CARLO COSMELLI

PRINCIPI DI FISICA

(PER FILOSOFI)

PARTE I

MECCANICA CLASSICA

1. I Fondamenti della Meccanica Classica

1.0 Introduzione

La meccanica classica è la parte della Fisica che si basa sui principi della Meccanica enunciati da Galileo, Newton, sviluppati successivamente con l'utilizzo del calcolo infinitesimale e le elaborazioni analitiche applicate ai principi della dinamica, principalmente da parte di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Siméon-Denis Poisson (1781–1840) e William R. Hamilton (1805-1865). Di base la meccanica classica descrive il moto di oggetti con massa, sottoposti a forze. In particolare si parla di corpi rigidi: sfere, sbarre, proiettili, corpi celesti ed altri oggetti la cui descrizione non creava grossi problemi matematici (il moto dei fluidi necessita di una trattazione più complessa), sottoposti essenzialmente solo alla forza di gravità, l'unica forza fondamentale nota fino al XIX secolo. Gli sviluppi successivi saranno la meccanica dei fluidi, il comportamento dei gas e degli oggetti "caldi" o "freddi", che darà origine alla Termodinamica, e gli sviluppi dell'elettromagnetismo che, introducendo forze di natura elettrica e magnetica, costituiranno il corpo della cosiddetta "Fisica classica".

Alla fine del XIX secolo sorgeranno poi alcuni fatti inspiegabili ed alcune incongruenze che daranno origine a due nuove teorie: la due teorie della Relatività: la Relatività speciale (1905) che risolverà le incongruenze dell'elettromagnetismo ed i problemi legati al moto di corpi in moto molto "veloce". E la Relatività Generale (1915) che darà una nuova visione degli effetti dovuti alla presenza di masse nello spazio. I problemi legati alla descrizione degli effetti in corpi molto piccoli, di dimensioni atomiche, verranno invece affrontati e risolti dalla Meccanica Quantistica in un percorso che, iniziato nel 1900, troverà la sua prima formalizzazione nel 1927, ma che ancora oggi continua ad essere modificata e migliorata in seguito a nuovi risultati sperimentali e nuove elaborazioni teoriche.

1.1. Ipotesi di base

In una trattazione moderna della Fisica, come di qualunque altra teoria, è importante definire bene l'ambito in cui ci si muove e le ipotesi che si prendono come vere nella descrizione dei sistemi in esame. Questa parte era spesso sottintesa nei lavori iniziali di Galileo, Newton e degli altri fisici. La sua impronta tuttavia si è rivelata essenziale man mano che la descrizione dell'Universo progrediva, contemporaneamente al nascere di nuovi aspetti e nuovi problemi.

I punti essenziali da definire sono, sembrano, semplici: dobbiamo definire lo spazio in cui ci muoviamo e il tempo. Queste definizioni, che sembreranno ovvie, saranno proprio quelle che Albert Einstein, con la sua Relatività, scardinerà completamente.

Quindi ora descriveremo le ipotesi fatte sullo Spazio e sul Tempo, come fossero necessarie per scrivere correttamente le leggi di Newton e le leggi fisiche scritte fino alla fine del XIX secolo.

1) Lo spazio è euclideo

   Lo spazio è descritto dalla geometria euclidea (lo spazio è "piatto"). Valgono tutti i principi di Euclide e tutti i teoremi derivati da essi. Quindi, per esempio, dato un triangolo nello spazio, la somma degli angoli interni deve dare sempre 180^0. Se lo spazio fosse curvo la somma degli angoli interni di un triangolo sarebbe minore, oppure maggiore di 180^0 (geometrie non-euclidee). Uno spazio euclideo (piatto) è una buona approssimazione per descrivere il mondo che ci circonda. In realtà secondo la Relatività Generale (1915) lo spazio in presenza di materia è sempre curvo, ma gli effetti sulla Terra sono quasi sempre trascurabili, quindi per ora li tralasciamo.

2) Lo spazio è isotropo e omogeneo.

   Lo spazio è identico a se stesso sia in seguito a traslazioni che a rotazioni. Le proprietà fisiche dei corpi non dipendono dalla posizione (omogeneità) o dalla direzione nello spazio (isotropia); quindi non cambiano se sposto il corpo da un punto ad un altro o se ruoto un corpo cambiando la sua direzione nello spazio. Queste ipotesi valgono ovviamente solo se tutte le altre condizioni restano identiche. Se misuro il mio "peso" sulla Luna troverò un valore diverso da quello misurato sulla Terra, ma questo effetto non è dovuto alla non omogeneità dello spazio, bensì alla presenza di corpi con masse differenti che generano una diversa forza gravitazionale. Lo spazio è identico a se stesso sia in seguito a traslazioni che a rotazioni. Le proprietà fisiche dei corpi non dipendono quindi dalla posizione o dalla direzione nello spazio, quindi non cambiano se sposto il corpo da un punto ad un altro o se misuro una certa proprietà in varie direzioni.

3) Il tempo è isotropo e omogeneo

Per direzioni nel tempo si intendono quella verso il passato e quella verso il futuro. L'omogeneità consiste nell'invarianza per traslazioni nel tempo. Quindi se non variano le condizioni, le proprietà di una grandezza non dipendono da quando le misuro. Questo è un punto fondamentale: se non ipotizzassi l'omogeneità del tempo non potrei fare previsioni sul moto, essendo le durate dei tempi variabili, e quindi anche gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni…

4) Esistono uno spazio assoluto ed un tempo assoluto, indipendenti uno dall'altro[1].

Lo spazio in cui ci muoviamo, quello in cui "esistiamo" è uno, assoluto, e serve come riferimento per qualunque evento di cui voglia misurare la posizione. Analogamente per il tempo: noi viviamo in un "tempo" che scorre ad una certa velocità immutabile e fissata. Qualunque orologio, costruito in maniera identica, misurerebbe lo stesso intervallo per un certo evento.

Nota: spazio e tempo, che in meccanica classica sono due grandezze indipendenti, in meccanica relativistica non lo sono più e si parla di spazio-tempo. Tuttavia per corpi che si muovono a velocità molto minori della velocità della luce nel vuoto (300'000 km/s), questi effetti sono trascurabili e possiamo considerare lo spazio ed il tempo come grandezze indipendenti.

Sistema di Riferimento (definizione)

Un sistema di riferimento è un insieme di coordinate utilizzabili per definire la posizione di un punto nello spazio.

Un sistema di riferimento cartesiano è un sistema di riferimento, riferito ad uno spazio tridimensionale, in cui si definisce un'origine "O", da cui partono tre assi fra loro perpendicolari (in genere chiamati x, y, z).

Questo sistema (ideale) viene considerato infinitamente rigido e indeformabile

Un sistema di riferimento cartesiano O(x, y, z) – figura 1.1

In questo sistema la posizione del punto P è definita dalle tre coordinate P (x_o, y_o, z_o).

I tre valori (x_o, y_o, z_o) sono le lunghezze dei segmenti misurati lungo i tre assi x, y, z .

Nella figura è mostrato un secondo sistema di riferimento O' (x', y', z') con l'origine nel punto P. Si noti che le coordinate del punto, cioè i tre numeri che individuano la sua posizione, sono differenti a seconda del sistema in cui vengono misurati. La posizione del punto è una sola, ma la sua rappresentazione dipende dal sistema di riferimento utilizzato. In seguito vedremo come sia possibile passare da un riferimento ad un altro.

---

[1] Nota: Spazio e Tempo, che in meccanica classica sono due grandezze indipendenti, in meccanica relativistica non lo sono più e si parla di spazio-tempo. Tuttavia per corpi che si muovono a velocità molto minori della velocità della luce nel vuoto (300'000 km/s), questi effetti sono trascurabili e possiamo considerare lo spazio ed il tempo come grandezze indipendenti.

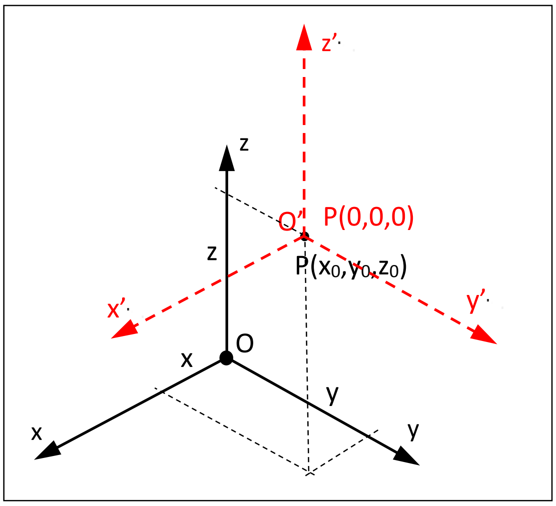


Fig. 1.1 Due sistemi di riferimento O(x,y,z) e O'(x',y',z'). Il punto P ha coordinate diverse nei due sistemi di riferimento.

Fra gli infiniti sistemi di riferimento che posso immaginare una classe preferenziale è quella dei sistemi "inerziali". Un **sistema di riferimento inerziale** (anche riferimento inerziale o sistema inerziale o sistema di riferimento Galileiano o spazio inerziale) è un sistema di riferimento che descrive il tempo e spazio come omogenei, isotropici, e in modo indipendente dal tempo.

Vedremo meglio i dettagli in seguito, per ora si può assumere un sistema inerziale come un sistema solidale con lo spazio assoluto. Un buon esempio di sistema inerziale può essere (approssimativamente) il sistema costituito dal Sole (come origine) e da tre stelle fisse che individuano la direzione dei tre assi.

