Calcolo della Massa della Terra dalla misura di g

La forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su di una massa ***m***, sulla sua superficie, è:

$F = G\dfrac{mM_T}{R_T^2}$ dove ***G*** è la costante di gravitazione universale***, M***M_T la massa della Terra, R_T il raggio terrestre.

Usualmente si scrive il "peso" di una massa come: $F = m \cdot g$

L'accelerazione gravitazionale ***g*** è dunque $g = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$, e la massa M_T può essere calcolata dalla relazione:

$M_T = \dfrac{g \cdot R_T^2}{G}$. Per calcolare la Massa della Terra servono quindi i valori delle tre grandezze ***G, R_T , g.***

Tutte e tre le grandezze si possono misurare. Voi misurerete ***g***, assumendo come noti i valori di ***G e*** R_T.

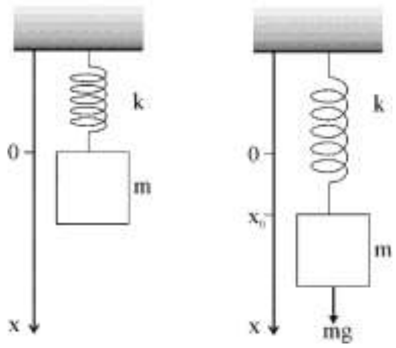
I valori da inserire nella formula per trovare la massa M_T sono:

R_T = 6314 km, trovato da Eratostene nel 240 a.C

G = 6,7 10^{-11} S.I., trovato da H. Cavendish nel 1798.

g = il valore trovato da voi.

Misura di g utilizzando una molla e dei pesi – Teoria



In condizioni di equilibrio la massa m appesa alla molla, di costante elastica **k**, la allunga di x_0 rispetto alla posizione di equilibrio senza massa appesa.

Se si sposta **delicatamente** la massa dalla posizione di equilibrio, e la si lascia andare, la massa comincia ad oscillare verticalmente, con un moto armonico di periodo **T.**

Le relazioni matematiche fra le masse, gli allungamenti, le durate dei periodi, la costante k della molla e g sono:

$$x(m) = \frac{g}{k} \cdot m = a \cdot m$$

$$m_e(T) = \frac{k}{(2\pi)^2} \cdot T^2 = b \cdot T^2$$

Dove le grandezze misurate sono:

m = la massa dei pesi appesa alla molla ; **x(m)** l'allungamento corrispondente ; **T=** il periodo di oscillazione con la massa **m** appesa.

m_e **=** massa equivalente della molla + i pesi = **m(pesi)+m_s(massa del supporto)+m_{sl}(massa delle spire fissate al supporto in basso)+ m_m(massa delle spire libere della molla)/3**

quindi: $$m_e = m_p + m_s + m_{sl} + \frac{m_m}{3}$$

Le grandezze incognite (da trovare), sono: **g**= l'accelerazione di gravità, **k=** la costante elastica della molla.

Operazioni preliminari

- Identificare i 10 dischi di Piombo (penna, segno col pennarello...)
- Appendere almeno 5 dischi al supporto e contare il numero delle spire "libere" e di quelle fissate al supporto inferiore (numero frazionario ± ¼ di spira).
- Scrivere i seguenti dati sul quaderno: ♦ Numero di spire della vostra molla (libere e fissate).

♦ Massa di n spire (vedi dopo). ♦Massa del supporto (vedi dopo).

MISURE da fare

Pesare i gruppi di masse. Mettere i gruppi di masse $\mathbf{m_i}$ (di cui avete già misurato la massa) sul supporto della molla; prima 3 dischi (m_3), poi 4 dischi(m_4), 6 dischi(m6), 8 dischi(m_8),…10 dischi. Per ogni gruppo di masse vanno eseguite due misure:

- l'allungamento $\mathbf{x_i}$ della molla a riposo.
- n periodi di oscillazione [n=5-10] $\mathbf{T_n} = \mathbf{nT_i}$. Per ogni massa rifare la misura almeno 3 volte.

