esempio, intendo la variazione della grandezza ***x***, dove per variazione si intende, se non specificato altrimenti, il valore finale meno quello iniziale.

E' evidente quindi che il concetto di variazione di una grandezza presuppone il concetto di tempo.

Quindi se il corpo che sto descrivendo si è spostato dal punto $\boldsymbol{x_1}$ al punto $\boldsymbol{x_2}$, la variazione di ***x*** sarà:

$$\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$$



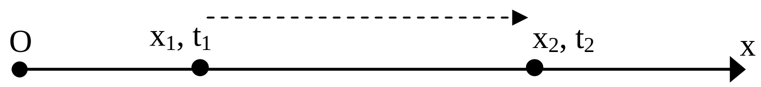
- **Il significato di "variazione" di una grandezza in funzione di un'altra**

Se ho due grandezze che stanno variando, posso essere interessato a sapere come varia la prima al variare della seconda. Molto spesso, ma non necessariamente, la seconda variabile è semplicemente il tempo.

Il caso più semplice è quello della posizione, in cui sono interessato non solo alla variazione della posizione, ma anche dell'intervallo di tempo in cui è avvenuta, cioè della variazione del tempo, intendendo con "variazione del tempo" la misura dell'intervallo di tempo, quindi la differenza fra l'istante iniziale e l'istante finale.

Nota che per "tempo" si intende sempre il numero letto su di un orologio che sta fermo nel sistema di riferimento usato.

Se inserisco anche la variabile tempo ho che il corpo si trovava all'istante t_1 nel punto x_1 , e nell'istante t_2 nel punto x_2



In questo caso la variazione di *x* sarà, come prima: $\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$

Mentre la relativa variazione di **t** sarà: $\Delta t = t_f - t_i = t_2 - t_1$

- **La velocità**

La velocità, che ci dice quanto siamo "veloci", è una misura di quanto varia la grandezza "spazio percorso" in funzione della grandezza "tempo trascorso".

Per esempio se mi sposto di 5 km in 1 ora, dirò che sono andato a 5 km/ora (in media).

In maniera più formale, supponendo di essere passato dalla posizione x_1 al tempo t_1, alla posizione x_2 al tempo t_2 , posso scrivere l'espressione della velocità, cioè la variazione dello spazio percorso diviso per il tempo trascorso:

$$v = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo trascorso}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Questa è una velocità **media,** effettuata nell'intervallo di tempo Δt: per esempio se ho percorso 5 km in 1 ora, potrei essermi mosso sempre a 5 km/ora , oppure essere andato per la prima mezz'ora più veloce, poi più lento.

Se voglio invece una indicazione della velocità **istantanea,** cioè della velocità che un corpo ha **in un certo istante t,** devo utilizzare l'operazione matematica di "derivata".

- **Il significato di "derivata" di una grandezza**

La derivata di una grandezza (per esempio x), in funzione di un'altra grandezza (per esempio il tempo) indicata con $\frac{dx}{dt}$, è il valore del rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando l'intervallo Δt diventa molto piccolo, al limite quando questo intervallo tende a zero.

Formalmente si scrive:

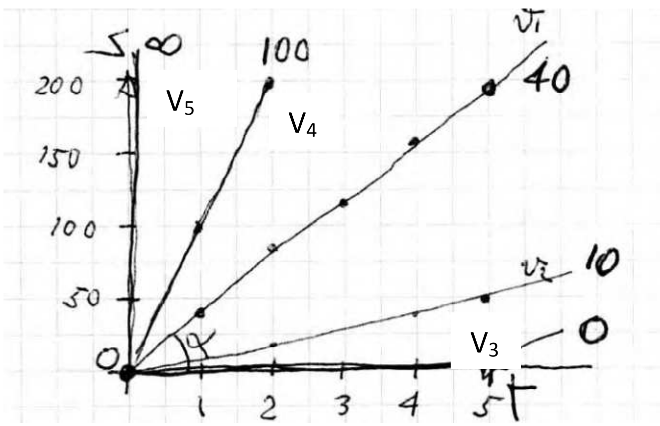
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- **Significato geometrico**

Geometricamente la derivata viene dall'idea di trovare una espressione di questa "variazione" quando le due grandezze sono disegnate in un grafico a due dimensioni, in cui ho una variabile in funzione dell'altra.

Per esempio, supponendo di disegnare una serie di grafici in cui sull'asse orizzontale ho il tempo, e sull'asse verticale lo spazio percorso, posso disegnare varie rette a seconda della velocità con cui si sta muovendo il corpo che studiamo.

Nella figura sono state disegnate 5 rette che rappresentano 5 percorsi fatti ognuno a velocità costante. La velocità si può calcolare facilmente facendo, per ogni retta, il rapporto $v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$



v_1= 40 km/h
v_2= 10 km/h
v_3= 0 km/h
v_4= 100 km/h
v_5= ∞ (infinito) perché avrei un numero diviso zero.

Dal punto di vista geometrico cosa potrei prendere come misura della velocità?

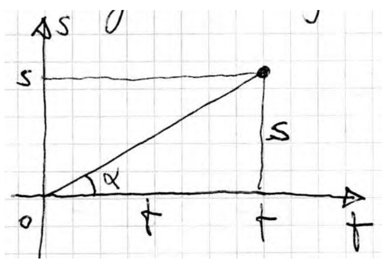
L'angolo α fra la retta che descrive il moto e l'asse delle x?

Come proporzionalità va bene, se l'angolo aumenta, allora aumenta anche la velocità, ma ho problemi per α=90° dove v= ∞.

Conviene utilizzare la tangente dell'angolo: tg α

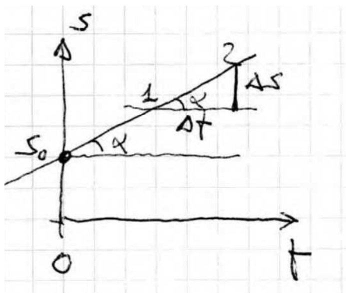
$$\left.\begin{array}{lll} v=0 & \alpha=0 & tg\alpha=0 \\ v=\infty & \alpha=90° & tg\alpha=\infty \end{array}\right\} \quad \text{OK!}$$

Dalla trigonometria ho infatti che $s = t \cdot \tan\alpha$, cioè $\frac{s}{t} = \tan\alpha$



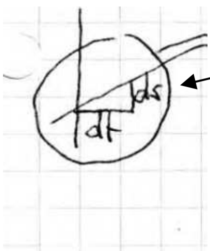
E questo rapporto resta costante per ogni pezzetto della retta, perché dipende solo dalla pendenza della retta. Se l'angolo α resta costante, allora resta costante anche il rapporto Δs/Δt , cioè la velocità.

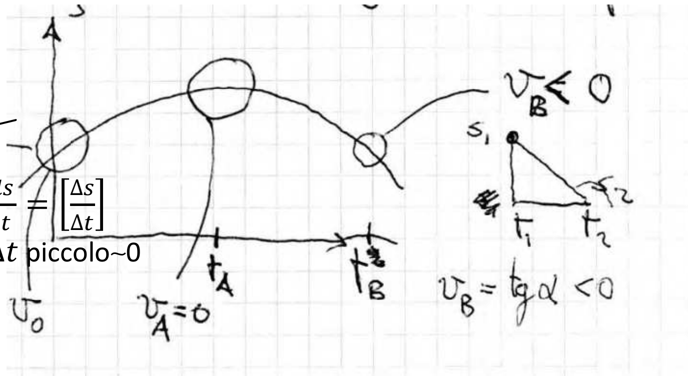
$$v = tg\,\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



…e se invece di una retta avessi una curva? Cioè se la pendenza, quindi la velocità dell'oggetto cambiasse istante per istante?