1.2. La Meccanica Classica

[molto in breve, se ne discuterà in dettaglio nei capp. 3-4-5]

- In un sistema inerziale valgono i tre principi della dinamica (le tre leggi di Newton):

  I - Se la somma delle forze (esterne) che agiscono su di un corpo è zero, allora il corpo ha accelerazione nulla, cioè velocità costante:

  $$\bar{F}_e = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$$

  II - Vale la relazione: $\bar{F}_e = m \cdot \bar{a}$, dove m, la massa, rappresenta la quantità di materia del corpo.

  III - Quando due corpi interagiscono, la forza F_{12} che il primo corpo esercita sul secondo è uguale ed opposta alla forza F_{21} che il secondo corpo esercita sul primo: $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

- E' valida la legge di gravitazione universale di Newton [2]:

$$\bar{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}\hat{R}$$

[2] Il segno "-" nella formula sta ad indicare che la forza è attrattiva, talvolta la forza si scrive semplicemente come modulo, quindi senza il riferimento alla direzione, in questo caso il segno sparisce dato che il modulo è per definizione una grandezza positiva.

- Assunzione ulteriore (verificata sperimentalmente): le forze e tutte le interazioni diminuiscono di intensità con la distanza relativa dei corpi interagenti, quindi se un corpo è "abbastanza" isolato non è soggetto a forze esterne. Questo permette di definire un sistema di riferimento in cui non agiscono forze esterne come un sistema abbastanza lontano da altri corpi: per esempio un sistema fra una galassia e l'altra.

1.3. Invarianza galileiana

Le leggi della fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme (non accelerato) l'uno rispetto all'altro (sistemi di riferimento inerziali).
Altra formulazione: le leggi fondamentali della fisica hanno la stessa forma in due sistemi di riferimento collegati da una trasformazione galileiana.

2. Nota matematica

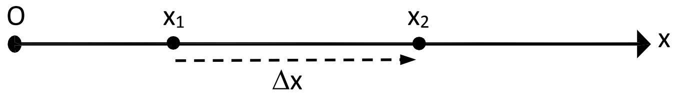
2.1. Il significato di variazione di una grandezza

Con il simbolo Δg si indica la variazione della grandezza g.
Se scrivo Δx, per esempio, intendo la variazione della grandezza x, dove per variazione si intende, se non specificato altrimenti, il valore finale meno quello iniziale.

E' evidente quindi che il concetto di variazione di una grandezza presuppone il concetto di tempo.

Quindi se il corpo che sto descrivendo si è spostato dal punto x_1 al punto x_2, la variazione di x sarà:

$$\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$$



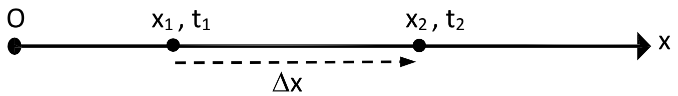
2.2. Il significato di "variazione" di una grandezza in funzione di un'altra

Se ho due grandezze che stanno variando contemporaneamente, posso essere interessato a sapere come varia la prima al variare della seconda. Molto spesso, ma non necessariamente, la seconda variabile è semplicemente il tempo.

Il caso più semplice è quello della posizione, in cui sono interessato non solo alla variazione della posizione, ma anche alla variazione dell'intervallo di tempo (cioè della variazione del tempo, in cui essa è avvenuta). Con "variazione del tempo" si intende la misura dell'intervallo di tempo, quindi la differenza fra l'istante iniziale e l'istante finale.

Per "tempo" si intende sempre il numero letto su di un orologio che sta fermo nel sistema di riferimento usato.

Se inserisco anche la variabile tempo ho che il corpo si trovava all'istante t_1 nel punto x_1, e nell'istante t_2 nel punto x_2



In questo caso la variazione di x sarà, come prima: $\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$

Mentre la relativa variazione di **t** sarà: $\Delta t = t_f - t_i = t_2 - t_1$

2.3. La velocità

La velocità, la grandezza che ci dice quanto siamo "veloci", è una misura di quanto varia la grandezza "spazio percorso" in funzione della grandezza "tempo trascorso" per un corpo che si muove nello spazio

Per esempio: se mi sposto di 5 km in 1 ora, dirò che sono andato a 5 km/ora (in media).

In maniera più formale, supponendo di essere passato dalla posizione x_1 al tempo t_1, alla posizione x_2 al tempo t_2, posso scrivere l'espressione della velocità media, cioè la variazione dello spazio percorso diviso per il tempo trascorso:

$$v = \langle v \rangle = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo trascorso}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Questa è una velocità **media** [formalmente quando si vuole indicare il valore medio di una grandezza **g** la si scrive così: **<g>**] effettuata nell'intervallo di tempo Δt: per esempio se ho percorso 5 km in 1 ora, potrei essermi mosso sempre a 5 km/ora, oppure essere andato per la prima mezz'ora più veloce, poi più lento.

Se voglio invece un'indicazione della velocità **istantanea,** cioè della velocità che un corpo ha **in un certo istante t,** devo utilizzare l'operazione matematica di "derivata".

2.4. Il significato di "derivata" di una grandezza

La derivata di una grandezza (per esempio x), in funzione di un'altra grandezza (per esempio il tempo) indicata con $\frac{dx}{dt}$, è il valore del rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando l'intervallo Δt diventa molto piccolo, al limite quando questo intervallo tende a zero.

Formalmente si scrive:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

2.5. Significato geometrico

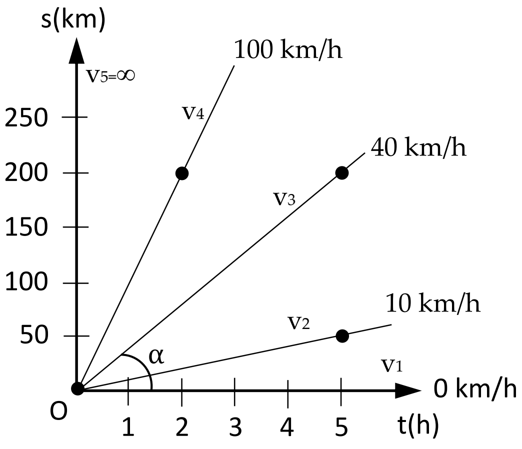
Geometricamente la derivata viene dall'idea di trovare una espressione di questa "variazione" quando le due grandezze sono disegnate in un grafico a due dimensioni, in cui ho una variabile in funzione dell'altra.

Per esempio, supponendo di disegnare una serie di grafici in cui sull'asse orizzontale ho il tempo, e sull'asse verticale ho lo spazio percorso, posso disegnare varie rette a seconda della velocità con cui si sta muovendo il corpo che studiamo.

Nella figura sono state disegnate 5 rette che rappresentano 5 percorsi fatti ognuno a velocità costante. La velocità si può calcolare facilmente facendo, per ogni retta, il rapporto:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

v_1 = il corpo sta fermo, quindi rimane nella stessa posizione al passare del tempo, quindi v=0 km/h
v_2 = il corpo ha percorso 50 km in 5 ore, quindi v=10 km/h
v_3 = il corpo ha percorso200 km in 5 ore, quindi v=40 km/h
v_4 = il corpo ha percorso 200 km in 2 ore, quindi v=100 km/h
v_5 = il corpo si sposta in un tempo uguale a zero, quindi la velocità v= ∞ (infinito) perché avrei un numero diviso zero.



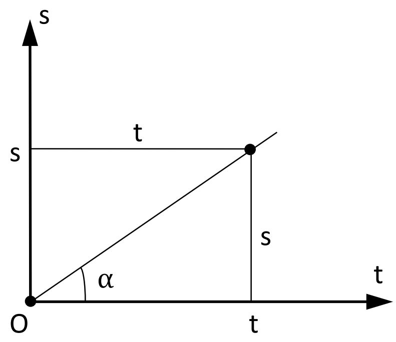
Dal punto di vista geometrico cosa potrei assumere come misura della velocità?
Consideriamo un corpo che si muove con un andamento rettilineo di s(t), vedi figura sopra.
Si potrebbe pensare di assumere come misura della velocità l'angolo α fra la retta che descrive il moto e l'asse delle x.
Come proporzionalità va bene: se l'angolo aumenta, allora aumenta anche la velocità, ma avrei problemi per il moto verticale (v_5) in cui α = 90° ma v = ∞.

Conviene utilizzare la tangente dell'angolo α: tan α
Infatti nei due casi limite (velocità zero e volocità ∞) ho:

v = 0 α = 0 tan α = 0
v = ∞ α = 90° tan α = ∞

Dalla trigonometria ho infatti che:

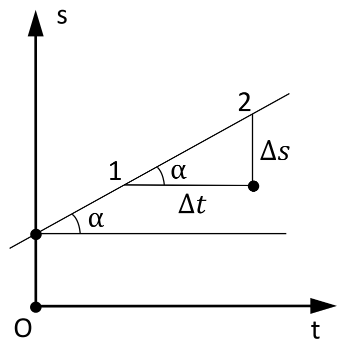
$$s = t \cdot \tan\alpha, \text{ cioè } \frac{s}{t} = \tan\alpha$$



Questo rapporto resta costante per ogni tratto della retta, perché dipende solo dalla pendenza della retta. Se l'angolo α resta costante, allora resta costante anche il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, cioè la velocità.

$$v = \tan\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

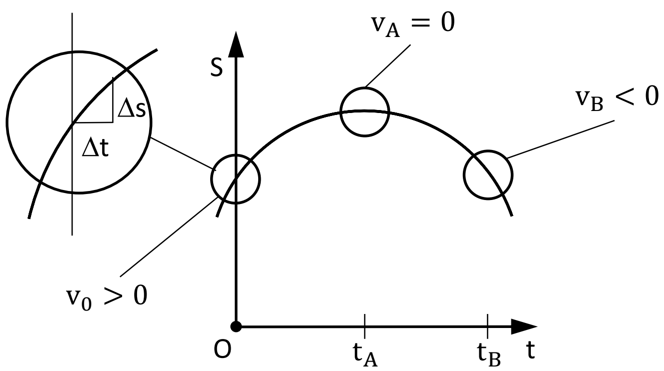
Quindi la velocità non è niente altro che la "pendenza" della retta s(t).