ELABORAZIONE

- Riportare su di un grafico **lineare** le coppie **(m_i, x_i);** m in orizzontale, x in verticale.
- Subito (in laboratorio):
  - Tracciare la retta migliore ad occhio che passa per i punti sperimentali.
  - Calcolare il coefficiente angolare ***a =Δg/Δk*** della retta, che sarà uguale a ***g/k***.
  - Dovrebbe venire circa ***0,19<a<0,27*** [m/Kg]. Se è molto al di fuori dell'intervallo indicato vuol dire che è stato commesso un errore grossolano in qualche misura, o in qualche unità di misura, o nel riportare i punti sul grafico, o nel valutare il coefficiente angolare.
- A casa:
  - Per ogni massa calcolare il valor medio del periodo T_i (T è il periodo di 1 oscillazione, quindi se ne avete misurate 10 il periodo sarà T(1 oscillazione)=T(10 oscillazioni)/10 , facendo la media aritmetica dei valori ottenuti.
  - Riportare su di un grafico **lineare**, le coppie **(T^2(i)), m_i);** T^2 in orizzontale, m in verticale.
  - Calcolare il coefficiente angolare ***b=*** **Δm/(ΔT^2)** e da questo la costante elastica della molla:
    $$\mathbf{k= b \cdot (2\pi)^2= b\cdot 4\cdot\pi^2= b\cdot 4\cdot\pi^2 \cong b\cdot 4\cdot 10 = b\cdot 40} \quad [\mathrm{N/m}]$$
  - Utilizzare il valore di ***k*** per calcolare ***g= a · k***

Caratteristiche della molla utilizzata: (le incertezze sono deviazioni standard)

Massa della molla: m_m(N=**97 spire**) = 26,6 ± 0,1 g PER **97 SPIRE**! Per calcolare la massa delle vostre n spire dovete fare una proporzione [m(n spire): m(1 spira) · n = [m(97spire)/97]·n]
Massa del supporto per i Piombi: m_s = 33,3 ± 0,3 g

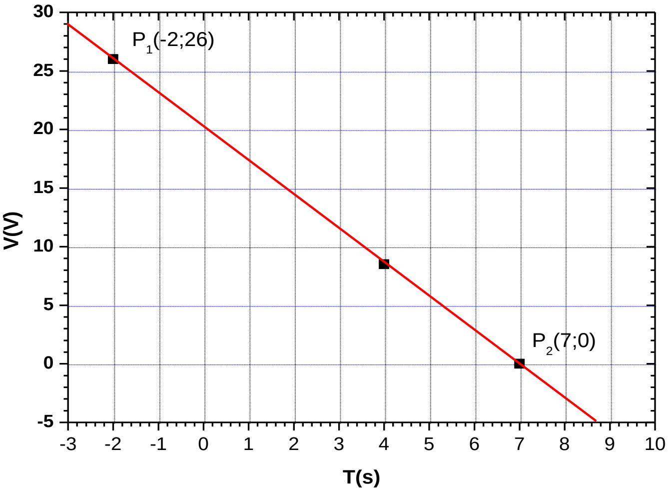
Calcolo dei parametri per una funzione del tipo: y(x)=ax+b ; a=coefficiente angolare ; b=termine noto
a= Δy/Δx, (è il caso in cui i punti sperimentali stanno su di una retta in scala lineare)

Esempio(vedi grafico): si scelgono due punti della retta "lontani",(il calcolo è più preciso), es. P_1 e P_2:

- Calcolo di ***a***, utilizzando i due punti P_1(-2,26) , P_2(7,0) :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-26}{7+2} = \frac{-26}{9} \cong -2{,}9 \quad \text{V/s}$$

- La costante ***b*** si trova leggendo direttamente sul grafico il valore di ***y*** per ***x=0*** ***b=y(0)=20,5 V***



♋ La massa della terra è $M_T \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg.