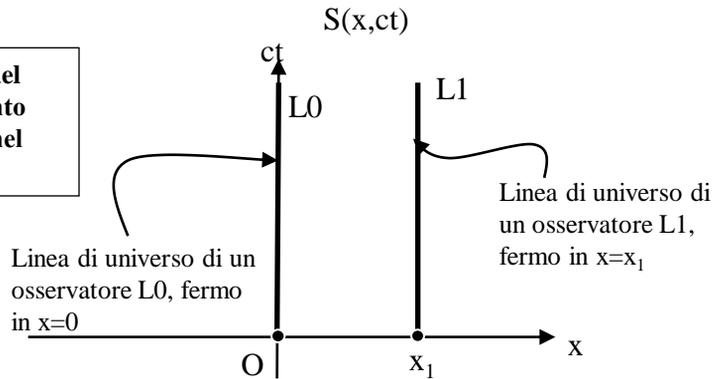


Definizione dei simboli utilizzati

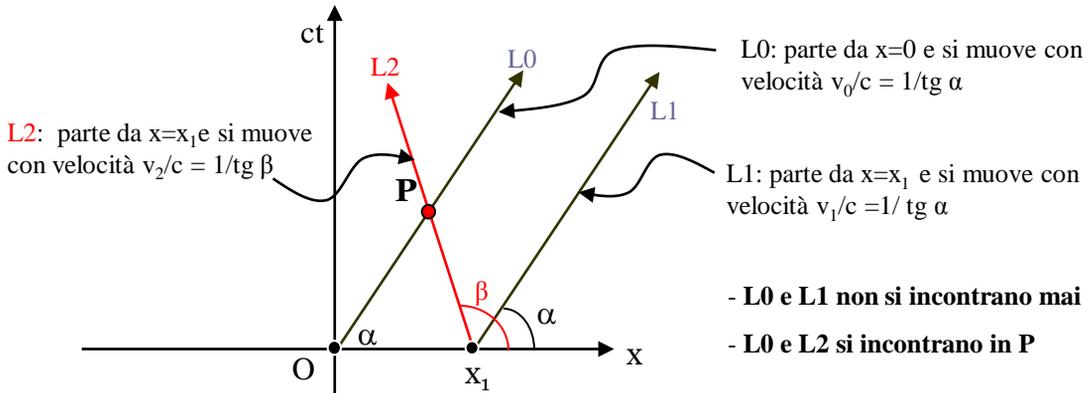
- $S(x,ct)$ : Sistema di riferimento inerziale con origine in  $O$ , e assi  $(x, ct)$ ;  $c$  = velocità della luce nel vuoto.
- $L_0, L_1 \dots$  linee di universo degli osservatori  $L_0, L_1 \dots$
- $A, B, C, P \dots$  eventi nello spazio tempo;  $A(x)$  evento  $A$  nella posizione spaziale  $x$ ;  $B(t)$  evento  $B$  nella posizione temporale  $t$ ;  $C(x,t)$  evento  $C$  nella posizione spazio-temporale  $x,t$ .
- $\bullet$  = posizione di un certo evento.

Lo spazio-tempo in due dimensioni.

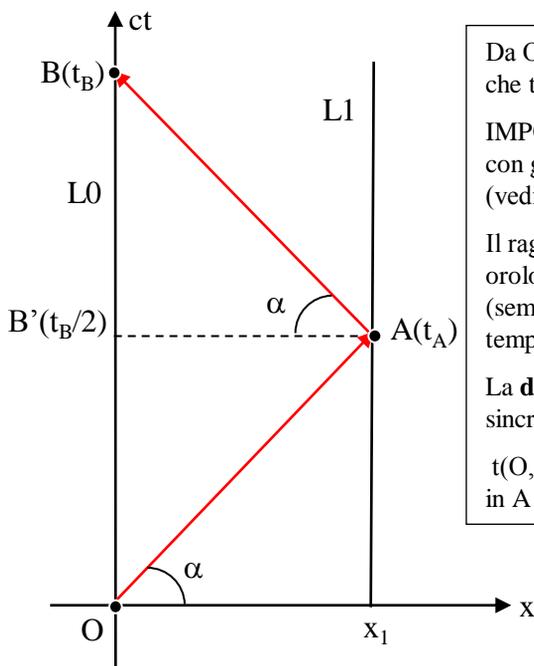
**Il piano dello spazio-tempo  $x, ct$  del sistema "a riposo"  $S(x, ct)$ . Il punto  $O(0,0)$  è l'origine e rappresenta, nel sistema  $S$ : qui e ora.**