2.6. Come si calcola la velocità in un istante (punto) t*?

…e se invece di una retta avessi una curva? Cioè se la pendenza, quindi la velocità dell'oggetto, cambiasse istante per istante?

Posso considerare un "piccolo" tratto della curva e calcolare il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:



$$\frac{ds}{dt} = \left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right]_{\Delta t\ molto\ piccolo}$$

Se faccio tendere a zero il tratto Δt, allora ho quella che si chiama la "derivata" di s fatta rispetto a t, che ci dice quanto vale istante per istante il rapporto fra le due, in questo caso la velocità.

$$\frac{ds}{dt} = \text{derivata di s rispetto a t}$$

Come posso calcolare la velocità all'istante t*?

1) Disegno la tangente "geometrica" [G] in t*.
2) La tangente geometrica farà un angolo α con l'asse orizzontale.
3) Calcolo la tangente trigonometrica dell'angolo α:
   tan $\alpha(t^*) = \left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=t^*} = v(t^*)$: questa è la velocità calcolata nel punto t*, che ci dice come sta cambiando la grandezza s(t) in funzione del tempo t, all'istante t*, cioè quanto stiamo andando veloci.

Se la grandezza $v(t^*)$ è maggiore di zero vuol dire che stiamo andando "avanti", rispetto alla direzione positiva di s, se è minore di zero vuol dire che stiamo tornando indietro.

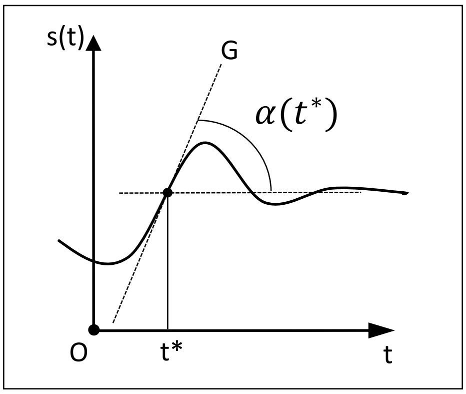


Fig. 2.x Calcolo geometrico della velocità

2.7. L'accelerazione

Come la velocità era una misura di quanto velocemente variava la posizione di un corpo in funzione del tempo, analogamente l'accelerazione **a** è una misura di quanto velocemente varia la velocità in funzione del tempo:

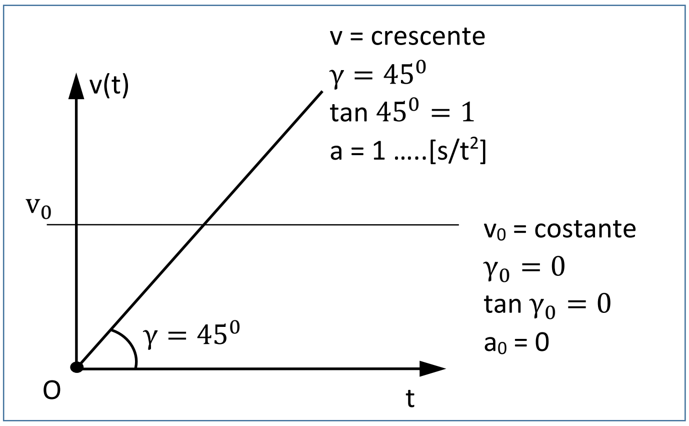
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

se la velocità **v** è costante, l'accelerazione **a** sarà uguale a 0.

Per il calcolo dell'accelerazione in un istante t, vale lo stesso discorso fatto per la velocità:

$$a(t) = \tan\gamma = \frac{dv}{dt}$$

Nella figura sono mostrati due percorsi, uno orizzontale, con velocità costante e quindi accelerazione nulla, ed un altro con velocità crescente, quindi con accelerazione maggiore di zero.



2.8. Regole per il calcolo analitico della derivata di una funzione

In generale: la derivata di x(t) in funzione di t è: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}x(t)$

Se x = costante $\frac{dx}{dt} = 0$

Se x aumenta $\frac{dx}{dt} > 0$; se x diminuisce $\frac{dx}{dt} < 0$

x(t)	dx(t)/dt
costante	0
t^n	nt^{n-1}
cz(t)	$c\frac{dz}{dt}$
z(t)*γ(t)	$z(\frac{d\gamma}{dt})+\gamma(\frac{dz}{dt})$
sen x	cos x
cos x	- sen x
e^{ax}	ae^{ax}

2.9. Un modo per descrivere l'andamento di una grandezza che varia nel tempo

(Come leggere un grafico in cui sono riportate sugli assi una variabile e la sua derivata)

In un grafico bidimensionale (x, y) posso decidere di rappresentare su di un asse (l'asse y) la grandezza (il suo valore, dove siamo), e sull'altro (l'asse x) la derivata temporale (come sta cambiando, in che direzione andiamo).

Se fosse un conto corrente avrei:

- Asse y, dove sono, cioè il saldo, che può essere positivo o negativo (+ , -)
- Asse x, dove sto andando, cioè la derivata del saldo nel tempo, come sta variando, se la variazione è positiva o negativa.

Esempio: lo stato dei paesi europei per quel che riguarda l'innovazione tecnologica, nel 2003

EU - Innovation Technology 2003 – Overall country trend

Lettura del grafico:
Asse verticale: indica lo "stato" del paese.
Asse orizzontale: indica come sta variando lo "stato" del paese.
L'incrocio dei due assi è fatto rispetto ad un valore medio di riferimento.

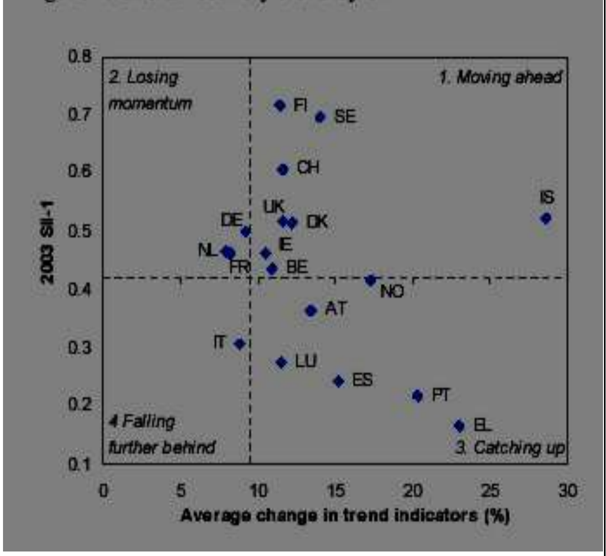


Figure 3. Overall country trend by SII-1

Le quattro zone rappresentano:

1. Moving ahead: Paesi che "sono messi bene" e che stanno migliorando.
2. Losing momentum: Paesi che sono messi bene, ma che stanno peggiorando.
3. Catching up: Paesi che sono messi male, ma che stanno migliorando.
4. Falling further behind: Paese messo male, che peggiora.

3. Il primo principio della dinamica: Il principio di inerzia

Il primo principio della dinamica ci dice cosa succede se un corpo è libero, cioè se ad esso non è applicata alcuna forza (esterna).

Un corpo non soggetto a forze esterne ha velocità costante

$$\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{e}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathrm{v}} = \text{costante}$$

L'oggetto di cui si parla è un **corpo, un oggetto materiale,** per il momento approssimato ad un oggetto simmetrico e "piccolo", una pallina, tanto per fissare le idee.
E' necessario definire due termini: la "velocità" e la "forza".

3.1. Definizione di velocità

La velocità **v** ci dà una misura di quant'è lo spazio percorso dal corpo in un certo tempo, cioè di quanto "velocemente" il corpo si sta spostando. In formule, e per un moto in una sola direzione, per esempio la x, abbiamo:

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1}$$

Nota 1: la velocità dipende dal sistema di riferimento: è calcolata infatti tramite misure di posizione **(x)** e di tempo **(t)**, che dipendono dal sistema di riferimento rispetto a cui si fa la misura.

♦ **La velocità è una grandezza relativa al sistema in cui viene misurata.**

La velocità è un vettore, cioè è definita da tre numeri (v_x v_y v_z) oppure da un modulo (v) , che ci dice "quanto è grande" la velocità, con una unità di misura (nel Sistema Internazionale: metri al secondo) e da un versore ($\hat{\mathrm{v}}$) che indica la direzione della velocità nello spazio.

$$\bar{\mathrm{v}} = \mathrm{v} \cdot \hat{\mathrm{v}} \text{ (m/s)}$$

Il primo principio ci dice che se non ho forze esterne la velocità non cambia **né in modulo né in direzione:**

$$\overline{F}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\mathrm{v}} = \mathrm{v} \cdot \hat{\mathrm{v}} = \text{costante} \begin{cases} \mathrm{v} \ = \ \text{costante: non cambia il modulo} \\ e \\ \hat{\mathrm{v}} \ = \ \text{costante: non cambia la direzione} \end{cases}$$

Nota 2: un corpo che si muove con velocità costante si muove di moto rettilineo uniforme.

Quindi un altro modo di esprimere il primo principio è:

Un corpo non soggetto a forze esterne si muove di moto rettilineo uniforme

Nota 3: una velocità costante può essere anche uguale a zero. Il primo principio della dinamica è valido sia se $\mathrm{v} = 0$ (ossia se il corpo è fermo), sia se $\mathrm{v} \neq 0$ (ossia se il corpo è in movimento), purché ovviamente tale velocità sia costante nel tempo. Un corpo fermo, infatti, è un caso particolare di moto rettilineo uniforme.

