Le disuguaglianze di Bell[1]

Nota: Con la sua proposta Bell non vuole direttamente falsificare o provare la MQ o altre teorie, ma solo la località dei fenomeni naturali. Il gedanken experiment da lui proposto utilizza due fotoni entangled, "preparati" quindi secondo alcune regole della MQ, ma il test viene fatto "senza sapere" come sono stati creati i due fotoni, le leggi della MQ (o di qualunque altra teoria fisica) non vengono mai utilizzate nel corso dell'esperimento. L'unica formula che viene utilizzata è quella relativa al calcolo della probabilità totale per eventi indipendenti.

Bell scrive delle disuguaglianze sperimentabili tali da dover essere verificate nel caso valga l'ipotesi di località. Poi si possono confrontarle con le previsioni di qualunque altra teoria, e tirarne le conseguenze.

Nella parte che segue non vengono presentate le disuguaglianze di Bell proposte nel suo articolo originale del 1964, ma una versione più semplice, anche se rigorosamente corretta.

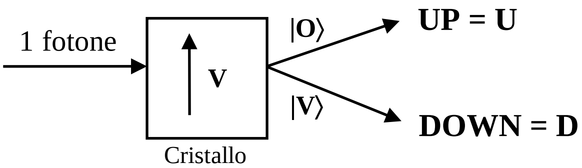
Una sorgente crea coppie fotoni entangled B e G : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|B,\alpha\rangle \cdot\ |G,\alpha\rangle + |B,\alpha + 90^0\rangle\ \cdot |G,\alpha + 90^0\rangle]$

dove α e $\alpha+90^0$ rappresentano due assi ortogonali qualunque riferiti alla grandezza misurabile "Polarizzazione" [vedi il capitolo sull'EPR: scomposizione di due fotoni entangled].

I due fotoni, che viaggiano in direzioni opposte, vengono inviati a due cristalli di calcite, ognuno con un asse di riferimento "**V**".

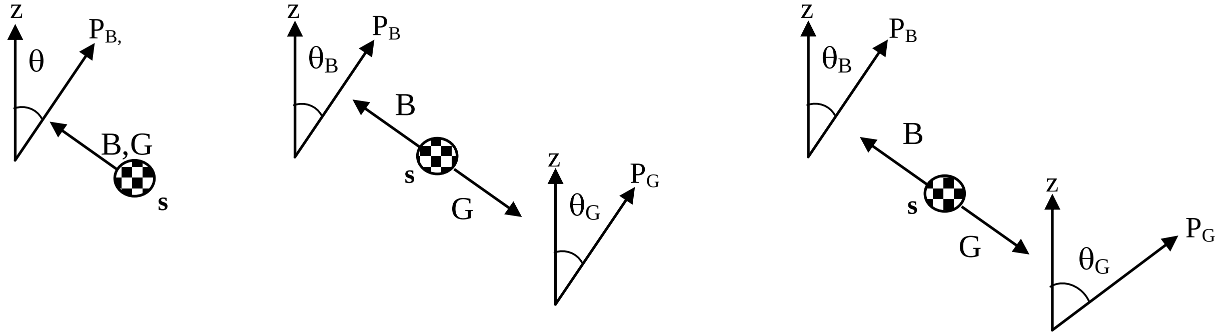
Il cristallo di calcite:

Se si invia un fotone ad un cristallo di calcite, caratterizzato da una direzione di riferimento V; dal cristallo esce sempre un fotone che, a seconda della polarizzazione, viene registrato come UP (polarizzazione Orizzontale) o come DOWN (polarizzazione Verticale) da due contatori di fotoni U & D.



Le misure sono fatte inviando N coppie di fotoni [B,G] ai cristalli, che partono ed arrivano una coppia per volta e registrando le sequenze di U e D registrate da ogni contatore. Le possibili misure sono tre, con differenti configurazioni dei cristalli, cioè dei relativi angoli dell'asse di riferimento del cristallo rispetto alla verticale.