Linee di universo nello spazio-tempo



Definizione di "simultaneità" per eventi misurati con orologi sincroni a riposo



Da  $O$  parte un raggio di luce verso  $A$ . Nel grafico l'angolo  $\alpha$  è tale che  $tg \alpha = ct/x$ , ma  $x/t = c$ , quindi  $tg \alpha = 1$ , e  $\alpha = 45^\circ$ .

**IMPORTANTE:** nel piano  $(ct;x)$  la luce fa **sempre** un angolo di  $45^\circ$  con gli assi, se sono ortogonali. Se gli assi non sono ortogonali (vedi dopo) l'angolo è la bisettrice dei due assi.

Il raggio di luce arriva all'osservatore  $L_1$  in  $A$  che legge sul suo orologio il tempo  $t_A$ , poi viene riflesso e va verso l'osservatore  $L_0$ , (sempre facendo un angolo di  $45^\circ$  con gli assi), dove arriva in  $B$  al tempo  $t_B$ .

La **definizione** di simultaneità dice che gli orologi in  $O$  e in  $B$  sono sincronizzati se:

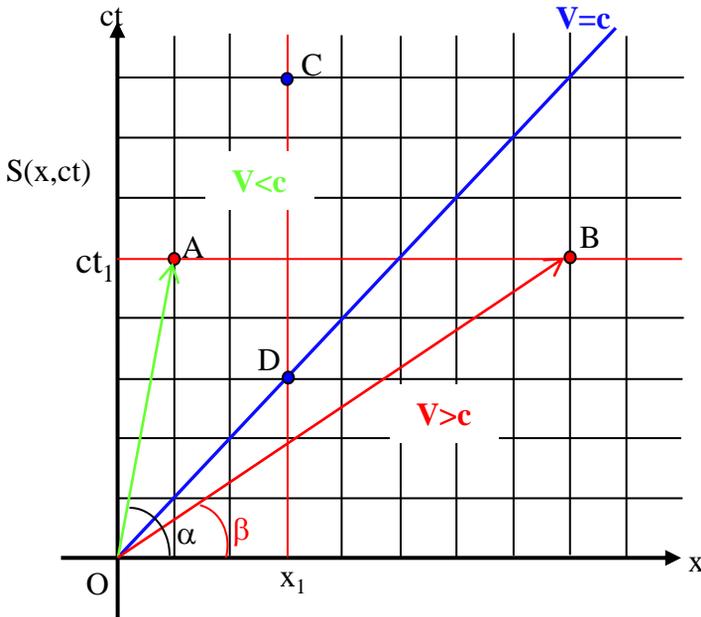
$t(O, B') = t(B, B')$  quindi  $t(B') = t_B/2$  e  $t(B') = t(A)$ , e gli eventi in  $B'$  e in  $A$  sono simultanei nel sistema  $S(x, ct)$ .

Nota: l'asse  $X$  è parallelo a  $B'A$ , cioè alla linea di simultaneità, i punti dell'asse  $X$ , infatti, hanno tutti a  $t=0$ .

Ogni linea orizzontale della griglia unisce eventi simultanei, ex. **A** e **B** avvengono nello stesso istante  $t_1$ .

Ogni linea verticale della griglia unisce eventi che avvengono nello stesso luogo; ex. **C** e **D** avvengono nello stesso luogo  $x_1$ .

L'evento **D** può essere raggiunto da un fascio di luce partito da O.



Linee di universo possibili:

- **OA può** essere una linea di universo, perché  $ct_1 = x_A \operatorname{tg} \alpha$ , quindi  $x_A/ct_1 = v_A/c = 1/\operatorname{tg} \alpha < 1$ , cioè  $v < c$

- **OB non può** essere una linea di universo, perché  $ct_1 = x_B \operatorname{tg} \beta$ , quindi  $x_B/ct_1 = v_B/c = 1/\operatorname{tg} \beta > 1$ , cioè  $v > c$ , e nessun segnale può andare da O a B

- **OD può** essere una linea di universo, ma solo per segnali luminosi (fotoni) perché  $ct_D = x_1 \operatorname{tg} 45^\circ$ , quindi  $x_1/ct_D = v_D/c = 1/\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , cioè  $v = c$ .