3.2. Definizione di forza

Possiamo chiamare forza (o "interazione") qualunque causa che produca una variazione dello stato di un corpo (definito dalla sua posizione nello spazio al variare del tempo). Con variazione dello stato si intende l'accezione più generale possibile. Quindi, nell'ipotesi di applicare una forza esterna al corpo:

- Se il corpo sta fermo, allora comincia a muoversi con una certa velocità.
- Se il corpo si sta muovendo la sua velocità viene variata, o in modulo, oppure in direzione
- Se il corpo è esteso, ma è bloccato da qualche vincolo, allora si deforma, cioè si "dilata" o si "accorcia", a seconda che la forza sia una trazione o una compressione.

Per variazione dello stato non si intende una variazione dello stato termico, cioè dei parametri (p, V, T) = (pressione, Volume, Temperatura) che definiscono lo stato termodinamico del sistema (vedi la parte sulla Termodinamica).

3.3. Rispetto a quale sistema di riferimento sono misurate le velocità?

Il sistema deve essere un sistema di riferimento inerziale, definito come un sistema in cui vale il Primo Principio della dinamica.

Attenzione! Questo è un possibile loop logico: definire il primo principio come un'asserzione che vale in un sistema inerziale, definendo poi il sistema inerziale come quello in cui vale il primo principio!

Soluzione: si utilizza l'informazione **sperimentale** che **tutte le interazioni conosciute** o sono nulle a distanze maggiori di quelle interatomiche (le interazioni deboli o forti) o vanno a zero, cioè si annullano se aumenta a sufficienza la distanza fra i corpi che interagiscono (le interazioni gravitazionali e quelle elettriche, che diminuiscono con l'inverso del quadrato della distanza)[3].

Quindi se considero un corpo abbastanza lontano da altri corpi (per esempio un corpo nello spazio galattico) posso supporre con ottima approssimazione che le forze esterne agenti sul corpo siano nulle o assolutamente trascurabili[4], e posso fare un test per vedere se il sistema di riferimento che sto considerando sia o no inerziale.

Tanto per avere un'idea: si consideri che la distanza media fra due stelle è dell'ordine di 10^{16} m, cioè circa $0{,}3{\cdot}10^{8}$ anni luce. A questa distanza una stella che avesse una massa 1'000 volte maggiore di quella del Sole[5] attirerebbe una massa di 1 kg con una forza equivalente (supponendo di stare sulla Terra, quindi con accelerazione di gravità g) pari a 0,1 milionesimo di grammo $= 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ g$, oppure un decimiliardesimo di kg $= 0{,}1 \cdot 10^{-9}\ kg$, quindi praticamente trascurabile.[6]

---

[3]Per vedere uno schema delle quattro interazioni esistenti vedi la Scheda alla fine della parte sulla Meccanica classica.

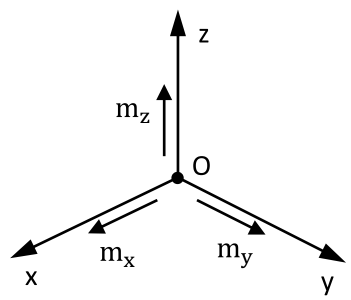
[4]Per chiarirsi le idee su come si risolve questo loop logico vedi p.e. "La Fisica di Berkeley", Vol. I, Meccanica, cap.3, par.1-5. Per una descrizione operativa sui sistemi inerziali vedi: P.W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, 29, **32**, (1961).

[5]La più grande Stella conosciuta (La stella R136a1 nella Grande Nube di Magellano) ha una massa che è circa 250 volte quella del Sole.

[6] Il calcolo è questo: $M_{sole} \sim 2 \cdot 10^{30}\ kg$; $F = G\frac{1000\ M_S \cdot m}{R^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{1000 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1}{10^{32}} \sim 1{,}4\ \cdot 10^{-9}\ \ N$ corrispondente ad una massa (sulla Terra) $=1{,}4\ \cdot \frac{10^{-9}}{9{,}8} \approx 0{,}1 \cdot 10^{-9}\ \ kg$

Test sperimentale per vedere se mi trovo in un sistema di riferimento inerziale: prendo tre masse $m_x\ m_y\ m_z$ che vengono lanciate con $v_x\ ,v_y\ ,v_z \neq 0$ a partire dall'origine e in direzione dei tre assi x,y,z.

Se le tre masse mantengono costante la loro velocità (lanciate una per volta) allora il sistema di riferimento è inerziale.



Altro modo di definire un sistema di riferimento inerziale: un SdR è inerziale se in esso lo Spazio e il Tempo sono isotropi e omogenei. In pratica

3.4. Un altro modo di scrivere il primo principio

Come già detto, l'accelerazione ***a*** ci dice quanto varia la velocità al variare de tempo: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

Il primo principio afferma che un corpo non soggetto a forze esterne ha velocità costante. Se la velocità è costante, la variazione di velocità è nulla: $v_2 - v_1 = 0$

Quindi $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1}$: $\leftrightarrow\ \ a = 0$

Primo Principio della dinamica riscritto: un corpo non soggetto a forze esterne ha accelerazione nulla:

$$\bar{F}_e = 0 \ \leftrightarrow\ \bar{a} = 0$$

4. Il secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica ci dice cosa succede se la somma delle forze applicate a un corpo è diversa da zero $F_e \neq 0$

$$\bar{F}_e = m \cdot \bar{a} \quad \text{(la scriveremo meglio, così non va sempre bene)}$$

La somma delle forze applicate ad un corpo è uguale al prodotto della massa del corpo per la sua accelerazione

I termini di cui si parla: l'oggetto cui si riferisce la formula è un singolo corpo (oggetto), per il momento simmetrico e con estensione nulla. Una piccola sfera tanto per fissare le idee.

- $\overline{F_e}$ la somma delle forze (esterne) che agiscono sul corpo in esame.
- $\bar{a}$ l'accelerazione del corpo
- m la sua massa

Le forze esterne e l'accelerazione **devono** essere misurate rispetto ad un sistema inerziale.

4.1. Definizione di “m”

Ogni corpo ha una massa “m”. La massa è la quantità di materia di cui è composto il corpo – è quindi proporzionale al numero di atomi, cioè di elettroni, protoni e neutroni che compongono il corpo.

La massa è anche una misura dell’inerzia del corpo, cioè della difficoltà a spostare il corpo, a variarne la sua velocità. Nota: la massa non è il peso (che nello spazio è nullo), è proporzionale al peso.

In meccanica classica la massa di un corpo è costante, se non intervengono “azioni” verso l’esterno o dall’esterno. Ma, attenzione, un corpo può “perdere” massa verso l’esterno (la macchina che consuma benzina) o acquistare massa dall’esterno (la valanga...)

1) L’accelerazione a è proporzionale alla F_e (e viceversa), $a = \frac{F_e}{m}$.

Proporzionale vuol dire che se raddoppio la forza raddoppierà l’accelerazione. Viceversa, se l’accelerazione si dimezza, vuol dire che è stata impressa una forza che è la metà.

2) La relazione è vettoriale: $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$, quindi l’uguaglianza non è solo fra i moduli (i “numeri” di sinistra e quelli di destra), ma anche fra i versori (la “direzione” del vettore a sinistra e di quello a destra).

- scrivere: $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ equivale a scrivere $F \cdot \hat{F} = m \cdot a \cdot \hat{a}$

Il che equivale a scrivere due relazioni: $F = m \cdot a$ e $\hat{F} = \hat{a}$ (direzione di F = direzione di a)

3) Scriviamo la relazione utilizzando la definizione di accelerazione in funzione della variazione di velocità:

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, cioè: l’accelerazione è definita come la variazione della velocità (dv) misurata in un certo intervallo di tempo (dt), quando l’intervallo di tempo diventa molto piccolo (è la definizione di “derivata di v rispetto a t”).

Quindi posso scrivere: $\bar{F} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$. Questa relazione è vera, ma solo se si suppone che m rimanga costante durante il moto, cosa che non è sempre vera. Per considerare anche il caso in cui m possa variare portiamo m “dentro” la variazione (è un’operazione matematica che si può fare). Avremo quindi:

$$\bar{F} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt}$$

La grandezza $m \cdot \bar{v}$ è una nuova grandezza chiamata “impulso” o quantità di moto del corpo. L’impulso è indicato con la lettera p, ed è un vettore che ha la stessa direzione di v, e il modulo uguale al prodotto $m \cdot v$

4.2. Definizione di impulso

L'impulso, o la quantità di moto di un corpo, è il prodotto della sua massa per la sua velocità. $\bar{p} = m \cdot \bar{v}$

Se il corpo è esteso, come velocità si considera quella del centro di massa, o baricentro.

Quindi il II principio lo scriveremo così:

Il Secondo Principio scritto bene: $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$

questa forma è più completa, infatti posso scriverla come:

$$\bar{F}_e = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt}$$

Cioè: la forza F può essere legata ad una variazione della velocità del corpo oppure ad una variazione della massa del corpo. Ma anche la velocità è composta da due termini (modulo e direzione), quindi la formula completa diventa:

$$\bar{F}_e = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} =$$
$$= m\frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} = m \cdot v\frac{d\hat{v}}{dt} + m \cdot \hat{v}\frac{dv}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt}$$

ho tre termini la cui causa deve essere una forza $F \neq 0$:

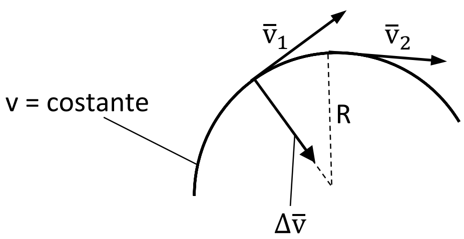
1) $m \cdot v\frac{d\hat{v}}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare la **direzione** della velocità.
2) $m \cdot \hat{v}\frac{dv}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare il **modulo** della velocità
3) $\bar{v}\frac{dm}{dt}$ ci dice che serve una Forza per variare la **massa** del corpo

Queste tre relazioni si possono leggere anche nel senso inverso; ad esempio la terza ci dice che se varia la massa di un corpo, allora ho una forza verso l'esterno (l'aereo a reazione, che manda fuori "combustibile" e viene spinto in avanti).