Posso considerare un pezzetto "piccolo" della curva e calcolare il rapporto Δs/Δt:



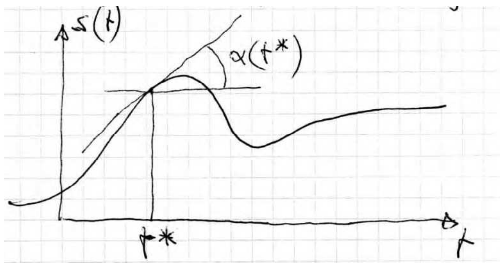


$\frac{ds}{dt} = \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right]$
Δt piccolo~0

Sa faccio tendere a zero il tratto Δt, allora ho quella che si chiama la "derivata" di s fatta rispetto a t, che ci dice quanto vale istante per istante il rapporto fra le due, in questo caso la velocità.

$\frac{ds}{dt} =$ derivata di s rispetto a t = tg α

- **La velocità calcolata in un punto t**



Cosa succede in t*?

1) Disegno la tangente "geometrica" in t*
2) La tangente geometrica farà un angolo α con l'asse delle x
3) Calcolo la tangente trigonometrica dell'angolo α:

$\tan\alpha(t^*) = \left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=t^*} = v(t^*)$, è la velocità calcolata nel punto t^*.

che ci dice come sta cambiando la grandezza s in funzione del tempo t.

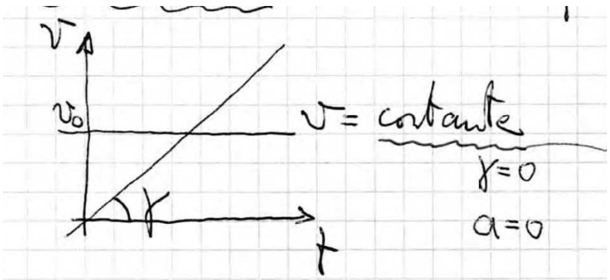
E' la cosa importante. Ci dice come /dove stiamo andando (indipendentemente da dove siamo).

Se è maggiore di zero vuol dire che sto andando "avanti". Se è minore di zero vuol dire che sto tornando indietro.

- **L'accelerazione:**

Come sopra, ma ora guardo come cambia velocità in funzione del tempo:

a =tg γ = $\frac{dv}{dt}$



In generale: $x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{x(t)}$

Se x=costante $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$

Se x aumenta $\Rightarrow \frac{dx}{dt} > 0$

Se x diminuisce $\Rightarrow \frac{dx}{dt} < 0$

Regole per il calcolo di una derivata:

x(t)	dx/dt
costante	0
t^n	$n\,t^{n-1}$
cz(t)	$c\,\frac{dz}{dt}$
z(t)*γ(t)	$z(\frac{d\gamma}{dt})+\gamma(\frac{dz}{dt})$
sen x	cos x
cos x	- sen x
e^{ax}	$a\,e^{ax}$

Come descrivere l'andamento di una grandezza che varia nel tempo

(Leggere un grafico dove sono riportate sugli assi una variabile e la sua derivata)

In un grafico bidimensionale x,y posso decidere di rappresentare su di un asse (l'asse y) la grandezza (il suo valore, dove siamo), e sull'altro (l'asse x) la derivata temporale (come sta cambiando, in che direzione andiamo).

Se fosse un conto corrente avrei:

- Asse y, dove sono, cioè il saldo, che può essere positivo o negativo (+ , -)
- Asse x, dove sto andando, cioè la derivata del saldo nel tempo, come sta variando, se la variazione è positiva o negativa.

Esempio: lo stato dei paesi europei per quel che riguarda l'innovazione tecnologica, nel 2003

EU - Innovation Technology 2003

Asse verticale: lo "stato" del paese

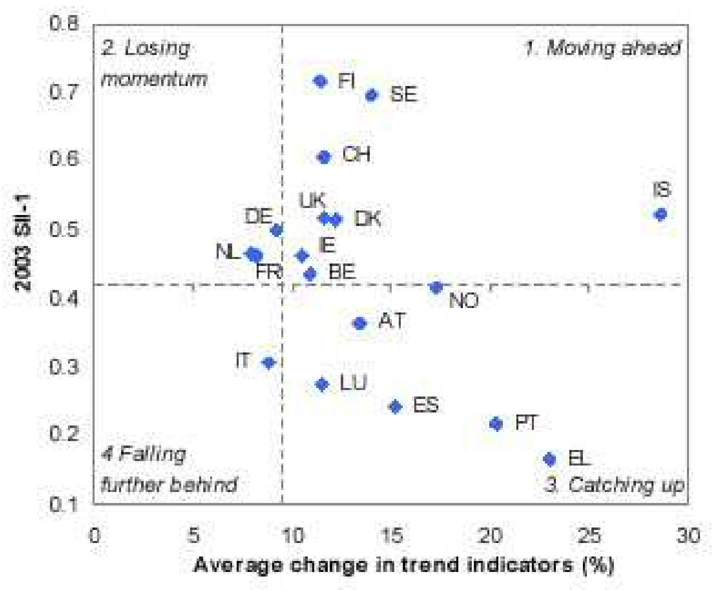
Asse orizzontale: come sta variando lo "stato" del paese.

L'incrocio dei due assi è fatto rispetto ad un valore medio di riferimento.

Esempio (grafico accanto):

1. Paesi che "sono messi bene" e che stanno migliorando.
2. Paesi che sono messi bene, ma che stanno peggiorando.
3. Paesi che sono messi male, ma che stanno migliorando.
4. Paese messo male, che peggiora.

Figure 3. Overall country trend by SII-1



Il Primo principio della dinamica

- Il Principio d'inerzia -

(cosa succede se un corpo è libero, se non ho una forza applicata)

Un corpo non soggetto a forze esterne ha velocità costante

L'oggetto di cui si parla: un **corpo, un oggetto materiale,** per il momento approssimato ad un oggetto simmetrico e "piccolo", una pallina tanto per fissare le idee.

E' necessario definire due termini: la "velocità" e la "forza".

- **Definizione di velocità**:

La velocità ***v*** ci da una misura di quant'è lo spazio percorso dal corpo in un certo tempo. Cioè di quanto "velocemente" il corpo si sta spostando. In formule, e per una sola direzione, per esempio la x, abbiamo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Nota: la velocità dipende dal sistema di riferimento, è calcolata infatti tramite misure di posizione ***(x)*** e di tempo ***(t)*** , che dipendono dal sistema di riferimento rispetto a cui si fa la misura.

La velocità è una grandezza relativa al sistema in cui viene misurata.

La velocità è un vettore, cioè è definita da tre numeri $(v_x \;\; v_y \;\; v_z)$ oppure da un modulo (v) , che ci dice quanto è la velocità, con una unità di misura (nel Sistema Internazionale metri al secondo) e da un modulo $(\hat{v})$ che indica la direzione della velocità nello spazio.

$$\bar{v} = v \cdot \hat{v} \quad (m/s)$$

Il primo principio ci dice che se non ho Forze esterne la velocità non cambia né in modulo né in direzione:

$$F_e = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = costante \;\Leftrightarrow \begin{array}{c} v = costante: \;\; \text{non cambia il modulo} \\ \& \\ \hat{v} = costante: \;\; \text{non cambia la direzione} \end{array}$$

Un corpo che si muove con velocità costante si muove di moto rettilineo uniforme[1].

Quindi un altro modo di esprimere il primo principio è:

Un corpo non soggetto a forze esterne si muove di moto rettilineo uniforme

- **Definizione di Forza**:

Possiamo chiamare forza (o"interazione") qualunque causa che produca una variazione dello stato di un corpo (definito dalla sua posizione nello spazio al variare del tempo). Con variazione dello stato si intende l'accezione più generale possibile, quindi, nell'ipotesi di applicare una forza esterna la corpo:

- Se il corpo sta fermo, allora comincia a muoversi con una certa velocità.
- Se si sta muovendo la sua velocità viene variata.
- Se fosse un corpo esteso…si deformerebbe, cioè il corpo si "dilata" o si "accorcia", a seconda che la forza sia una trazione o una compressione.

[1] Una velocità "costante" può essere anche uguale a zero; v=0 è un caso particolare di moto rettilineo uniforme.

Per variazione dello stato NON si intende una variazione dello stato termico, cioè dei parametri (p,V,T) = (pressione, Volume, Temperatura) che definiscono lo stato termodinamico del sistema (vedi dopo la parte di Termodinamica).