Nella figura: **B** e **G** sono i due fotoni; **s** è la sorgente dei fotoni; **z** è un asse di riferimento (il laboratorio); $\mathbf{P_{B,G}}$ è la direzione dell'asse dei cristalli che misurano rispettivamente il fotone B e il fotone G; $\boldsymbol{\theta}$ è l'angolo fatto da ogni cristallo con la direzione di riferimento z.



(1) P(θ) **(2) PP(θ):** $\theta_B=\theta_G=\theta$ **(3) PC(θ):** $\theta_B\neq\theta_G$; $\theta = \theta_B-\theta_G$

[1] J. Bell "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", *Physics*,I, 195 (1964).

Le tre misure che possono essere fatte, e un esempio di un risultato tipico dell'esperimento:

1) La <u>P</u>olarizzazione P(θ) per un singolo fotone B oppure G:

   P(θ): per <u>qualunque</u> angolo θ ho il 50% di probabilità di avere U o D, una sequenza tipica sarà

   per B o per G : `UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU` ~ (50% U ; 50% D)

2) La "<u>P</u>aired <u>P</u>olarization" PP(θ), Polarizzazione accoppiata:

   PP(θ): l'angolo è uguale, è la stessa situazione dell'EPR, le sequenze dei risultati U e D sono casuali, ma <u>sono uguali</u>. Esempio:

   B : `UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU` circa 50% U ; 50% D

   G : `UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU` " "

3) La "<u>P</u>olarization <u>C</u>orrelation" , correlazione della Polarizzazione:

   PC(θ): gli angoli sono diversi, $\theta = \theta_G - \theta_B$. Le sequenze saranno diverse, per ogni conteggio ho un Match (M) se il risultato è lo stesso, un Errore (E) se è diverso. Esempio:

B : UUDU DUDU DDUD UDDD UUDU (N fotoni misurati)

G : UUD**<u>D</u>** DUD**<u>D</u>** D**<u>U</u>**UD UDD**<u>U</u>** U**<u>D</u>**DU (N fotoni misurati)

Match: MMM MMM M MM MMM M MM (N_M = numero di M=15)

ERRORE: E E E E E (N_E =numero di E=5)

Quindi si conta la frequenza dei Match = PC(θ) e quella degli errori E(θ), come il numero di eventi relativi (N_M o N_E) diviso il numero di eventi(conteggi) totali N:

$$\boldsymbol{PC} = \frac{\text{Numero di Match}}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{\boldsymbol{N_M}}{\boldsymbol{N}} \quad ; \quad \boldsymbol{E} = \frac{\text{Numero di Errori}}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{\boldsymbol{N_E}}{\boldsymbol{N}}$$

Risultati possibili per alcuni angoli particolari:

- $\theta = 0$ PC(0) = 100% = 1 E = 0% = 0 tutti i valori sono uguali
- $\theta = 90^0$ PC(90^0) = 0% = 0 E = 100% = 1 tutti i valori sono diversi
- Per gli angoli fra 0^0 e 90^0 ***E*** assumerà dei valori intermedi fra 0 e 1: **scelgo sperimentalmente l'angolo θ per cui E=1/4** (1 errore ogni 4 fotoni). Si trova che $\theta = 30^0$.

Misure: ($\boldsymbol{\theta = \theta_G - \theta_B}$)

Allineati con **z**: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 0$; $\theta = 0$ → PC=1 E=0

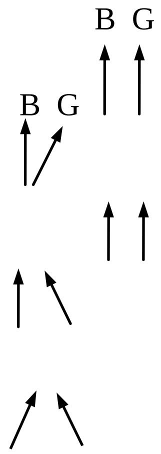
G non allineato: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 30^0$; $\theta = 30^0$ → PC=3/4 E=1/4

Allineati: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 0$; $\theta = 0$ → PC=1 E=0

G non allineato: $\theta_B = 0$; $\theta_G = -30^0$; $\theta = -30^0$ → PC=3/4 E=1/4

La misura di Bell:

Entrambi non allineati: $\boldsymbol{\theta_B = 30^0}$; $\boldsymbol{\theta_G = -30^0}$; $\boldsymbol{\theta = 2 \cdot 30^0}$ → PC=? E=?