4.3. Nota 1

Quando ho un corpo che ruota su di un'orbita curva con velocità **costante in modulo**, la sua accelerazione, cioè la variazione della sua velocità, non è nulla, ma è legata alla variazione della direzione della velocità. Tale variazione è perpendicolare alla direzione della velocità stessa, quindi è diretta verso il centro della circonferenza (della circonferenza che descrive il tratto di curva).

Se conosco la velocità in un punto della traiettoria, allora si può calcolare anche la sua



$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = a$$

accelerazione (che si chiama "centripeta").

L'accelerazione centripeta, che causa il cambiamento di direzione della velocità v è $a_c = \frac{v^2}{R}$ in cui R è il raggio del tratto di curva che stiamo considerando

Per far ruotare un sasso intorno a noi dobbiamo tenerlo con una corda e tirare (esercitare una forza costante). Se non esercitiamo più la forza, lasciando il filo, il corpo prosegue... per la tangente, cioè smette di curvare e va dritto secondo quanto previsto dal primo principio. Poi magari cade, perché in verticale esiste la forza di gravità che lo tira verso il basso.

Questo vale anche per la Luna che ruota in torno alla Terra, per la Terra che ruota intorno al sole.

4.4. Nota 2

Perché è importante usare la forma del secondo principio della dinamica in cui c'è l'impulso p.

Il secondo principio, scritto in funzione della massa m, perde significato se m = 0 , cioè nel caso di corpi con massa nulla.

Questo caso non creava problemi a Newton, a Galileo... non essendo previsti da nessuna teoria corpi di massa nulla.

Ma agli inizi del '900 con la teoria della Relatività speciale, e poi con la meccanica quantistica, viene "scoperto" (definito?) il fotone (particella di massa nulla che trasporta il campo elettromagnetico): un oggetto che viaggia sempre alla velocità della luce. Ma questo "oggetto" strano, il fotone, trasporta Energia (il Sole ci scalda!!!) ed ha anche un impulso o una quantità di moto.

Ma come è possibile che un fotone abbia una quantità di moto diversa da zero se ha massa nulla?

La differenza è che in relatività la definizione di "quantità di moto" viene modificata rispetto alla definizione semplice data in meccanica classica.

In relatività si può esprimere la quantità di moto di un corpo così:

$\overline{p} = \frac{E \cdot \overline{v}}{c^2}$ dove E è l'energia totale del corpo, v la sua velocità, e c è la velocità della luce nel vuoto.

Così, se per esempio, ho un fotone di energia E, che viaggia nel vuoto, quindi con velocità c, la sua quantità di moto sarà $p = \frac{E}{c}$ [7]

4.5. Nota 3

Cosa succede se un corpo non è a simmetria sferica, oppure non è "piccolo"?

Si ha semplicemente che la legge $F = m \cdot a$ continua a valere, ma è riferita ad un punto particolare del corpo: il centro di massa, o baricentro.

Il centro di massa si muoverà quindi seguendo il secondo principio. Poi il corpo potrà avere altri moti più complicati, per esempio potrà ruotare intorno a se stesso, potrà vibrare come una molla... tutti moti governati da altre equazioni del moto che si aggiungono (non si sostituiscono) al secondo principio.

4.6. Nota 4

Non tutte le grandezze sono sommabili.

La velocità, lo spostamento, la massa... si sommano. Se mi sposto di $x_1 = 2$ m e poi di $x_2 = 3$ m, in totale mi sarò spostato di $x = x_1 + x_2 = 5$ m. Se ho due masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 3$ kg, e le metto insieme, in totale avrò una massa $m = m_1 + m_2 = 5$kg

---

[7] Questa quantità di moto è molto piccola. Supponiamo di considerare i fotoni delle onde elettromagnetiche emesse da un cellulare.
L'energia dei fotoni è legata alla loro frequenza, cioè **E=hυ,** dove h è la costante di Planck **$h=6{,}6\cdot10^{-34}$ J/s**, e ν è la loro frequenza, che nel caso di un fotone che viene dal Sole, è circa **ν=700THz=$7\cdot10^{14}$Hz**. Di questi fotoni prendiamone N=1 miliardo di miliardi (10^{18}). Tutti questi fotoni avranno quindi un impulso **p = Nhυ/c= $10^{18}\cdot$ 6,6 $10^{-34}\cdot$ 7 10^{14}/3 $10^{8} \cong$ 1,5 10^{-9} kgm/s.** Per fare un confronto calcoliamo la quantità di moto di una pallina da ping pong di 10 grammi che cade da 1 metro di altezza... viene che $\mathbf{p = m\sqrt{2gh} = 0,045\ kgm/s}$, cioè la pallina ha un impulso **p/p(fotoni)=0,045/1,5 $10^{-9} \cong 30\cdot10^{6}$,** cioè circa 30 milioni di volte più grande di quello di un miliardo di miliardi di fotoni che arrivano dal Sole.

La temperatura invece non si somma.

Se ho due litri di acqua, uno a $\mathrm{T} = 20$ ⁰C, ed un altro a $\mathrm{T} = 100$ ⁰C, e li metto insieme, non avrò certo due litri di acqua a 120 ⁰C, ma due litri di acqua a $\mathrm{T} = \frac{20+100}{2} = 60$ ⁰C.

Le temperature non si sommano.

4.7. Nota 5

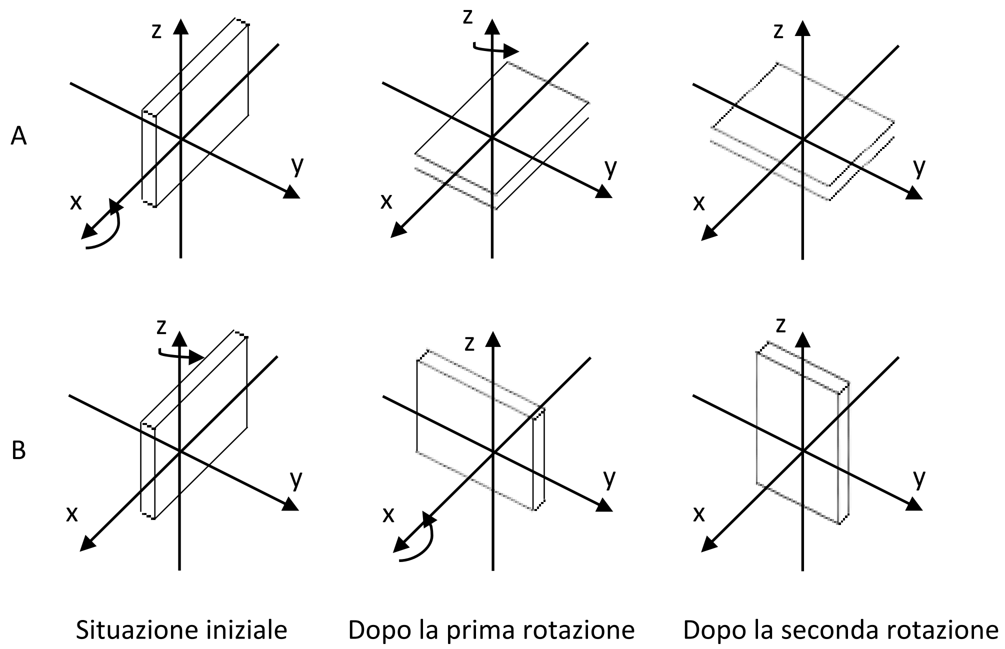
Non sempre vale la relazione $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$, cioè che sommando due oggetti, o facendo due operazioni in sequenza, il risultato non dipenda dall'ordine con cui faccio le operazioni.

Questa relazione è soddisfatta per gli spostamenti, per le velocità, per le masse… in genere per i vettori "normali"; non lo è per alcuni vettori particolari, per esempio per le rotazioni.

Vediamo ad esempio cosa succede se applico due rotazioni R_1 e R_2 ad un libro, cambiando l'ordine con cui applico le due rotazioni:

A) Applico prima R_1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90^0, poi R_2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90^0.

B) Applico prima R_2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90^0, poi R_1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90^0.



Si vede che la posizione del libro nello spazio è diversa alla fine delle due rotazioni, e dipende dall'ordine con cui le ho applicate.

5. Il terzo principio della dinamica

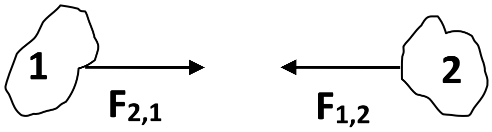
Il terzo principio della dinamica ci dice cosa succede quando ho due corpi che interagiscono.

$$\overline{F}_{2,1} = -\overline{F}_{1,2}$$

Quando due corpi interagiscono, la forza che il primo corpo esercita sul secondo è uguale ed opposta a quella che il secondo corpo esercita sul primo.

I termini: si parla di due corpi, il corpo **1** e il corpo **2**, che interagiscono tramite una forza.
Il simbolo $\overline{F}_{2,1}$ indica la forza che il corpo **2** esercita sul corpo **1**.

Esempio nel caso che la forza sia attrattiva:



Il terzo principio dice che le due forze di interazione sono uguali (i moduli, cioè i numeri proporzionali alla loro intensità, sono uguali), e hanno verso contrario.

Attenzione: si fa l'ipotesi che le due forze siano misurate nello stesso istante.
Questa ipotesi non sarà sempre vera, in Relatività si modificherà il concetto di simultaneità, quindi la terza legge, in alcune situazioni non sarà vera se non dopo un certo tempo[8].

