

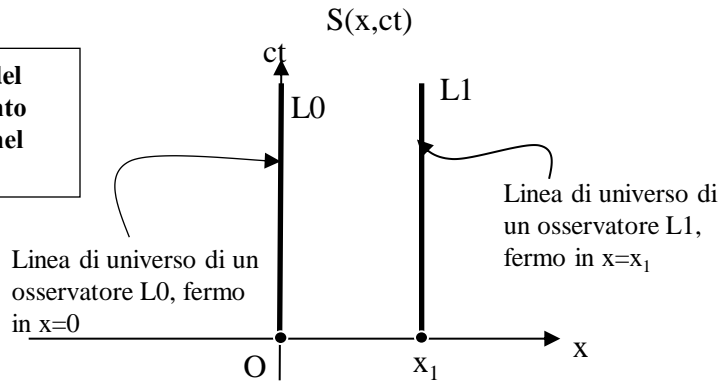
Definizione dei simboli utilizzati

- $S(x,ct)$: Sistema di riferimento inerziale con origine in O , e assi (x, ct) ; c = velocità della luce nel vuoto.
- $L_0, L_1 \dots$ linee di universo degli osservatori $L_0, L_1 \dots$
- $A, B, C, P \dots$ eventi nello spazio tempo; $A(x)$ evento A nella posizione spaziale x ; $B(t)$ evento B nella posizione temporale t ; $C(x,t)$ evento C nella posizione spazio-temporale x,t .
- \bullet = posizione di un certo evento.

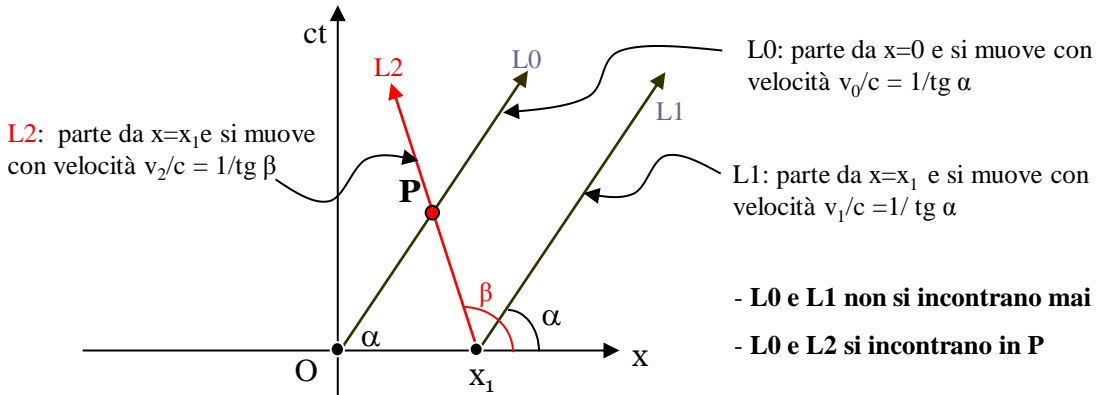
Lo spazio-tempo in due dimensioni.

Il piano dello spazio-tempo x, ct del sistema "a riposo" $S(x, ct)$. Il punto $O(0,0)$ è l'origine e rappresenta, nel sistema S : qui e ora.

Io, che sto fermo in S , ho $x=0$ costante e mi muovo lungo ct

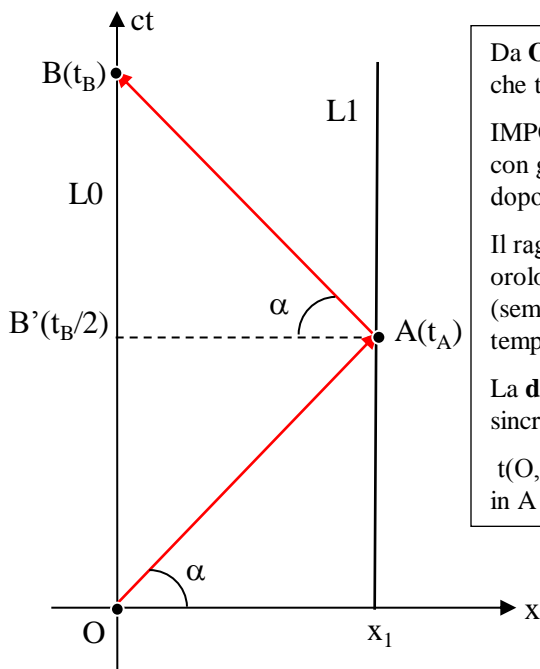


Linee di universo nello spazio-tempo



- L_0 e L_1 non si incontrano mai
- L_0 e L_2 si incontrano in P

Definizione di "simultaneità" per eventi misurati con orologi sincroni a riposo (è la definizione data da A. Einstein)



Da O parte un raggio di luce verso A . Nel grafico l'angolo α è tale che $\text{tg } \alpha = ct/x$, ma $x/t = c$, quindi $\text{tg } \alpha = 1$, e $\alpha = 45^\circ$.