Il calcolo di Bell: **se vale la località** allora ruotare uno dei due cristalli non può influire sul risultato dell'altro perché le misure sono praticamente istantanee e non ci può essere una influenza istantanea a distanza (località). Quindi i risultati della misura dei due contatori sono eventi casuali indipendenti, la cui probabilità di accadimento congiunto è semplicemente la somma delle due probabilità singole. Quindi gli "Errori" (come i Match) totali, rispetto alla sequenza "giusta" , cioè quella che si avrebbe per $\theta = 0$, devono essere la somma degli Errori misurati da ogni singolo [cristallo+contatore].

Quindi $E(\theta=60^0) = 2 \cdot E(\theta=30^0) = 2 \cdot 1/4 = 2/4 = ½$.

Tuttavia, nella sequenza, potrebbero esserci due errori nella stessa posizione, che darebbero un risultato giusto, Ad esempio:

Sequenza "giusta" : UUDU DUDU DDUD
B : U**D**DU DUD**D** DD**D**D (3 errori nella sequenza B)
G : UUD**D** DUD**D** D**U**UD (3 errori nella sequenza G)
Errori fra B e G: E E EE (4 errori totali < 3 + 3)

Quindi il numero degli errori totali sarà **minore o uguale** a quello del massimo teorico (½).

La disuguaglianza di Bell dice che, se vale la località, il numero di errori (per $\theta=60^0$) deve essere appunto < ½:

La disuguaglianza di Bell: $\mathbf{E(località|60^0) \leq ½ = 0,5}$

La meccanica quantistica prevede[2]: $\mathbf{E(QM, teoria|60^0) = \sin^2\theta = ¾ = 0,75}$

- Le misure, fatte nel 1982 da A. Aspect e collaboratori[3], ed il relativo calcolo teorico, sono state eseguite con contatori che avevano un'efficienza e < 1.

Il risultato sperimentale: $E = 0,601 \pm 0,020$ (A. Aspect 1982)

La previsione della MQ: $E = 0,612$ (calcolo per un'efficienza <1)

- Ulteriori misure[4]:

Misura fatta utilizzando un set intero di disuguaglianze di Bell (4 valori degli angoli $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$):

Ipotesi di località (la disuguaglianza di Bell) **S(località) ≤ 2**

Previsione Meccanica quantistica $\mathbf{S(QM)_{teoria} = 2\sqrt{2} = 2,82}$

Misura $\mathbf{S(esperimento) = 2,73 \pm 0,02}$

∴ **Ma**: l'efficienza è ancora molto bassa (5%), i puristi non la ritengono una prova definitiva.

Conclusione 1. *L*'ipotesi di località è falsificata, la realtà è (può essere) non locale.
Conclusione 2. Il risultato sperimentale è quello previsto dalla meccanica quantistica, che quindi non è locale. L'argomentazione di EPR è giusta, ma non la conclusione: non è la MQ ad essere incompleta, è l'ipotesi di località a dover essere cambiata. L'entanglement rende possibile **correlazioni** superluminali che risultano essere *unmediated, immediate, unmitigated:* non mediate, immediate, non mitigate. Ma non permette l'invio di **segnali** superluminali. La teoria della relatività non viene violata: l'osservatore in B non ha modo di accorgersi delle azioni di G; la sua statistica dei conteggi è sempre 50% U e 50% D.

---

[2] La probabilità che un fotone passi attraverso un polarizzatore che fa un angolo θ con il fotone è $P(\theta)=\cos^2\theta$ [Malus].
[3] A. Aspect, Dalibard, G. Roger: *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*, Physical Review Letters 49, 25, 1804 (20 Dec 1982).
[4] G. Weihs et al., *Violation of Bell's inequalities under strict Einstein locality conditions*, Phys. Rev. Lett., 81,5039 (1998).