Nota 1: Il III Principio riguarda le forze di interazione fra i due corpi presi in esame. Questo non vuol dire che non vi possano essere altre forze, anche diverse, agenti sui due corpi. Per esempio se il corpo 1 avesse una carica elettrica, e se nelle vicinanze ci fosse un terzo corpo con una carica elettrica, il corpo 1 sentirebbe anche la forza di interazione elettrica, mentre il corpo 2, se fosse elettricamente scarico, non la sentirebbe.

Nota 2 : Questo principio è vero sempre, non è necessario che ci si trovi in un sistema inerziale, a differenza del primo e del secondo principio, che sono validi solo in un sistema di riferimento inerziale.

5.1. Un principio di conservazione ricavato dal III principio

[8] La modifica è richiesta per tener conto del fatto, stabilito nella teoria della Relatività, che i segnali (quindi anche le interazioni) non possono trasmettersi a velocità maggiori di quella della luce c nel vuoto. Questo vuol dire che se il corpo 1 si sposta o si modifica, il suo effetto sul corpo 2, che si trova a distanza ***R*** dal primo, non potrà avvenire prima di un tempo $t \geq t_c = \frac{R}{c}$. Dopo questo tempo potremo scrivere la terza legge, ma dopo aver aspettato il tempo necessario perché i due corpi si trasmettano la variazione dell'interazione. Quindi la terza legge è valida se aspettiamo il tempo necessario perché i sistema si scambino le interazioni. Questo tempo può essere al minimo $\boldsymbol{t_c}$, ma anche molto maggiore, dipende dal mezzo in cui si deve trasmettere l'interazione e dal tipo di interazione.

Supponiamo che i due corpi 1 e 2 siano soggetti solo alle due forze di interazione reciproca, quindi che non ci siano altre forze che agiscono sui due corpi.

Possiamo scrivere il secondo principio per tutti e due i corpi:

1. $\bar{F}_{2,1} = m_1 \cdot \bar{a}_1$, o meglio: $\bar{F}_{2,1} = \frac{d\bar{p}_1}{dt}$

2. $\bar{F}_{1,2} = m_2 \cdot \bar{a}_2$, o meglio: $\bar{F}_{1,2} = \frac{d\bar{p}_2}{dt}$

Ora, se sommiamo le relazioni 1 e 2 che si riferiscono al corpo 1 e al corpo 2, avremo che:

$\bar{F}_{2,1} + \bar{F}_{1,2} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt}$ ma, per il Terzo Principio della dinamica, il termine a sinistra è nullo, essendo le due forze uguali e contrarie, mentre il termine a destra rappresenta semplicemente la somma delle due quantità di moto, quindi la quantità di moto totale p_T del sistema:

$$0 = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) = \frac{d\bar{p}_T}{dt}$$

Se la sua derivata è nulla, cioè la sua variazione nel tempo è zero, allora vuol dire che la grandezza è costante:

$$0 = \frac{d\bar{p}_T}{dt} \leftrightarrow \bar{p}_T = \text{costante}$$

che è valida se non esistono altre forze oltre a quelle di interazione fra le varie parti del sistema.
Quindi un altro modo di enunciare il terzo principio della dinamica è:

♦ **In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva (è costante).**

6. Relatività e invarianza galileiane

6.1. La relatività galileiana

♦ **Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

Per "forma" si intende la forma algebrica e il significato dei termini.

Quindi, per esempio, in un qualunque sistema di riferimento inerziale posso scrivere il secondo principio della dinamica $F = m \cdot a$, dove F e a sono misurate nel sistema in oggetto.

Nota: Quando scrivo una legge, una relazione ($F = ma$), e devo misurare e calcolare le grandezze che compaiono nella formula, ho sempre almeno **due** "oggetti" che sto considerando:

1) Il corpo o il sistema fisico in esame.
2) Il valore della misura delle grandezze che descrivono il corpo ↔ chi fa la misura ideale ↔

3) Il sistema di riferimento rispetto a cui il corpo viene misurato.

6.2. L'invarianza galileiana

♦ **Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a trasformazioni galileiane.**

Trasformazione di coordinate: una trasformazione è un insieme di relazioni che permettono di passare dal valore delle coordinate (della posizione) di un punto in un certo sistema di riferimento al valore delle coordinate che **lo stesso punto** assume in un altro sistema di riferimento.

In generale la trasformazione è definita fornendo le relazioni che permettono di passare dai valori (x, y, z, t) che definiscono la posizione nello spazio nel tempo di un punto P in un sistema di riferimento O, ai valori (x′, y′, z′, t′) che descrivono lo stesso punto nel sistema O′.

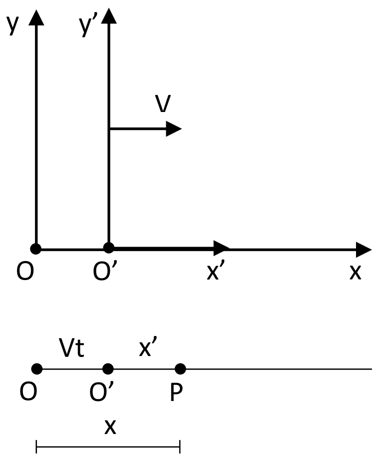
6.3. Le trasformazioni galileiane

Definizione: una trasformazione galileiana è una trasformazione di coordinate che permette di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema che abbia una velocità **V** costante rispetto al primo.

Esempio:
Il caso particolare di due sistemi $O(x, y, z, t)$ e $O'(x', y', z', t')$, in cui le origini O ed O' e gli assi x, y, z e x', y', z' all'istante $t = 0$ coincidano, ed in cui uno dei due (O') si muova di moto rettilineo uniforme rispetto all'altro (O), con velocità V, in direzione x.

Tempi: Si assume che le due origini (O e O') coincidano al tempo $t = 0, t' = 0$. Data l'ipotesi di un "tempo assoluto" che vale per tutta la meccanica classica ($\Delta t = \Delta t'$), se coincidono anche le origini dei tempi misurati nei due sistemi di riferimento, si avrà che $t = t'$.

La posizione del punto P, ad un certo istante $t = t'$ sarà x rispetto ad O, e x' rispetto ad O'.



$x = OP, x' = O'P$, inoltre si ha che: $OO' = V \cdot t$
Quindi, dato che
$OP = OO' + O'P$,
si avrà che $x = V \cdot t + x'$

Le trasformazioni per passare dal sistema $O(x, y, z, t)$ al sistema $O'(x', y', z', t')$, e viceversa, sono quindi:

$$x = x' + V \cdot t$$
$$y = y'$$

$$z = z'$$
$$t = t'$$

Dalle trasformazioni di coordinate posso ricavare le leggi di trasformazione per le altre grandezze; per esempio per la velocità:

dalla trasformazione: $x = x' + V \cdot t$, se derivo rispetto al tempo t ottengo: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V$ da cui, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V$, quindi:
$$v = v' + V$$
Derivando ulteriormente, ottengo la formula per le accelerazioni:
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v' + V) = \frac{dv'}{dt} + 0 = a'$$

Da cui si vede che, mentre le velocità cambiano nei due sistemi di riferimento (la velocità è relativa al sistema di riferimento), le accelerazioni sono le stesse.

Le velocità invece si sommano secondo la seguente formula:
$$v[P(O)] = v'[P(O')] + V[O'O]$$

Come si trasforma la Forza? Dall'ipotesi di relatività ho che

$F' = m'a'$; nella fisica classica la massa si assume indipendente dalla velocità, quindi $m = m'$

Dalla relazione mostrata sopra abbiamo inoltre che $a = a'$, quindi avremo:

$$F' = m'a' = ma = F$$

Le forze, in due sistemi di riferimento inerziali, sono uguali:

$$F = F'$$

Gli osservatori di tutti i sistemi di riferimento inerziali misureranno quindi le stesse forze e le stesse accelerazioni.

7. Le leggi di Keplero

Keplero scrive, fra il 1609 e il 1618, tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al sistema solare. Le leggi sono inferite utilizzando i dati di misurati con grande precisione dal suo maestro, Tycho Brahe, negli ultimi decenni del 1500.

1) I pianeti si muovono secondo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.
2) Per ogni pianeta il raggio sole-pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.
3) Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo dell'asse maggiore ha lo stesso valore per tutti i pianeti - è una costante.

7.1. Nota matematica: L'Ellisse

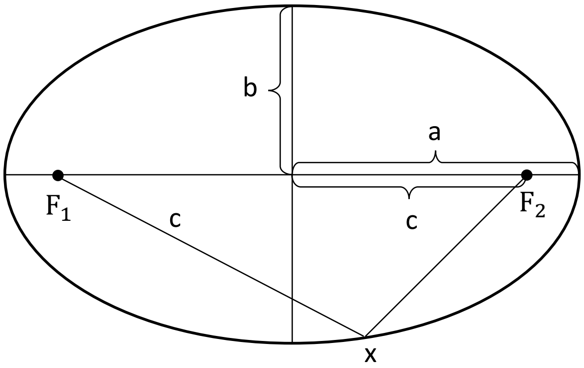
L'ellisse è la curva del piano descritta da un punto tale che la somma delle distanze dal punto e da due punti fissi (i fuochi) sia costante.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente a e b. La costante a è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante b è la lunghezza del semiasse minore.

L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico P (x; y) e il doppio del semiasse maggiore: $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$$

$c = e \cdot a$



Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ x_1 = -c,\ x_2 = c,\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani x-y con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse. L'ellisse è definito dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$x = a\ \cos t$$
$$y = b\ \sin t$$
$$0 \leq t < 2\pi$$

La forma di un'ellisse è espressa da un numero detto eccentricità dell'ellisse, convenzionalmente denotata da e (da non confondere con la costante matematica $e = 2,72$...). L'eccentricità è legata ad a e b dall'espressione $e = \frac{c}{a}$ ed è un numero positivo compreso tra 0 e 1. Se e è uguale a 0, l'ellisse degenera in una circonferenza, se è uguale a 1 degenera in una retta. Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra a e b, quindi l'ellisse sarà più allungata. La distanza tra i due fuochi è $2c$.