♦ **Rispetto a quale sistema di riferimento sono misurate le velocità?**

Il sistema deve essere un riferimento inerziale, definito come un sistema in cui vale il Primo Principio della dinamica.

Attenzione! Questo è un possibile loop logico: definire il primo principio come un'asserzione che vale in un sistema inerziale, definendo poi il sistema inerziale come quello in cui vale il primo principio!

♦ **Soluzione:** si utilizza l'informazione **sperimentale** che **tutte le interazioni conosciute** o sono nulle a distanze maggiori di quelle interatomiche (le interazioni deboli o forti) o vanno a zero, cioè si annullano, molto rapidamente se aumenta la distanza fra i corpi che interagiscono (le interazioni gravitazionali e quelle elettriche, che diminuiscono con l'inverso del quadrato della distanza)[2].

Quindi se considero un corpo abbastanza lontano da altri corpi (per esempio un corpo nello spazio galattico) posso supporre con ottima approssimazione che le forze esterne agenti sul corpo siano nulle o assolutamente trascurabili[3].

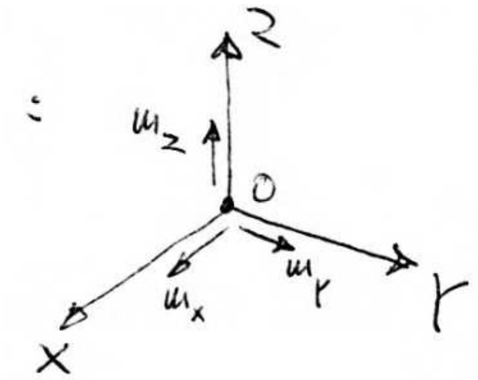
Tanto per avere un'idea: si consideri che la distanza media fra due stelle è dell'ordine di 10^{16} m, cioè circa $0{,}3 \cdot 10^{8}$ anni luce. A questa distanza una stella che avesse una massa 1'000 volte maggiore di quella del Sole[4] attirerebbe una massa di 1 kg con una forza equivalente a 1 milionesimo di grammo = $1 \cdot 10^{-6}$ g.

<u>Osservazione sperimentale</u>

Se non ho corpi nelle vicinanze $\Rightarrow$ non ho forze esterne

Test sperimentale per vedere se mi trovo in un sistema di riferimento inerziale: prendo tre masse m_x m_γ m_z che vengono lanciate con v_x v_γ $v_z \neq 0$:

Se le tre masse mantengono costante la loro velocità (lanciate una per volta) allora il sistema di riferimento è inerziale.



[2] Per vedere uno schema delle quattro interazioni esistenti vedi la Scheda alla fine del capitolo Meccanica.

[3] Per chiarirsi le idee su come si risolve questo loop logico vedi p.e. "La Fisica di Berkeley", Vol. I, Meccanica, cap.3, par.1-5. Per una descrizione operativa sui sistemi inerziali vedi: P.W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, 29, **32**, (1961).

[4] La più grande Stella conosciuta (La stella R136a1 nella Grande Nube di Magellano) ha una massa che è 250 volte quella del Sole.

Il secondo principio della dinamica

(cosa succede ad un corpo se $F_e \neq 0$)

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{a}}$$ (la scriveremo meglio, così non va sempre bene)

La somma delle forze applicate ad un corpo è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione

I termini di cui si parla: l'oggetto cui si riferisce la formula è un singolo corpo (oggetto), per il momento simmetrico e con estensione nulla. Una piccola sfera tanto per fissare le idee

- $\boldsymbol{F_e}$ la somma delle forze (esterne) che agiscono sul corpo in esame.
- $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione del corpo
- $\boldsymbol{m}$ la sua massa

Le forze esterne e l'accelerazione **devono** essere misurate rispetto ad un sistema inerziale.

♦ **Definizione di m**: ogni corpo ha una massa "m" che rappresenta la quantità di materia – è quindi proporzionale al numero di atomi, cioè di elettroni, protoni e neutroni che compongono il corpo.

La massa è una misura dell'inerzia del corpo, cioè della difficoltà a spostare il corpo, a variarne la sua velocità, NON è il peso (che nello spazio è nullo).

In meccanica classica la massa di un corpo è costante, se non intervengono "azioni" verso o dall'esterno; ma attenzione, un corpo può "perdere" massa verso l'esterno (la macchina che consuma benzina) o acquistare massa dall'esterno (la valanga...)

1) L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è proporzionale alla $\boldsymbol{F_e}$ (e viceversa), $\mathbf{a = F_e/m}$. Proporzionale vuol dire che se raddoppio la forza → raddoppierà l'accelerazione. O, viceversa, se l'accelerazione si dimezza, vuol dire che è stata impressa una forza che è la metà.

2) La relazione è vettoriale: $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$ **,** quindi l'uguaglianza non è solo fra i moduli (i "numeri" di sinistra e quelli di destra), ma anche fra i versori (la "direzione" del vettore a sinistra e di quello a destra).

- scrivere: $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$: equivale a scrivere : $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}$

Che equivale a scrivere due relazioni: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a}$ e $\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{a}}$ (direzione di ***F*** = direzione di ***a)***

3) Scriviamola utilizzando la definizione di accelerazione in funzione della variazione di velocità:

$\overline{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\boldsymbol{d\bar{v}}}{\boldsymbol{dt}}$ cioè: l'accelerazione è definita come la variazione della velocità (***dv***) misurata in un certo intervallo di tempo (***dt***), quando l'intervallo di tempo diventa molto piccolo (è la definizione di "derivata di v rispetto a t").

Quindi posso scrivere: $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \dfrac{\boldsymbol{d\bar{v}}}{\boldsymbol{dt}}$, questa relazione è vera, ma solo se si suppone che ***m*** rimanga costante durante il moto, cosa che non è sempre vera. Per considerare anche il caso in cui ***m*** possa variare portiamo ***m*** "dentro" la variazione (è un'operazione matematica che si può fare). Avremo quindi:

$\overline{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\boldsymbol{d(m \cdot \bar{v})}}{\boldsymbol{dt}}$, la grandezza $\boldsymbol{m \cdot \bar{v}}$ è una nuova grandezza chiamata "impulso" o quantità di moto del corpo,l'impulso è indicato con la lettera ***p***, ed è un vettore che ha la stessa direzione di v, e il modulo uguale al prodotto m·v :

Definizione: grandezza impulso o quantità di moto di un corpo: la quantità di moto di un corpo è il prodotto della sua massa per la sua velocità. $\overline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$.

Se il corpo è esteso come velocità si considera quella del centro di massa, o baricentro.

Quindi il II principio lo scriveremo così:

Il secondo Principio scritto bene: $\overline{F} = \dfrac{d\overline{p}}{dt}$

questa forma è più completa, infatti posso scriverla come:

$$\overline{F}_e = \frac{d\overline{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \overline{v})}{dt} = m\frac{d\overline{v}}{dt} + \overline{v}\frac{dm}{dt}$$

Cioè: la forza ***F*** può essere legata ad una variazione della velocità del corpo oppure ad una variazione della massa del corpo. Ma anche la velocità è composta da due termini (modulo e direzione), quindi la formula completa diventa:

$$\overline{F}_e = \frac{d\overline{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \overline{v})}{dt} = m\frac{d\overline{v}}{dt} + \overline{v}\frac{dm}{dt} = m\frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} + \overline{v}\frac{dm}{dt} = m \cdot v\frac{d\hat{v}}{dt} + m \cdot \hat{v}\frac{dv}{dt} + \overline{v}\frac{dm}{dt}$$

ho tre termini la cui causa deve essere una forza $F \neq 0$:

1) $m \cdot v\dfrac{d\hat{v}}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare la direzione della velocità.