IMPORTANTE: nel piano $(ct ; x)$ la luce fa **sempre** un angolo di 45° con gli assi, se sono ortogonali. Se gli assi non sono ortogonali (vedi dopo) l'angolo è la bisettrice dei due assi.

Il raggio di luce arriva all'osservatore L_1 in A che legge sul suo orologio il tempo t_A , poi viene riflesso e va verso l'osservatore L_0 , (sempre facendo un angolo di 45° con gli assi), dove arriva in B al tempo t_B .

La **definizione** di simultaneità dice che gli orologi in O e in B sono sincronizzati se:

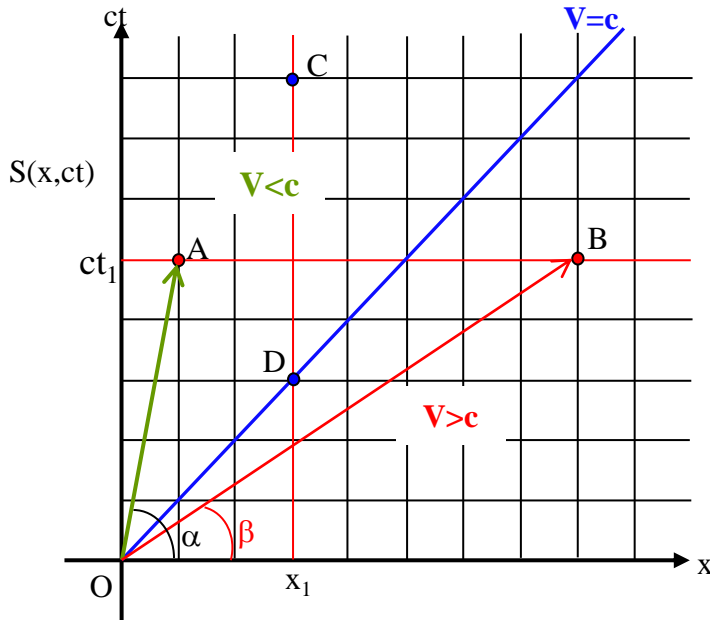
$t(O, B') = t(B, B')$ quindi $t(B') = t_B/2$ e $t(B') = t(A)$, e gli eventi in B' e in A sono simultanei nel sistema $S(x, ct)$.

Nota: l'asse x è parallelo a $B'A$, cioè alla linea di simultaneità, i punti dell'asse x , infatti, hanno tutti $t=0$.

Ogni linea orizzontale della griglia unisce eventi simultanei, ex. **A** e **B** avvengono nello stesso istante t_1 .

Ogni linea verticale della griglia unisce eventi che avvengono nello stesso luogo; ex. **C** e **D** avvengono nello stesso luogo x_1 .

L'evento **D** può essere raggiunto da un fascio di luce partito da O.



Linee di universo possibili:

- **OA può** essere una linea di universo, perché $ct_1 = x_A \operatorname{tg} \alpha$, quindi $x_A/ct_1 = v_A/c = 1/\operatorname{tg} \alpha < 1$, cioè $v < c$

- **OB non può** essere una linea di universo, perché $ct_1 = x_B \operatorname{tg} \beta$, quindi $x_B/ct_1 = v_B/c = 1/\operatorname{tg} \beta > 1$, cioè $v > c$, e nessun segnale può andare da O a B

- **OD può** essere una linea di universo, ma solo per segnali luminosi (fotoni) perché $ct_D = x_1 \operatorname{tg} 45^\circ$, quindi $x_1/ct_D = v_D/c = 1/\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, cioè $v = c$.