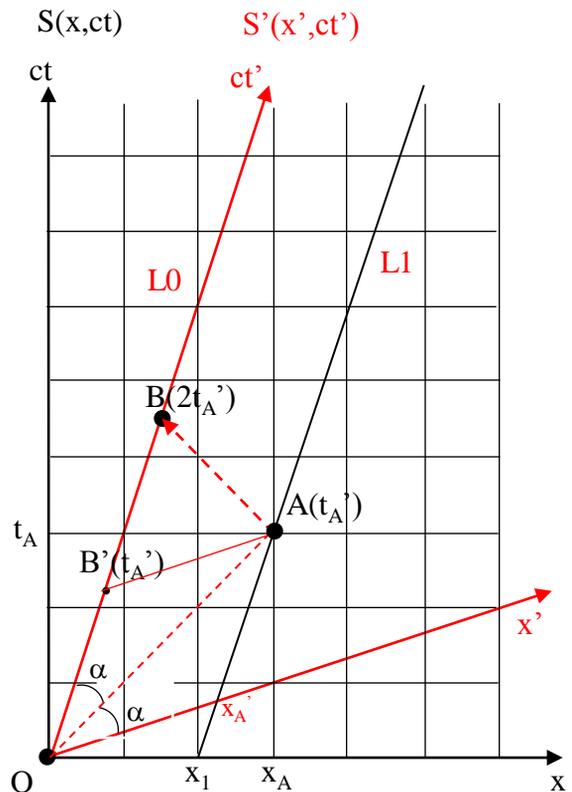
Come si costruisce la griglia per un sistema di riferimento S' in moto rispetto ad S

Il sistema S(x,ct) è il sistema a riposo. L0 ed L1 sono le linee di universo di due osservatori che sono partiti da 0 (L0) e da  $x_1$  (L1) con la stessa velocità  $v < c$ . Il sistema che vogliamo caratterizzare è quello in cui L0 è a riposo, e lo chiamiamo S'.

- L'asse L0 sarà l'asse dei tempi  $ct'$ .
- Da O inviamo un raggio di luce che incontra L1 nel punto A, all'istante  $t_1'$ . La luce viaggia sempre a  $45^\circ$ .
- A riflette il raggio, che ritorna all'osservatore L0 in B all'istante  $2t_1'$ . La luce viaggia sempre a  $45^\circ$ .
- Per definizione di sincronismo, il punto B', a metà strada fra O e B, ha lo stesso tempo  $t_1'$  di A.
- L'asse  $x'$  si può costruire in due modi:

- 1) l'asse  $x'$  è il simmetrico dell'asse  $ct'$  rispetto al raggio di luce, i due angoli  $\alpha$  sono uguali, è questo che garantisce che la velocità della luce sia sempre c.
- 2) Si traccia la retta che parte da O (origine di S' al tempo  $t'=0$ ), parallela la tratto B'A. Questo tratto infatti congiunge per definizione tempi simultanei nel sistema  $t'$ .

- La griglia completa si ottiene tracciando le rette parallele ai due assi di S' ( $x'$ ,  $ct'$ ). Vedi dopo.
- Si noti che l'evento A ha coordinate diverse nei due sistemi di riferimento, in S( $x_A, t_A$ ) e in S'( $x'_A, t'_A$ ).