In coordinate polari, un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione:

$r(1 + e\cos\theta) = l$

L'area racchiusa da un'ellisse è $S = \pi ab$

La lunghezza della circonferenza è $c = 4aE(e)$, dove la funzione E è l'integrale ellittico del secondo tipo.

L'eccentricità dell'orbita della Terra oggi è 0.0167. Nel tempo l'eccentricità dell'orbita terrestre varia lentamente come risultato dell'attrazione gravitazionale tra i pianeti.

PIANETA	A (UA)	Periodo (10^7s)	eccentricità
Mercurio	0,387	0,76	0,205
Venere	0,723	1,94	0,006
Terra	1	3,16	0,016
Marte	1,523	5,94	0,093
Giove	5,202	37,4	0,048
Saturno	9,554	93,0	0,055
Urano	19,218	266	0,046
Nettuno	30,109	5200	0,008
Plutone	39,60	7820	0,246

7.2. Note alle tre leggi

1) Le ellissi, per quasi tutti i pianeti, sono delle ellissi molto poco ellittiche: l'orbita è in realtà molto vicina ad una circonferenza.

In figura 1 sono state sovrapposte una circonferenza (traccia nera, e = 0) ed un'ellisse con e = 0,08 (traccia rossa), quindi più "ellittica" della maggior parte dei pianeti. Su questa scala non si vede la differenza.

Fig.1 Ellisse con e = 0,08 e circonferenza (e = 0).

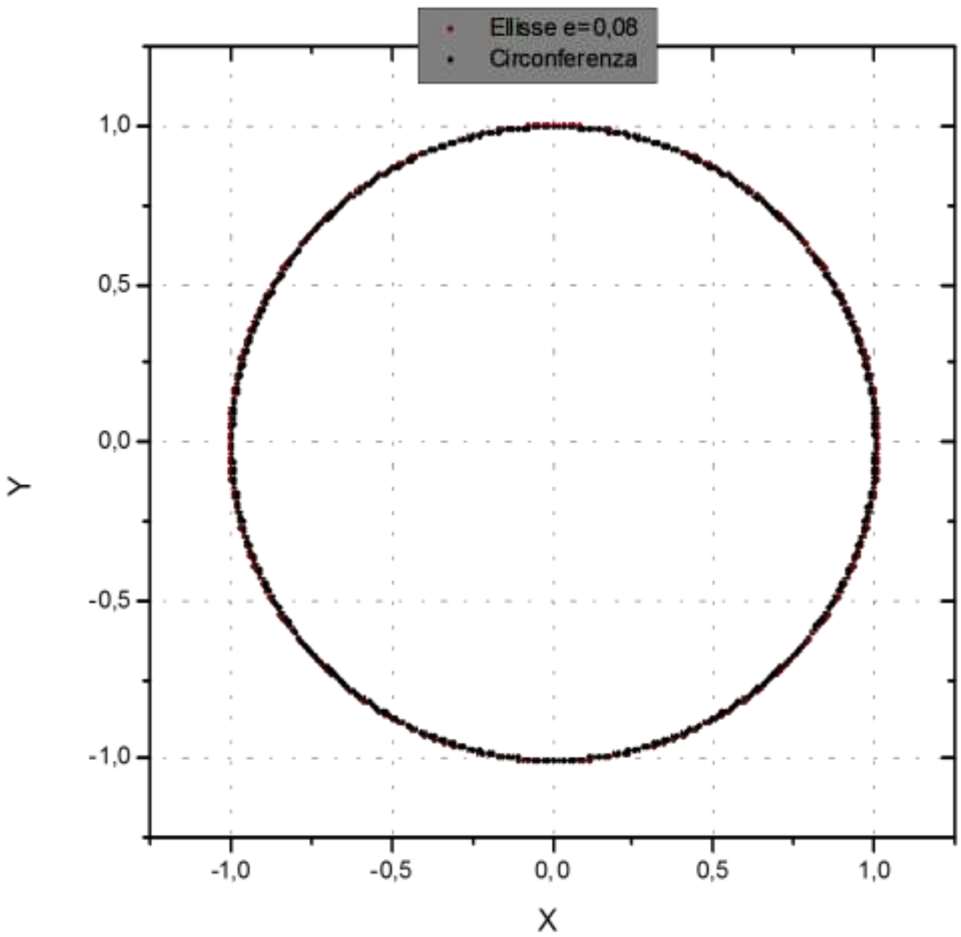
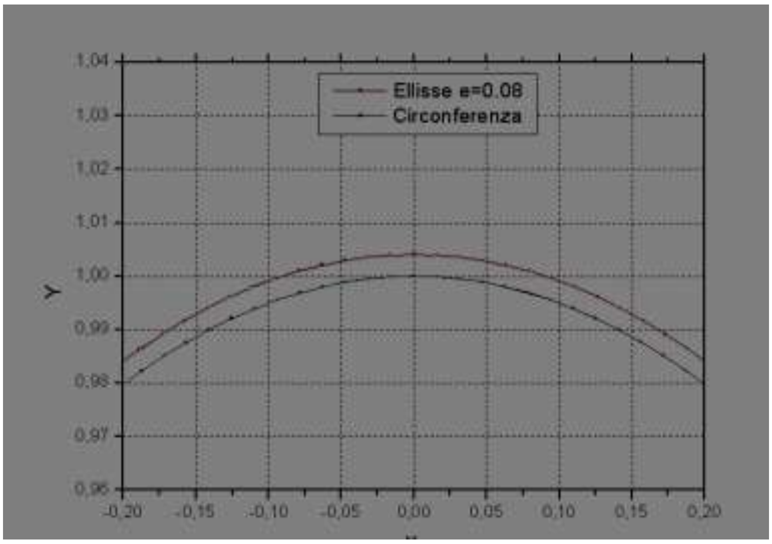


Fig.2



Nella figura 2 è mostrato un ingrandimento della parte superiore della figura 1, in cui si può valutare la differenza fra le due curve. La distanza dal centro delle due figure (il raggio) è 1 (esatto) per la circonferenza, e 1.004 per l'ellisse. Quindi la variazione percentuale del raggio è:

$$\frac{R_e - R_c}{R_c} = \frac{1{,}004-1}{1} = 0{,}004 = \frac{4}{1000} = 0{,}4\%$$

si ha cioè una variazione dello 0,4 %.

Questo vuol dire che, per apprezzare questa variazione, devo essere in grado di fare delle misure con una precisione almeno 10 volte migliore; quindi serve una precisione dello 0,04% cioè di 4 parti su 10'000. E' equivalente a misurare la distanza di un metro con la precisione di 0,4 mm cioè di meno di mezzo millimetro.

Questa, circa, è la precisione necessaria nella misura della posizione del pianeta se si vuole distinguere l'orbita circolare da quella ellittica.

2) La seconda legge, detta con altre parole, ci dice come cambia la velocità del pianeta lungo l'orbita, che quindi non è costante. La velocità è maggiore quando il pianeta è più lontano dal Sole e minore quando è più vicino. Come nel caso precedente questa differenza è molto piccola, proprio perché l'orbita è quasi circolare, quindi le distanze minime e massime sono circa uguali, e quindi anche le velocità.

3) La terza legge fu scoperta da Keplero che cercava un rapporto "pitagorico" (cioè una frazione fra numeri semplici) fra il valore del periodo di rivoluzione e quello dell'asse maggiore. E' un puro caso che poi quello giusto fosse effettivamente 3/2. Non sempre la natura è così benigna da essere descritta da formule e numeri "semplici".

8. Principi/ Leggi/ Leggi fenomenologiche

I principi, le leggi generali e le leggi fenomenologiche hanno diversa origine, diversa importanza e diverso potere predittivo. Consideriamone tre: il secondo principio della dinamica, la legge di gravitazione universale e le leggi di Keplero.

- **F = ma** (Newton, 1687): E' un principio, forse IL PRINCIPIO per eccellenza. Un principio vale sempre, per ogni sistema, a parte il limite al sistema di riferimento in cui vengono misurate le grandezze coinvolte. E' la forma più generale che posso dare ad una legge.

- **Legge di Gravitazione Universale** (Newton, 1687):

$$F_G = G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

Dare la forma matematica della forza permette di fare previsioni utilizzando il secondo principio della dinamica:

[Legge di gravitazione universale] + [***F=ma***] permettono di calcolare le accelerazioni, le velocità e le traiettorie di qualunque oggetto che si muova sotto l'azione della Forza gravitazionale.

- **Leggi di Keplero** (1609-1618): sono leggi fenomenologiche, cioè ricavate dai dati: descrivono matematicamente un particolare fenomeno. Non è detto che possano essere utilizzate per descrivere altri sistemi, ma posso utilizzarle per verificare (falsificare) un'ipotesi, per esempio la validità di una legge più generale.

Nota:

Conoscendo **x(t)** posso calcolare **a(t),** e viceversa:

Diretto: misura [x(t), t]

calcolo v(t)= $\frac{dx}{dt}$ da cui → $[v(t),t]_m$

calcolo a(t)= $\frac{dv}{dt}$ da cui → $[a(t),t]_m$

→ inferisco e calcolo F(t) = a(t)/m

Inverso: (prevedo – calcolo) $(a, t)_c$

calcolo v(t): $v(t)_c = \int a(t)_c dt$

calcolo x(t): $x(t)_c = \int v(t)_c dt$

verifico se $(x(t), t)_m$ misurato = $(x(t),t)_c$ calcolato

9. Il principio di equivalenza

Ci sono due versioni del Principio di Equivalenza, entrambe dovute ad Albert Einstein:

- la versione *forte* afferma che in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale scegliere un intorno di un punto in cui gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- quella *debole* asserisce che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali.