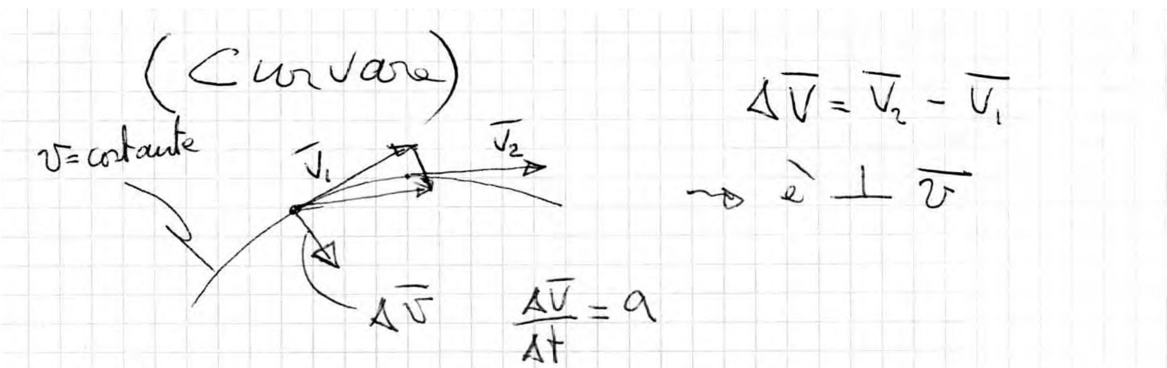
2) $m \cdot \hat{v}\dfrac{dv}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare il modulo della velocità.

3) $\overline{v}\dfrac{dm}{dt}$ ci dice che serve una Forza per variare la massa di un corpo.

Queste tre relazioni si possono leggere anche nel senso inverso; ad esempio la terza ci dice che se varia la massa di un corpo, allora ho una forza verso l'esterno (l'aereo a reazione, che manda fuori "combustibile" e viene spinto in avanti).

Nota 1

Quando ho un corpo che ruota su di un'orbita curva con velocità **costante in modulo**, la sua accelerazione, cioè la variazione della sua velocità, non è nulla, è legata alla variazione della direzione della velocità, che è perpendicolare alla direzione della velocità stessa, quindi è diretta verso il centro della circonferenza (della circonferenza che descrive il tratto di curva).



Per far ruotare un sasso intorno a noi dobbiamo tenerlo con una corda e tirare (esercitare una forza costante), se non esercitiamo più la forza, lasciando il filo, il corpo prosegue...per la tangente, cioè smette di curvare e va dritto secondo quanto previsto dal primo principio. Poi magari cade, perché in verticale esiste la forza di gravità che lo tira verso il basso.

Questo vale anche per la Luna che ruota in torno alla Terra, per la Terra che ruota intorno al sole.

Nota 2

Perché è importante usare la forma del secondo principio della dinamica in cui c'è l'impulso *p*.

Il secondo principio, scritto in funzione della massa m, perde significato se m=0, cioè nel caso di corpi con massa nulla.

Questo caso non creava problemi a Newton, a Galileo...non essendo previsti da nessuna teoria corpi di massa nulla.

Ma agli inizi del '900 con la teoria della Relatività speciale, e poi con la meccanica quantistica, viene "scoperto"(definito?) il fotone (particella di massa nulla che trasporta il campo elettromagnetico) un oggetto che viaggia sempre alla velocità della luce. Ma questo "oggetto" strano, il fotone, trasporta Energia (il Sole ci scalda!!!) ed ha anche un impulso o una quantità di moto.

Ma come è possibile che un fotone abbia una quantità di moto diversa da zero se ha massa nulla?

La differenza è che in relatività la definizione di "quantità di moto" viene modificata rispetto alla definizione semplice data in meccanica classica.

In relatività si può esprimere la quantità di moto di un corpo così:

$$\overline{p} = \frac{E \cdot \overline{v}}{c^2}$$

dove ***E*** è l'energia totale del corpo, ***v*** la sua velocità, e ***c*** è la velocità della luce nel vuoto.

Così, se, per esempio, ho un fotone di energia ***E***, che viaggia nel vuoto, quindi con velocità c, la sua quantità di moto sarà ***p=E/c***. [5]

Nota 3

Cosa succede se un corpo non è a simmetria sferica, oppure non è "piccolo"?

Si ha semplicemente che la legge ***F=ma*** continua a valere, ma è riferita ad un punto particolare del corpo: il centro di massa, o baricentro.

Il centro di massa si muoverà quindi seguendo il secondo principio. Poi il corpo potrà avere altri moti più complicati, per esempio potrà ruotare intorno a se stesso, potrà vibrare come una molla... tutti moti governati da altre equazioni del moto che si aggiungono (NON sostituiscono) al secondo principio.

Nota 4

Non tutte le grandezze sono sommabili.

La velocità, lo spostamento, la massa...si sommano

Se mi sposto di x_1= 2 m e poi di x_2=3 m, in totale mi sarò spostato di $x=x_1+x_2$= 5 m

Se ho due masse m_1= 2 kg e m_2=3 kg, e le metto insieme, in totale avrò una massa $m=m_1+m_2$= 5 kg

---

[5] Nota, questa quantità di moto è mooooolto piccola. Supponiamo di considerare i fotoni delle onde elettromagnetiche emesse da un cellulare.
L'energia dei fotoni è legata alla loro frequenza, cioè ***E=hυ,*** dove h è la costante di Planck ***h=6,6·10^-34^ J/s***, e ***ν*** è la loro frequenza, che nel caso di un fotone che viene dal Sole, è circa ν=700THz=$7\cdot10^{14}$Hz. Di questi fotoni prendiamone N= 1 miliardo di miliardi (10^{18}). Tutti questi fotoni avranno quindi un impulso ***p =Nhυ/c=*** $\boldsymbol{10^{18}\cdot6{,}6\ 10^{-34}\cdot7\ 10^{14}/3\ 10^{8}\cong1{,}5\ 10^{-9}}$ ***kgm/s***. Per fare un confronto calcoliamo la quantità di moto di una pallina da ping pong di 10 grammi che cade da 1 metro di altezza... viene che $p = m\sqrt{2gh} = 0{,}045\ kgm/s$, cioè la pallina ha un impulso ***p/p(fotoni)=0,045/1,5*** $\boldsymbol{10^{-9}\cong30\cdot10^{6}}$, cioè circa 30 milioni di volte più grande di quello di un miliardo di miliardi di fotoni che arrivano dal Sole.

La temperatura: NO

Se ho due litri di acqua, uno a T=20 ^{0}C, ed un altro a T=100 ^{0}C, e li metto insieme, non avrò certo due litri di acqua a 120 ^{0}C, ma due litri di acqua a T= (20+100)/2= 60 ^{0}C. Le temperature non si sommano.