## Come si costruisce la scala (temporale)

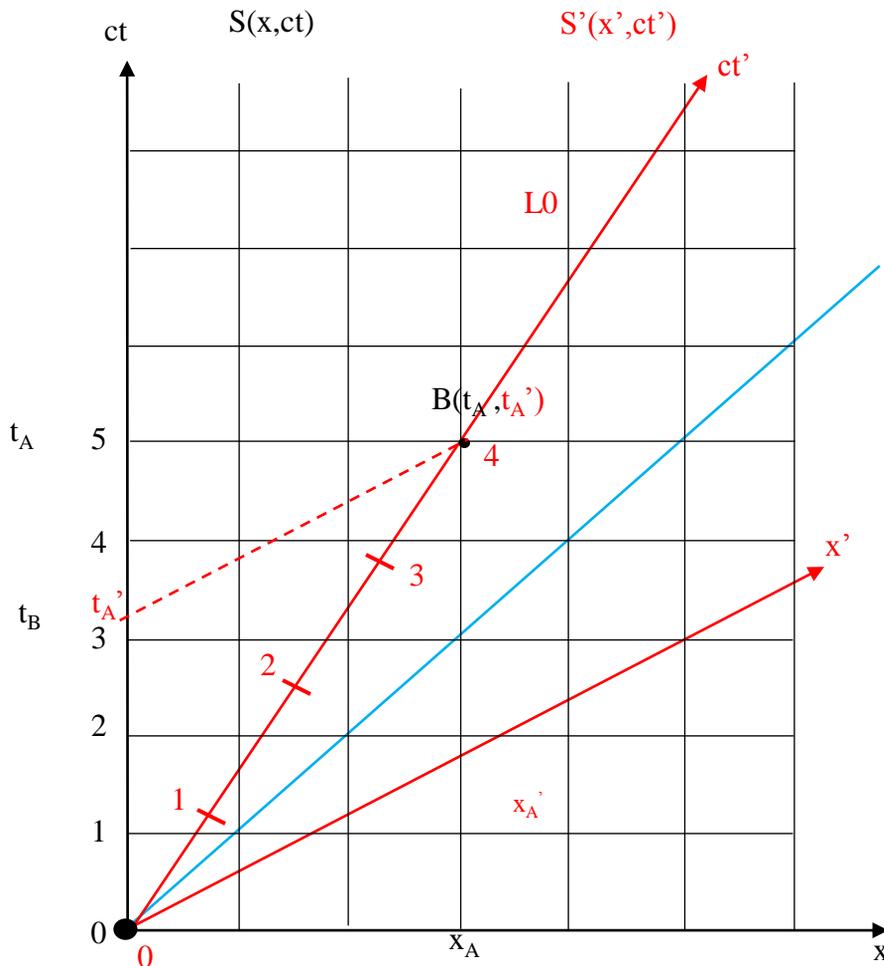
L0 è un sistema che si muove, rispetto al sistema S, con velocità  $V = 3/5 c$ , infatti per  $t_A = 5$  L0 ha percorso uno spazio  $x = 3$  quadretti, mentre c ha percorso uno spazio  $x = 5$  quadretti.

Quindi il  $\gamma$  relativo ai sistemi  $[S, S']$  vale  $\gamma = 1/[1-9/25]^{1/2} = 5/4$

Nel sistema S misuro  $t = \gamma t'$ , quindi per esempio:  $t_A = \gamma t_A'$ , cioè  $t_A' = t_A / \gamma$  da cui  $t_A' = 5 / (5/4) = 4$