Gli appellativi di forte e debole si giustificano dal momento che se vale il principio di equivalenza nella forma forte deve valere anche quello nella forma debole, mentre da un punto di vista logico l'implicazione non è reversibile. Questa caratteristica fa sì che, anche se il principio in forma debole è stato sperimentalmente confermato con precisione elevatissima, ciò non è sufficiente a garantire lo stesso grado di certezza anche alla forma forte, che deve essere dunque considerata ancora come un postulato.

Dal secondo principio della dinamica ho:

$$F = m_i \bar{a} \quad \text{dove} \quad \mathbf{m_i} = \text{massa inerziale}$$

e dalla legge di gravitazione universale:

$$F_G = G\frac{m_G \cdot m_2}{R^2} \quad \text{dove} \quad \mathbf{m_G} = \text{massa gravitazionale}$$

Il Principio di equivalenza pone:

$$\mathbf{m_i = m_G}$$

Come si "verifica"? Misurando gli effetti inerziali e gravitazionali sullo stesso corpo:

$m_i = \frac{\bar{F}}{\bar{a}}$ (molla) ; $m_G = \frac{F_G R^2}{G m_T}$ (m_T = massa terra) (caduta libera – pendolo - bilancia di torsione)

Per approfondire e per il dettaglio sul funzionamento della bilancia di torsione vedi "La Fisica di Berkeley", Meccanica, Cap. 14, Principio di equivalenza.

Test sperimentali del Principio di equivalenza:

autore	***anno***	***metodo***	***incertezza relativa***[9]
• Galileo Galilei	1590	caduta libera	2×10^{-2}
• Newton	1686	pendolo	$\sim 10^{-3}$
• Eötvos	1922	bilancia di torsione	5×10^{-9}
• Dicke et al.	1964	bilancia di torsione	3×10^{-11}

[9] Per incertezza relativa si intende il valore dell'incertezza relativa nella valutazione della grandezza $R = m_i / m_G$ (che è circa uguale a 1),quindi $\Delta R/R$.

- Adelberger et al. 2008 bilancia di torsione 3×10^{-14}

Pendolo: il periodo di oscillazione di un pendolo di lunghezza L, massa $m_{G,I}$, posto sulla Terra, in un luogo dove l'accelerazione gravitazionale è **g** ,vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_G}{m_I}\frac{L}{g}}$$

9.1. I fotoni in un campo gravitazionale

Cosa succede per i fotoni?
Il fotone ha massa nulla; dalle formule della teoria della relatività si ha:

$E^2 = p^2c^2 + M^2c^4$, dove M è la massa a riposo. Per il fotone (M = 0) si ha quindi:
$E = pc$, ma anche $E = h\nu$, da cui si ha: $p = \frac{h\nu}{c}$,
quindi un fotone ha massa inerziale, equivalente alla sua energia E: $m_I = \frac{p}{c} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{E}{c^2}$
Un fotone di frequenza ν che "cade" sulla Terra per un'altezza *h*, aumenterà la sua frequenza secondo la relazione:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gh$$

Le misure hanno confermato il calcolo.

Il Modello Standard con cui descriviamo l'universo.

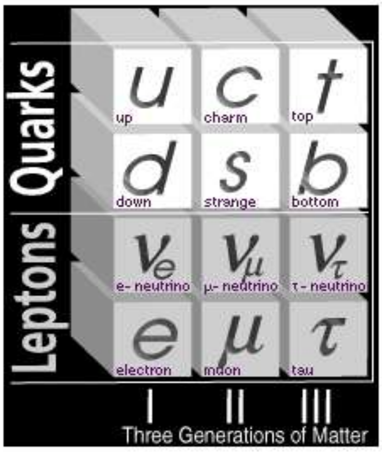
The Standard Model

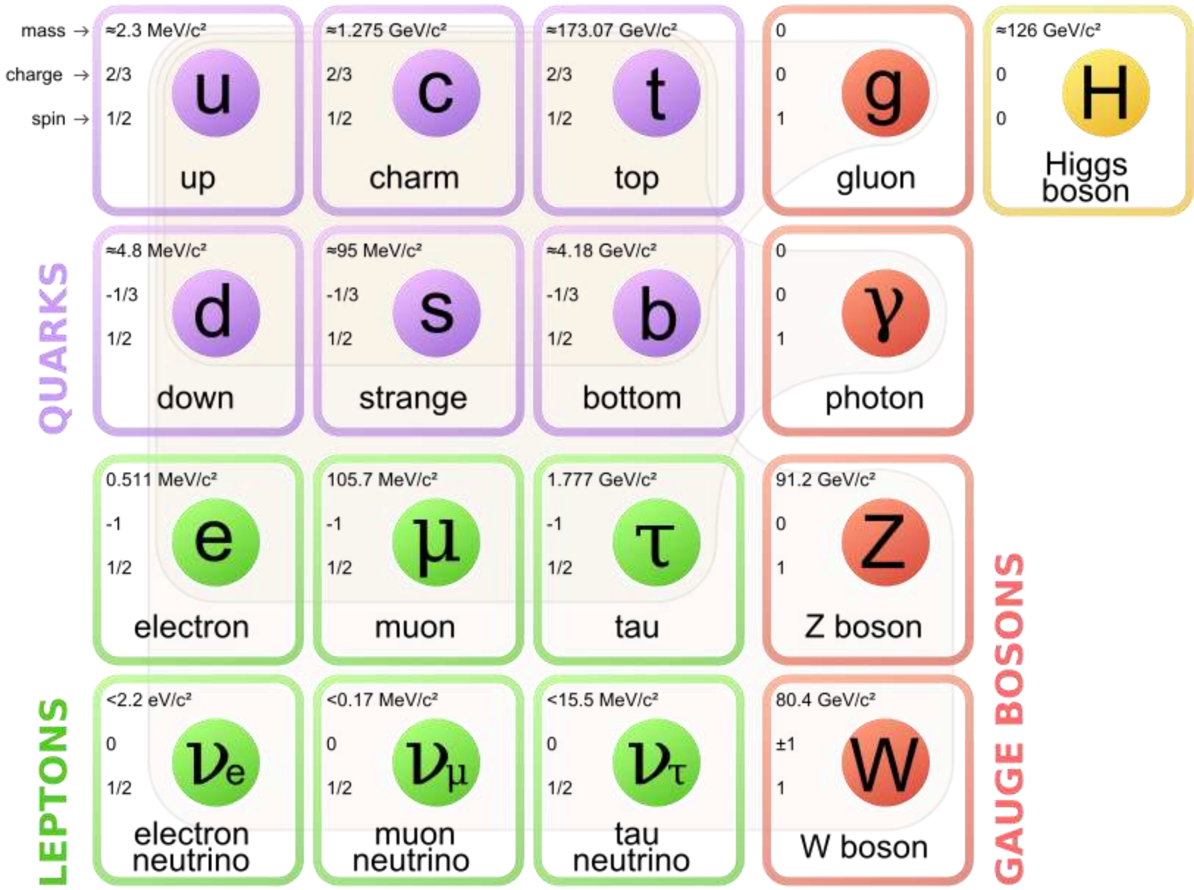
Particelle materiali elementari
[Leptoni – Quarks]

Le tre generazioni (famiglie)

I famiglia:
particelle stabili, formano la materia dell'Universo.

II e III famiglia:
particelle instabili, decadono in particelle della I famiglia.





Particelle mediatrici di Forze

[γ ; Z, W^+, W^-, g ; gravitone]

Elettrodebole			Forte o di colore		
bosone	massa (GeV/c^2)	carica elettrica	bosone	massa (GeV/c^2)	carica elettrica
γ	0	0	gluone	0	0
W^+	80	+1			
W^-	80	−1			
Z^0	91	0			

spin = 1

\+ Higg's boson……

I LEPTONI:

	sapore	massa (GeV/c²)	carica elettrica
ν_e	neutrino e	$< 7 \times 10^{-9}$	0
e^-	elettrone	.000511	-1
ν_μ	neutrino μ	< .0003	0
μ^-	muone	0.106	-1
ν_τ	neutrino τ	< .03	0
τ^-	tau	1.7771	-1

La carica elettrica è misurata rispetto alla carica del protone.

I QUARKS:

Sapore	Massa (GeV/c²)	Carica elettrica
u up	.005	+2/3
d down	.01	-1/3
c charm	1.5	+2/3
s strange	0.2	-1/3
t top	180	+2/3
b bottom	4.7	-1/3

La carica elettrica si intende misurata rispetto alla carica unitaria del protone.

Modello a tappi per i quarks:

Particelle materiali non elementari:

barioni = qqq*	quark	carica elettrica	massa (GeV/c²)	spin
p protone	u u d	+ 1	0.938	1/2
$\bar{p}$ antiprotone	$\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$	- 1	0.938	1/2
n neutrone	u d d	0	0.940	1/2
Λ lambda	u d s	0	1.116	1/2
Ω^- omega	s s s	- 1	1.672	3/2
Σ_c sigma-c	u u c	+ 2	2.455	1/2
e tanti altri ...				

mesone = $q\bar{q}$	quark	carica elettrica	massa (GeV/c²)	spin
π^+ pione	$u\,\bar{d}$	+ 1	0.140	0
K^- kaone	$s\,\bar{u}$	- 1	0.494	0
K^0 kaone	$d\,\bar{s}$	0	0.498	0
ρ^+ rho	$u\,\bar{d}$	0	0.770	1
D^+ D	$c\,\bar{d}$	+ 1	1.869	0
η_c eta-c	$c\,\bar{c}$	0	2.980	0