Nota 5

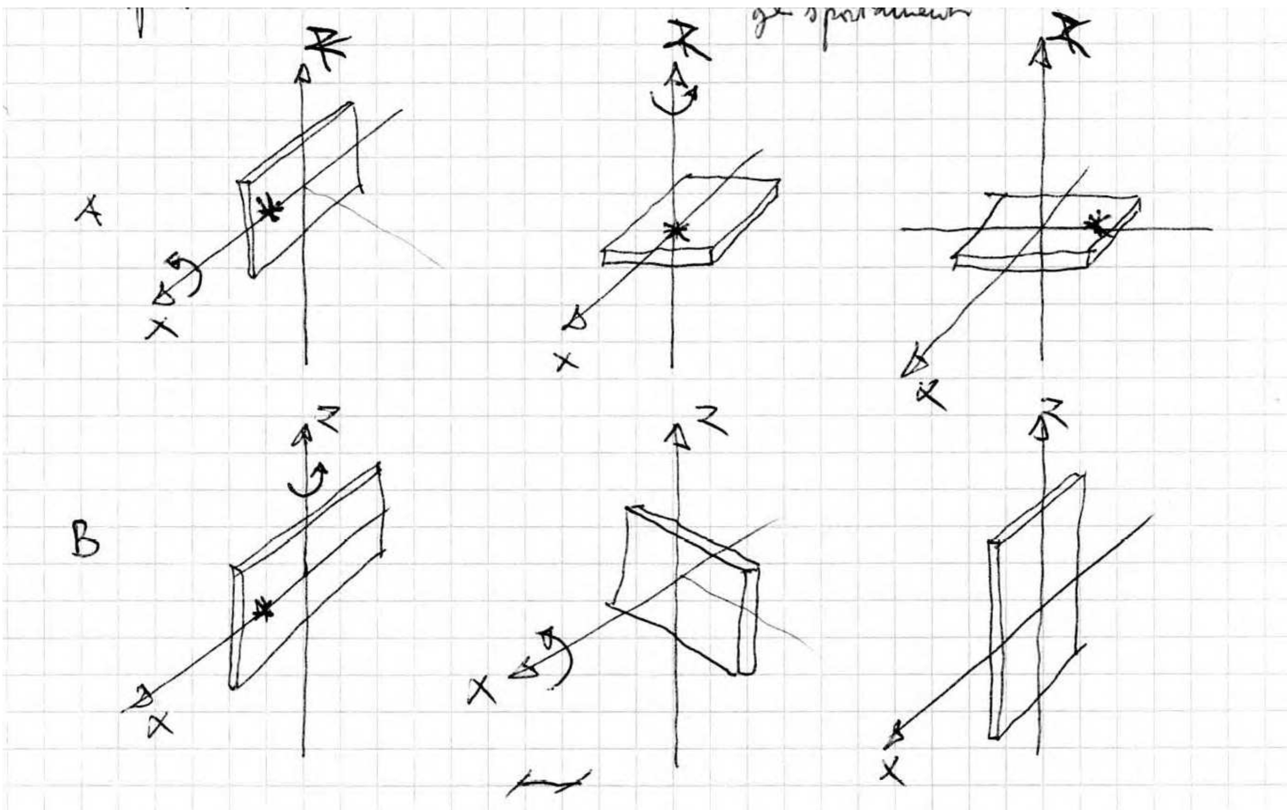
Non sempre vale la relazione A+B = B+A, cioè che sommando due oggetti, o facendo due operazioni in sequenza, il risultato non dipende dall'ordine con cui faccio le operazioni.

Questa relazione è soddisfatta per gli spostamenti, per le velocità, per le masse… in genere per i vettori "normali"; non lo è per alcuni vettori particolari, per esempio per le rotazioni.

Vediamo ad esempio cosa succede se applico due rotazioni R1 e R2 ad un libro, cambiando l'ordine con cui applico le due rotazioni:

A) Applico prima R1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90^0, poi R2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90^0.

B) Applico prima R2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90^0, poi R1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90^0.



Situazione iniziale dopo la prima rotazione dopo la seconda rotazione

Si vede che la posizione del libro nello spazio è diversa alla fine delle due rotazioni, e dipende dal'ordine con cui le ho applicate.

Il terzo principio della dinamica

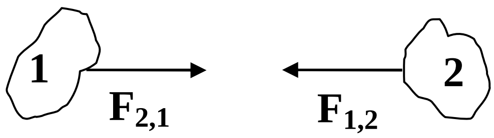
(cosa succede quando ho **DUE** corpi che interagiscono)

$$\overline{\mathbf{F}}_{2,1} = -\overline{\mathbf{F}}_{1,2}$$

Quando due corpi interagiscono, la forza che il primo corpo esercita sul secondo, è uguale ed opposta a quella che il secondo corpo esercita sul primo.

I termini: Si parla di due corpi, il corpo ***1*** e il corpo ***2***, che interagiscono tramite una forza.
Il simbolo $\overline{\boldsymbol{F}}_{2,1}$ indica la forza che il corpo ***2*** esercita sul corpo ***1***.

Esempio nel caso che la forza sia attrattiva:



Il terzo principio dice che le due forze di interazione sono uguali (i moduli, cioè i numeri proporzionali alla loro intensità, sono uguali), e hanno verso contrario.

♦ **Attenzione: si fa l'ipotesi che le due forze siano misurate nello stesso istante.**

Questa ipotesi non sarà sempre vera, in Relatività si modificherà il concetto di simultaneità, quindi la terza legge, in alcune situazioni non sarà vera se non dopo un certo tempo[6].

Nota 1: Il III Principio riguarda le forze di interazione fra i due corpi presi in esame. Questo non vuol dire che non vi possano essere altre forze, anche diverse, agenti sui due corpi. Per esempio se il corpo 1 avesse una carica elettrica, e se nelle vicinanze ci fosse un terzo corpo con una carica elettrica, il corpo 1 sentirebbe anche la forza di interazione elettrica, mentre il corpo 2 , se fosse elettricamente scarico, non la sentirebbe.

Nota 2 : Questo principio è vero sempre, non è necessario che ci si trovi in un sistema inerziale.

- **Un principio di conservazione ricavato dal III principio.**

Supponiamo che i due corpi 1 e 2 siano soggetti <u>solo</u> alle due forze di interazione reciproca.

Possiamo scrivere il secondo principio per tutti e due i corpi:

---

[6] La modifica è richiesta per tener conto del fatto, stabilito nella teoria della Relatività, che i segnali (quindi anche le interazioni) non possono trasmettersi a velocità maggiori di quella della luce c nel vuoto. Questo vuol dire che se il corpo 1 si sposta o si modifica, il suo effetto sul corpo 2, che si trova a distanza ***R*** dal primo, non potrà avvenire prima di un tempo $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_c} = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{c}$. Dopo questo tempo potremo scrivere la terza legge, ma dopo aver aspettato il tempo necessario perché i due corpi si trasmettano la variazione dell'interazione. Quindi la terza legge è valida se aspettiamo il tempo necessario perché i sistema si scambino le interazioni. Questo tempo può essere al minimo $\boldsymbol{t_c}$, ma anche molto maggiore, dipende dal mezzo in cui si deve trasmettere l'interazione e dal tipo di interazione.

$$1.\quad \overline{F}_{2,1} = m_1 \cdot \overline{a}_1 \ , \ \text{ o meglio}: \quad \overline{F}_{2,1} = \frac{d\overline{p}_1}{dt}$$

$$2.\quad \overline{F}_{1,2} = m_2 \cdot \overline{a}_2 \ , \ \text{ o meglio}: \quad \overline{F}_{1,2} = \frac{d\overline{p}_2}{dt}$$

ora, se sommiamo le relazioni 1. e 2. che si riferiscono al corpo 1 e al corpo 2, avremo che:

$\overline{F}_{2,1} + \overline{F}_{1,2} = \frac{d\overline{p}_1}{dt} + \frac{d\overline{p}_2}{dt}$ ma, per il Terzo Principio della dinamica, il termine a sinistra è nullo, essendo le due forze uguali e contrarie, mentre il termine a destra rappresenta semplicemente la somma delle due quantità di moto, quindi la quantità di moto totale p_T del sistema;

$$0 = \frac{d\overline{p}_1}{dt} + \frac{d\overline{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{p}_1 + \overline{p}_2\right) = \frac{d\overline{p}_T}{dt}$$

se la sua derivata è nulla, cioè la sua variazione nel tempo è zero, allora vuol dire che la grandezza è costante:

$$0 = \frac{d\overline{p}_T}{dt} \Rightarrow \overline{p}_T = \text{costante},$$

che è valida se non esistono altre forze oltre a quelle di interazione fra le varie parti del sistema.
Quindi un altro modo di enunciare il terzo principio della dinamica è:

In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva (è costante).

Relatività e Invarianza galileiana

Le ipotesi e le leggi su cui si basa la Dinamica Classica:
- L'isotropia e l'omogeneità dello spazio euclideo, e del tempo.
- Il tempo e lo spazio assoluti.
- I tre principi della dinamica.

- **La relatività galileiana:**

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

♦ Per "forma" si intende la forma algebrica, e il significato dei termini, non quello che succede.

Quindi, per esempio, in un qualunque sistema di riferimento inerziale posso scrivere il secondo principio della dinamica ***F = ma***, dove ***F*** e ***a*** sono misurate nel sistema in oggetto.

♦ **Nota:** Quando scrivo una legge, una relazione (***F=ma***), e devo misurare e calcolare le grandezze che compaiono nella formula, ho sempre almeno **due** "oggetti" che sto considerando:

1) Il corpo o il sistema fisico in esame.
2) Il valore della misura delle grandezze che descrivono il corpo → **(**chi fa la misura ideale) → Il sistema di riferimento rispetto a cui il corpo viene misurato.