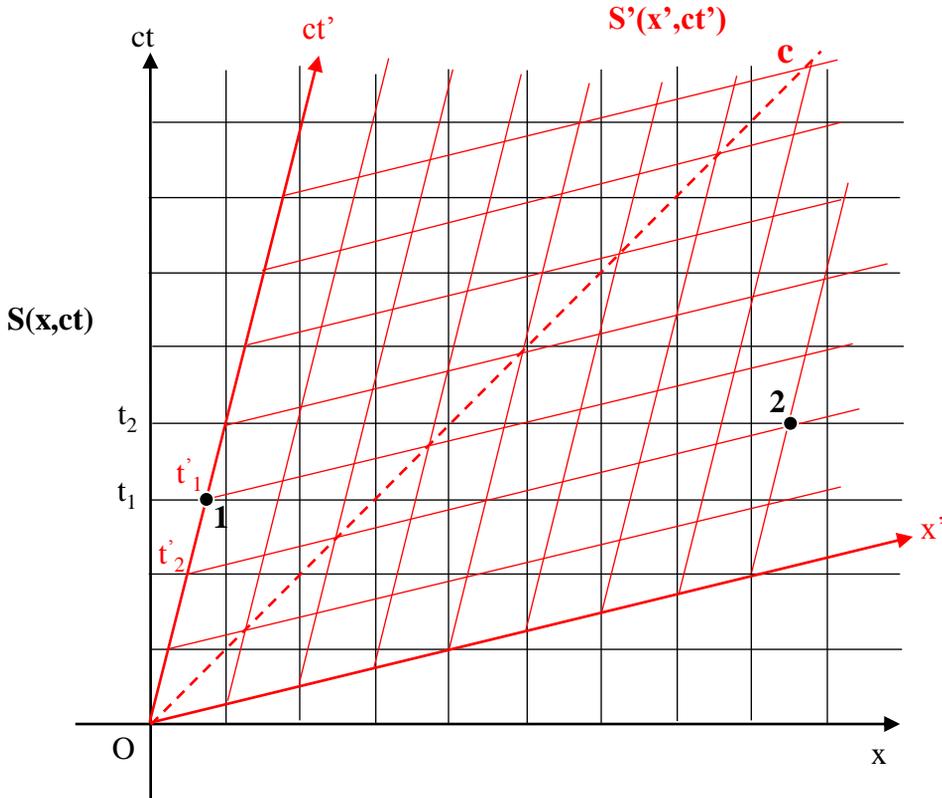
Questo vuol dire che l'orologio in  $S'$ , nel punto B segnerà un tempo  $t_A' = 4 < t_A = 5$ ; come ci aspettavamo va più lento, quindi le unità di tempo sull'asse  $ct'$  sono più lunghe di  $5/4$  rispetto a quelle di  $ct$ .

Nota: Nel sistema  $S'$  misuro  $t' = \gamma t$ , quindi per esempio:  $t_A' = \gamma t_B$ , cioè  $t_B = t_A' / \gamma = 3,3$ , cioè anche  $S'$  vede il tempo in S contratto di  $\gamma$ .



Esempio: i due eventi **1** e **2** hanno un ordine temporale che dipende dal sistema in cui vengono misurati.

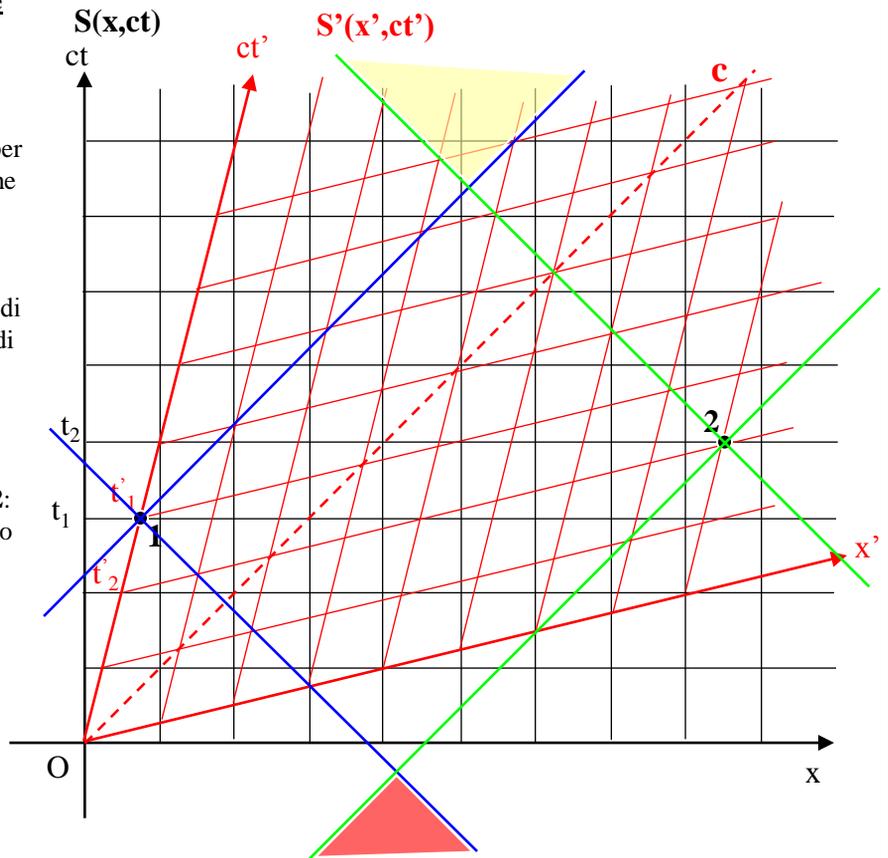
- Nel sistema  $S(x,ct)$   $t_1 < t_2$  quindi l'evento 1 precede l'evento 2
- Nel sistema  $S'(x',ct')$   $t_2' < t_1'$  quindi l'evento 2 precede l'evento 1