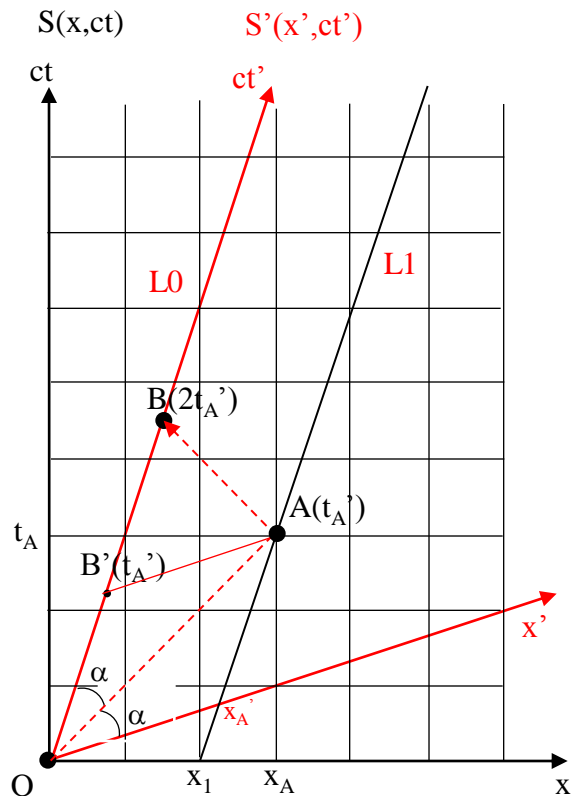
Come si costruisce la griglia per un sistema di riferimento S' in moto rispetto ad S

Il sistema S(x,ct) è il sistema a riposo. L0 ed L1 sono le linee di universo di due osservatori che sono partiti da 0 (L0) e da x_1 (L1) con la stessa velocità $v < c$. Il sistema che vogliamo caratterizzare è quello in cui L0 è a riposo, e lo chiamiamo S'.

- L'asse L0 sarà l'asse dei tempi ct' .
- Da O inviamo un raggio di luce che incontra L1 nel punto A, all'istante t_1' . La luce viaggia sempre a 45° .
- A riflette il raggio, che ritorna all'osservatore L0 in B all'istante $2t_1'$. La luce viaggia sempre a 45° .
- Per definizione di sincronismo, il punto B', a metà strada fra O e B, ha lo stesso tempo t_1' di A.
- L'asse x' si può costruire in due modi:

- 1) l'asse x' è il simmetrico dell'asse ct' rispetto al raggio di luce, i due angoli α sono uguali, è questo che garantisce che la velocità della luce sia sempre c.
- 2) Si traccia la retta che parte da O (origine di S' al tempo $t'=0$), parallela al tratto B'A. Questo tratto infatti congiunge per definizione tempi simultanei nel sistema t' .

- La griglia completa si ottiene tracciando le rette parallele ai due assi di S' (x' , ct'). Vedi dopo.
- Si noti che l'evento A ha coordinate diverse nei due sistemi di riferimento, in S(x_A, t_A) e in S'(x'_A, t'_A).



Nota: $t'(B') = t'(A) \neq t(A)$

Come si costruisce la scala (temporale)

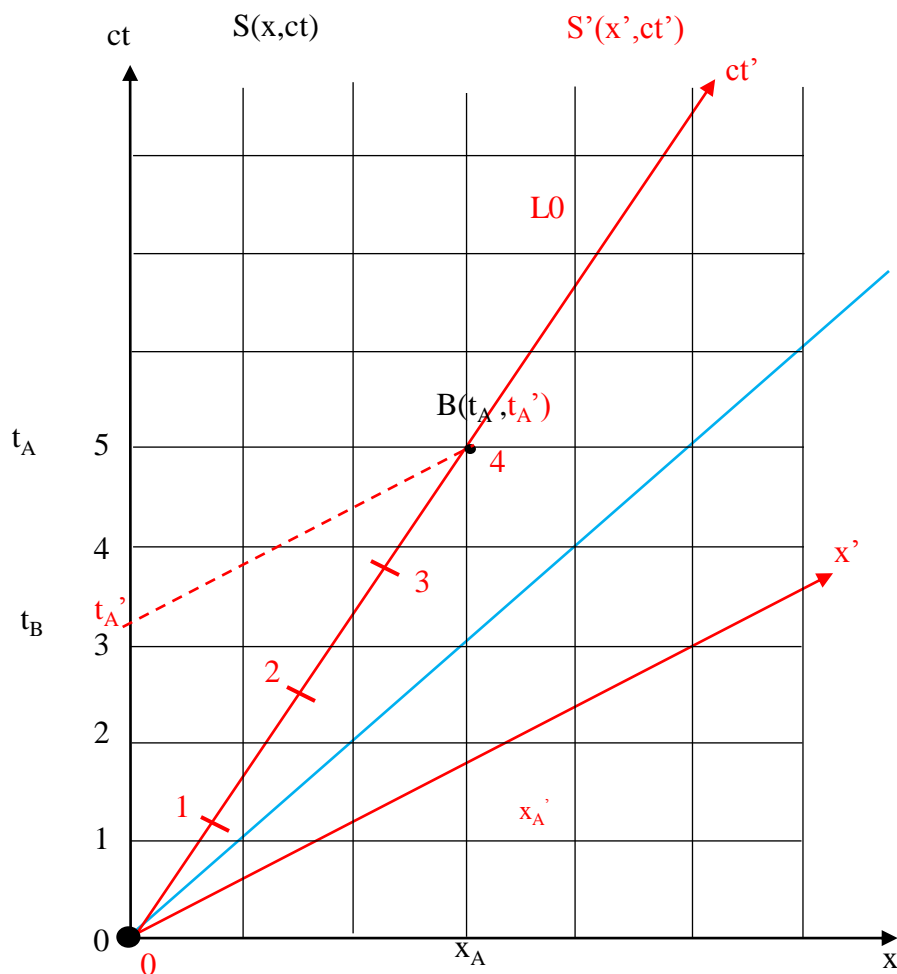
L0 è un sistema che si muove, rispetto al sistema S, con velocità $V = 3/5 c$, infatti per $t_A = 5$ L0 ha percorso uno spazio $x = 3$ quadretti, mentre c ha percorso uno spazio $x = 5$ quadretti.