- **L' Invarianza galileiana:**

Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a trasformazioni galileiane.

Definizione: Trasformazione di coordinate, una trasformazione è un insieme di relazioni che permettono di passare dal valore delle coordinate(della posizione) di un punto in un certo sistema di riferimento al valore delle coordinate che **lo stesso punto** assume in un altro sistema di riferimento.

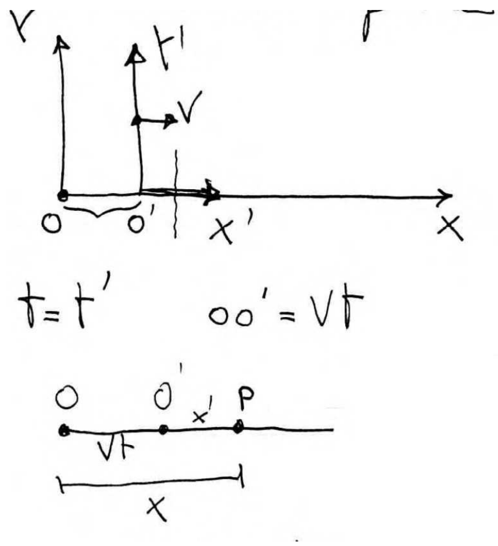
In generale la trasformazione è definita fornendo le relazioni che permettono di passare dai valori (x, y, z, t) che definiscono la posizione nello spazio nel tempo di un punto P in un sistema di riferimento O, ai valori (x', y', z', t') che descrivono lo stesso punto nel sistema O'.

- **Trasformazioni galileiane**

Definizione: una trasformazione galileiana è una trasformazione di coordinate che permette di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema che abbia una velocità ***V*** costante rispetto al primo.

Esempio:
Il caso particolare di due sistemi ***O(x,y,z,t)*** e ***O'(x',y',z',t'),*** in cui le origini ***O*** ed ***O'*** e gli assi ***x,y,z*** e ***x',y',z'*** all'istante t=0 coincidano, ed in cui uno dei due (O') si muova di moto rettilineo uniforme rispetto all'altro (O), con velocità ***V***, in direzione ***x.***

Tempi: Si assume che le due origini (O e O') coincidano al tempo ***t=0, t'=0***. Data l'ipotesi di "tempo assoluto" che vale per tutta la meccanica classica $\Delta t=\Delta t'$. Quindi, se coincidono anche le origini dei tempi misurati nei due sistemi di riferimento, si avrà che ***t=t'***.



Spazi : (vedi figura)

La posizione del punto P, ad un certo istante t=t' sarà x rispetto ad O, e x' rispetto ad O'.

$$\boldsymbol{x = OP \ , \ x' = O'P \ ,} \text{ inoltre si ha che : } \boldsymbol{OO' = V \cdot t}$$

$$\text{quindi, dato che } \quad \boldsymbol{OP = OO' + O'P,}$$

$$\text{si avrà che } \boldsymbol{x = V \cdot t + x'}$$

Le

Le trasformazioni per passare dal sistema O(x,y,z,t) al sistema O'(x',y',z',t'), e viceversa, sono quindi:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x' + V \cdot t} \\ \boldsymbol{y = y'} \\ \boldsymbol{z = z'} \\ \boldsymbol{t = t'} \end{cases}$$

Dalle trasformazioni di coordinate posso ricavare le leggi di trasformazione per le altre grandezze; per esempio per la velocità:

$$\text{dalla trasformazione : } \boldsymbol{x = x' + V \cdot t} \ \boldsymbol{,} \text{ se derivo rispetto al tempo t ottengo :}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V} \quad \text{da cui, } \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V,} \quad \text{quindi :}$$

$$\boldsymbol{v = v' + V} \quad \text{e, derivando ancora, ottengo le accelerazioni :}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v' + V\right) = \frac{dv'}{dt}} + 0 = \boldsymbol{a'}$$

Da cui si vede che, mentre le velocità cambiano nei due sistemi di riferimento (la velocità è relativa), le accelerazioni sono le stesse.

Le velocità invece si sommano seconda la: $\boldsymbol{v[P(O)] = v'[P(O')] + V[O'O]}$

Forze:

Come si trasforma la Forza? Dall'ipotesi di relatività ho che ***F'=m'a'*** ; nella fisica classica la massa si assume indipendente dalla velocità, quindi ***m=m'***.

Dalla relazione mostrata sopra abbiamo inoltre che ***a=a'***, quindi avremo:

F' = m'a' = ma = F

Le forze, in due sistemi di riferimento inerziali, sono uguali: ***F=F'***; gli osservatori di tutti i sistemi di riferimento inerziali misureranno quindi le stesse forze e le stesse accelerazioni.

Le Leggi di Keplero

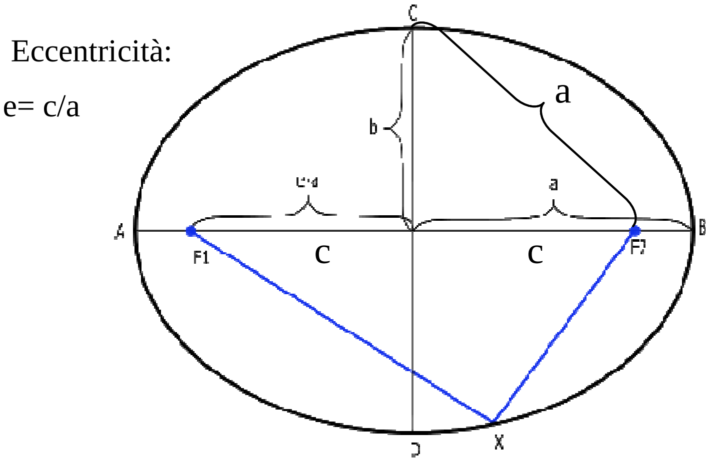
Keplero scrive, fra il 1609 e il 1618, tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al sistema solare. Le leggi sono inferite utilizzando i dati di misurati con grande precisione dal suo maestro, Tycho Brahe, negli ultimi decenni del 1500.

1) **I pianeti si muovono secondo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.**
2) **Per ogni pianeta il raggio [sole-pianeta] descrive aree uguali in tempi uguali.**
3) **Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo dell'asse maggiore ha lo stesso valore per tutti i pianeti - è una costante -.**

NOTA MATEMATICA: L'Ellisse

L'ellisse è la curva del piano descritta da un punto tale che la somma delle distanze dal punto e da due punti fissi (i fuochi) sia costante.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente ***a*** e ***b*.** La costante ***a*** è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante ***b*** è la lunghezza del semiasse minore.



L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico P (x; y) e il doppio del semiasse maggiore. $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $c = \sqrt{a^2-b^2}$ e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani x-y con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse è definito dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \\ 0 \le\ & t < 2\pi \end{aligned}$$

La **forma** di un'ellisse è espressa da un numero detto **eccentricità** dell'ellisse, convenzionalmente denotata da ***e*** (da non confondere con la costante matematica e=2,72...). L'eccentricità è legata ad *a* e *b* dall'espressione ***e = c/a*** ed è un numero positivo compreso tra 0 e 1. Se e è uguale a 0, l'ellisse degenera in una circonferenza, se è uguale a 1 degenera in una retta. Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra ***a*** e ***b***, quindi l'ellisse sarà più allungata. La distanza tra i due fuochi è 2*c*.

Il semilato retto di un'ellisse, solitamente denotato dalla lettera *l*, è la distanza tra il fuoco dell'ellisse e l'ellisse stessa misurata lungo una linea perpendicolare all'asse maggiore. È legata ad *a* e *b* dalla formula $al = b^2$.

In coordinate polari, un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione:

$r(1 + e \cos\theta) = l$

L'area racchiusa da un'ellisse è $S=\pi ab$. La lunghezza della circonferenza è $c=4aE(e)$, dove la funzione *E* è l'integrale ellittico del secondo tipo.