**Problemi di causalità: soluzione**

Dopo aver disegnato i due coni di luce per l'evento **1** (linee blu) e per l'evento **2** (linee verdi), si vede che **1** e **2** sono "altrove" uno rispetto all'altro, per cui non ci possono essere relazioni di causalità fra di loro, e l'ordine relativo dei tempi di accadimento dipende dai sistemi di riferimento da cui vengono guardati.

Nella storia passata o futura **1** e **2**: possono aver interagito nel passato nella zona ROSSA o potranno interagire nel futuro nella zona GIALLA.



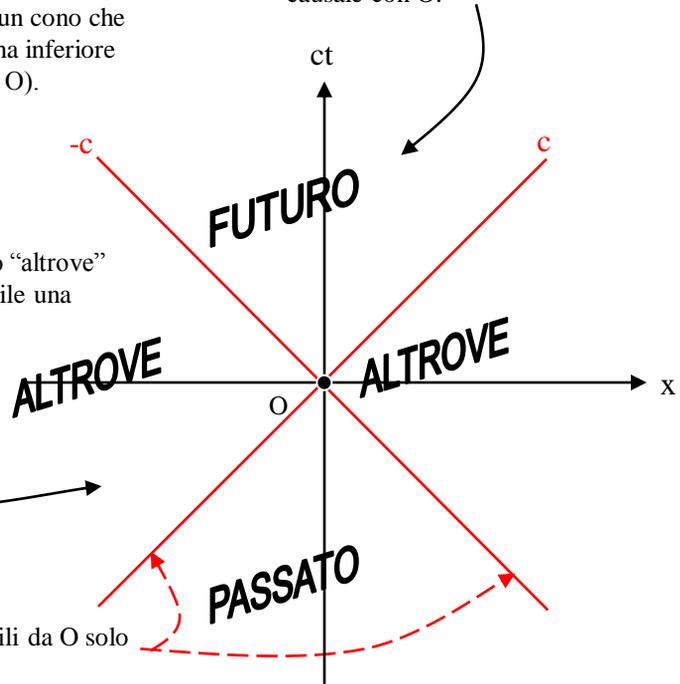
## La struttura dello spazio tempo in 2 dimensioni x, ct

La “distanza” fra due eventi, uno dei quali avviene nell’origine O (qui e ora), mentre l’altro ha coordinate x, ct, è:  $s^2 = c^2t^2 - x^2$ .

In 3 dimensioni (x,y,ct) le rette  $\pm c$  diventano un cono che separa la zona superiore (il futuro di O), la zona inferiore (il passato di O) e la zona laterale (l’altrove di O). Analogamente in 4 dimensioni (x,y,z,ct).

Eventi “ tempo”:  $s^2 > 0$ , sono nel passato o nel futuro di O, è possibile una relazione causale con O.

Eventi “ spazio”:  $s^2 < 0$ , sono “altrove” rispetto ad O, NON è possibile una relazione causale con O.



Eventi “ luce”:  $s^2 = 0$ , sono eventi raggiungibili da O solo tramite segnali luminosi a velocità c.

La distanza spazio temporale  $s^2 = c^2t^2 - x^2$  è rappresentata, nelle quattro zone del grafico (futuro, passato || altrove) da iperboli. Tutti gli eventi di ogni singola iperbole hanno la stessa distanza da O. Ma non sono gli stessi eventi!

Un evento tempo:  $s^2 > 0$ , in particolare questo ha:  $s^2 = a^2$ .  $E_t (x=0, ct=a)$

Un evento spazio:  $s^2 < 0$ , in particolare questo ha:  $s^2 = -b^2$ .  $E_x (x=-b, ct=0)$