PIANETA	**A (UA)**	**Periodo (10^7s)**	**e**
Mercurio	0,387	0,76	0,205
Venere	0,723	1,94	0,006
Terra	1	3,16	0,016
Marte	1,523	5,94	0,093
Giove	5,202	37,4	0,048
Saturno	9,554	93,0	0,055
Urano	19,218	266	0,046
Nettuno	30,109	5200	0,008
Plutone	39,60	7820	0,246

L'eccentricità dell'orbita della Terra oggi è 0.0167. Nel tempo l'eccentricità dell'orbita terrestre varia lentamente come risultato dell'attrazione gravitazionale tra i pianeti.

Note alle tre leggi:

1) Le ellissi, per quasi tutti i pianeti, sono delle ellissi...molto poco ellittiche, l’orbita è in realtà molto vicina ad una circonferenza.

In figura 1 sono state sovrapposte una circonferenza (traccia nera, e=0) ed un’ellisse con e=0,08 (traccia rossa), quindi più “ellittica” della maggior parte dei pianeti.

Fig.1 Ellisse con e=0,08 e circonferenza (e=0).

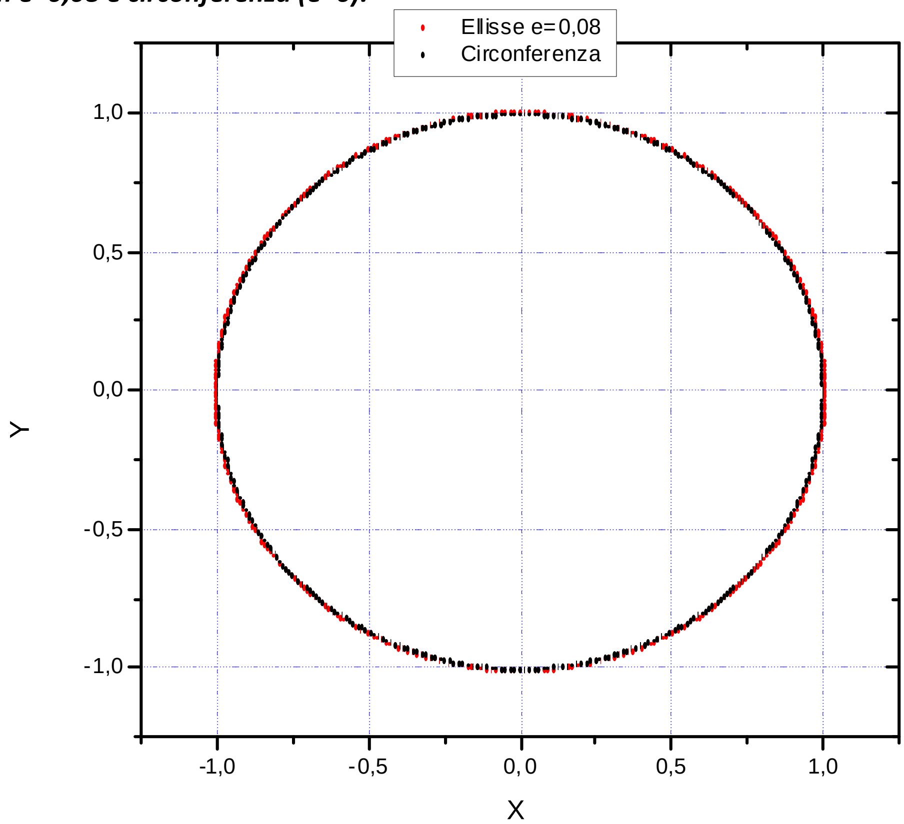
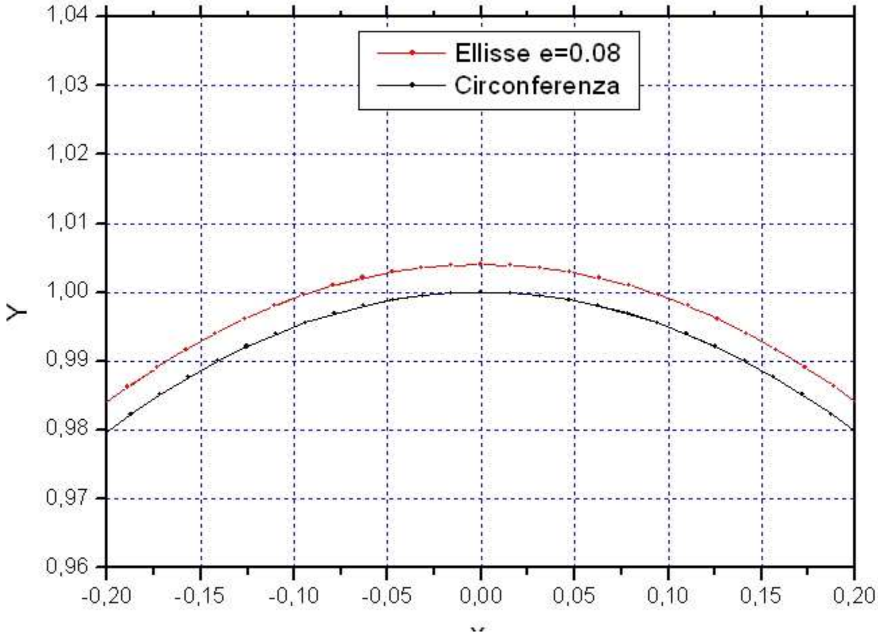


Fig.2



Nella figura 2 è mostrato un ingrandimento della parte superiore della figura 1, in cui si può valutare la differenza fra le due curve. La distanza dal centro delle due figure (il raggio) è 1 (esatto) per la circonferenza, e 1.004 per l'ellisse. Quindi la variazione percentuale del raggio è:

$$\frac{\boldsymbol{R_e} - \boldsymbol{R_c}}{\boldsymbol{R_c}} = \frac{1{,}004 - 1}{1} = 0{,}004 = \frac{4}{1000} = 0{,}4\%$$

si ha cioè una variazione dello 0,4 %.

Questo vuol dire che, per apprezzare questa variazione, devo essere in grado di fare delle misure con una precisione almeno 10 volte migliore, quindi serve una precisione dello 0,04% cioè di 4 parti su 10'000. E' equivalente a misurare la distanza di un metro con la precisione di 0,4 mm cioè di meno di mezzo millimetro.

Questa, circa, è la precisione necessaria nella misura della posizione del pianeta se si vuole distinguere l'orbita circolare da quella ellittica.

2) La seconda legge, detta con altre parole, ci dice come cambia la velocità del pianeta lungo l'orbita, che quindi non è costante. La velocità è maggiore quando il pianeta è più lontano e minore quando è più vicino. Come nel caso precedente questa differenza è molto piccola, proprio perché l'orbita è quasi circolare, quindi le distanze minime e massime sono circa uguali, e quindi anche le velocità.

3) La terza legge fu scoperta da Keplero che cercava un rapporto "pitagorico" (cioè una frazione fra numeri semplici) fra il valore del periodo di rivoluzione e quello dell'asse maggiore. E' un caso che poi quello giusto fosse effettivamente 3/2. Non sempre la natura è così benigna da essere descritta da formule e numeri "semplici".

Principi/ Leggi/ Leggi fenomenologiche

I principi, le leggi generali e le leggi fenomenologiche hanno diversa origine, diversa importanza e diverso potere predittivo. Consideriamone tre: il secondo principio della dinamica, la legge di gravitazione universale e le leggi di Keplero.

- **F=ma** (Newton, 1687): E' un principio, forse IL PRINCIPIO. Un principio vale sempre, per ogni sistema, a parte il limite al sistema di riferimento in cui vengono misurate le grandezze coinvolte, è la forma più generale che posso dare ad una legge.

- **Legge di Gravitazione Universale** (Newton, 1687):

$$\boldsymbol{F_G} = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2}{\boldsymbol{R}^2}$$

- Dare la forma matematica della forza permette di fare previsioni utilizzando il secondo principio della dinamica:

[Legge di gravitazione universale] + [***F=ma***] permettono di calcolare le accelerazioni, le velocità e le traiettorie di qualunque oggetto che si muova sotto l'azione della Forza gravitazionale.

- **Leggi di Keplero** (1609-1618): sono leggi fenomenologiche, cioè ricavate dai dati, descrivono matematicamente un particolare fenomeno, non è detto che possano essere utilizzate per descrivere altri sistemi, ma posso utilizzarle per verificare (falsificare) un'ipotesi, per esempio la validità di una legge più generale.

Nota:
Conoscendo ***x(t)*** posso calcolare ***a(t),*** e viceversa:
- Diretto: misura [x(t), t]
  - calcolo v(t)= $\frac{dx}{dt}$ da cui → $[v(t),t]_m$
  - calcolo a(t)= $\frac{dv}{dt}$ da cui → $[a(t),t]_m$
  - → inferisco e calcolo F(t) = a(t)/m

- Inverso: (prevedo – calcolo) $(a, t)_c$
  - calcolo v(t): $\boldsymbol{v(t)_c = \int a(t)_c dt}$
  - calcolo x(t): $\boldsymbol{x(t)_c = \int v(t)_c dt}$
  - verifico se $(x(t), t)_m$ misurato = $(x(t),t)_c$ calcolato

♦ **Principio di Equivalenza** (A. Einstein 1916)

Relatività Generale: Accelerazione ≡ Gravità
[da Wikipedia]

Ci sono due versioni del **principio di equivalenza**, entrambe dovute ad Albert Einstein:
- la versione *forte* afferma che in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale scegliere un intorno di un punto in cui gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- quella *debole* asserisce che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali.

Gli appellativi di forte e debole si giustificano dal momento che se vale il principio di equivalenza nella forma forte deve valere anche quello nella forma debole, mentre da un punto di vista logico l'implicazione non è reversibile. Questa caratteristica fa sì che, anche se il principio in forma debole è stato sperimentalmente confermato con precisione elevatissima, ciò non è sufficiente a garantire lo stesso grado di certezza anche alla forma forte, che deve essere dunque considerata ancora come un postulato.

Dal secondo principio della dinamica ho:

$\mathbf{F} = \mathbf{m_i}\, \bar{a}$ dove $\mathbf{m_i}$= massa inerziale

e dalla legge di gravitazione universale:

$\mathbf{F_G} = \mathbf{G}\, \frac{m_G m_2}{R^2}$ dove $\mathbf{m_G}$ = massa gravitazionale

Il Principio di equivalenza pone:

$$\mathbf{m_i} = \mathbf{m_G}$$

Come si “verifica”? Misurando gli effetti inerziali e gravitazionali sullo stesso corpo:

$m_i = \frac{\bar{F}}{\bar{a}}$ (molla) ; $m_G = \frac{F_G R^2}{G m_T}$ (m_T= massa terra) (caduta libera – pendolo - bilancia di torsione)

Per approfondire e per il dettaglio sul funzionamento della bilancia di torsione vedi “La Fisica di Berkeley”, Meccanica, Cap. 14, Principio di equivalenza.

- Test sperimentali del Principio di equivalenza:

autore	*anno*	*metodo*	*incertezza relativa*[7]
• Galileo Galilei	1590	caduta libera	2×10^{-2}
• Newton	1686	pendolo	$\sim 10^{-3}$
• Eötvos	1922	bilancia di torsione	5×10^{-9}
• Dicke et al.	1964	bilancia di torsione	3×10^{-11}
• Adelberger et al.	2008	bilancia di torsione	3×10^{-14}

Pendolo: il periodo di oscillazione di un pendolo di lunghezza L, massa $m_{G,i}$, posto sulla terra, in luogo dove l’accelerazione gravitazionale è **g** vale:

$$\boldsymbol{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\boldsymbol{m_G}}{\boldsymbol{m_I}}\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{g}}}$$

[7] Per incertezza relativa si intende il valore dell’incertezza relativa nella valutazione della grandezza $R=m_i/m_G$ (che è circa uguale a 1),quindi $\Delta R/R$.

♦ I fotoni in un campo gravitazionale

Cosa succede per i fotoni?
Il fotone ha massa nulla; dalle formule della teoria della relatività si ha:

$\mathbf{E}^2 = \mathbf{p}^2\mathbf{c}^2 + \mathbf{M}^2\mathbf{c}^4$ dove M è la massa a riposo, per il fotone (M = 0) si ha quindi :

$\mathbf{E} = \mathbf{pc},$ ma anche $\mathbf{E} = \mathbf{h}\nu,$ da cui si ha : $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{h}\nu}{\mathbf{c}},$

quindi un fotone ha massa inerziale, equivalente alla sua energia E : $\mathbf{m_I} = \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{h}\nu}{\mathbf{c}^2} = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{c}^2}$

Un fotone di frequenza ν che "cade" sulla Terra per un'altezza ***h***, aumenterà la sua frequenza secondo la relazione:

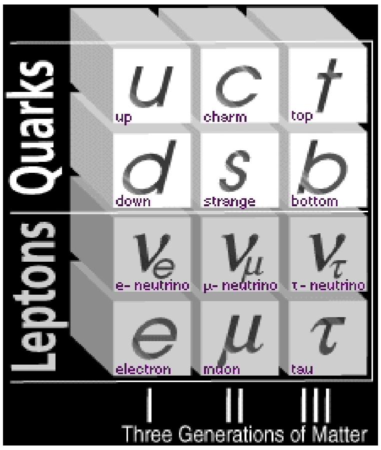
$$\boldsymbol{h}\nu' = \boldsymbol{h}\nu + \frac{\boldsymbol{h}\nu}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{gh}$$

Le misure hanno confermato il calcolo.

The STANDARD MODEL

Particelle materiali elementari

[Leptoni – Quarks]



Le tre generazioni (famiglie)

Particelle mediatrici di Forze

[γ ; Z, W^+, W^-, g ; gravitone]

Elettrodebole			Forte o di colore		
bosone	massa (GeV/c^2)	carica elettrica	bosone	massa (GeV/c^2)	carica elettrica
γ	0	0	gluone	0	0
W^+	80	+1			
W^-	80	-1			
Z^0	91	0			

spin = 1

I famiglia: particelle stabili, formano la materia dell'Universo.
II e III famiglia: instabili, decadono in particelle della I famiglia.

I LEPTONI:

	sapore	massa (GeV/c^2)	carica elettrica
ν_e	neutrino e	$< 7 \times 10^{-9}$	0
e^-	elettrone	.000511	-1
ν_μ	neutrino μ	< .0003	0
μ^-	muone	0.106	-1
ν_τ	neutrino τ	< .03	0
τ^-	tau	1.7771	-1

La carica elettrica è misurata rispetto alla carica del protone.

I QUARKS :

Sapore	Massa (GeV/c^2)	Carica elettrica
u up	.005	+2/3
d down	.01	-1/3
c charm	1.5	+2/3
s strange	0.2	-1/3
t top	180	+2/3
b bottom	4.7	-1/3

La carica elettrica si intende misurata rispetto alla carica unitaria del protone.

Il modello a tappi, per i quarks:

Particelle materiali non elementari:

barioni = qqq*	quark	carica elettrica	massa (GeV/c^2)	spin
p protone	u u d	+ 1	0.938	1/2
$\bar{p}$ antiprotone	$\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$	- 1	0.938	1/2
n neutrone	u d d	0	0.940	1/2
Λ^0 lambda	u d s	0	1.116	1/2
Ω^- omega	s s s	- 1	1.672	3/2
Σ_c sigma-c	u u c	+ 2	2.455	1/2
e tanti altri ...				

mesone = $q\bar{q}$	quark	carica elettrica	massa (GeV/c^2)	spin
π^+ pione	u $\bar{d}$	+ 1	0.140	0
K^- kaone	s $\bar{u}$	- 1	0.494	0
K^0 kaone	d $\bar{s}$	0	0.498	0
ρ^+ rho	u $\bar{d}$	0	0.770	1
D^+ D	c $\bar{d}$	+ 1	1.869	0
η_c eta-c	c $\bar{c}$	0	2.980	0