Quindi il γ relativo ai sistemi $[S, S']$ vale $\gamma = 1/[1-9/25]^{1/2} = 5/4$

Nel sistema S misuro $t = \gamma t'$, quindi per esempio: $t_A = \gamma t'_A$, cioè $t'_A = t_A / \gamma$ da cui $t'_A = 5 / (5/4) = 4$

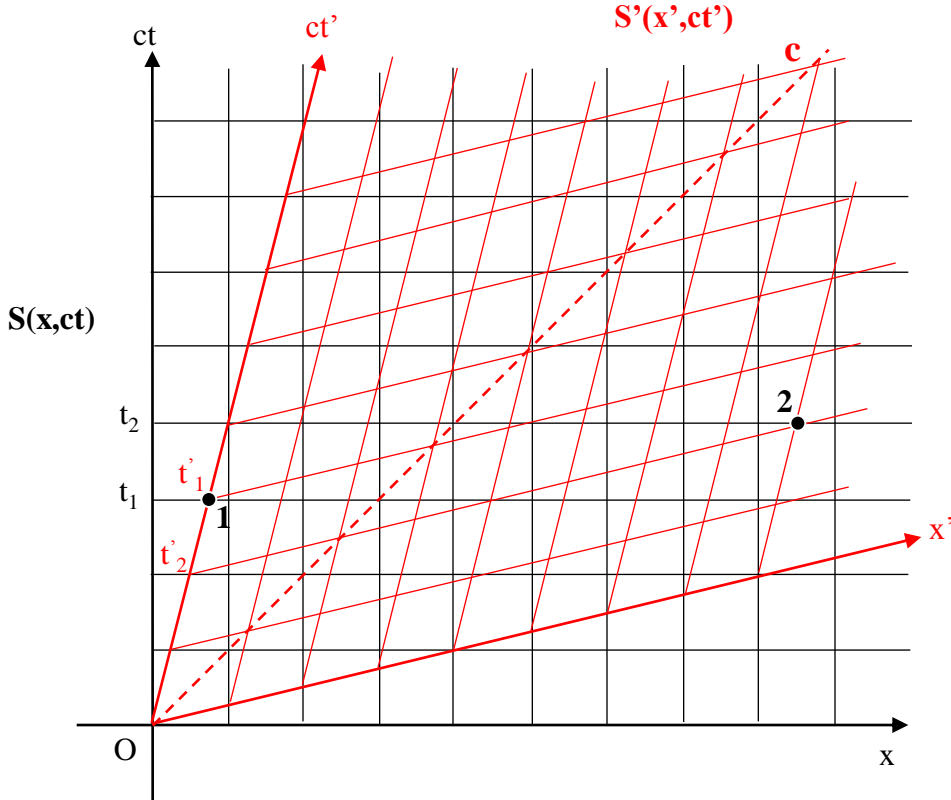
Questo vuol dire che l'orologio in S' , nel punto B segnerà un tempo $t'_A = 4 < t_A = 5$; come ci aspettavamo va più lento, quindi le unità di tempo sull'asse ct' sono più lunghe di $5/4$ rispetto a quelle di ct .

Nota: Nel sistema S' misuro $t' = \gamma t$, quindi per esempio: $t'_B = \gamma t_B$, cioè $t_B = t'_B / \gamma = 3,3$, cioè anche S' vede il tempo in S contratto di γ .



Esempio: i due eventi **1** e **2** hanno un ordine temporale che dipende dal sistema in cui vengono misurati.

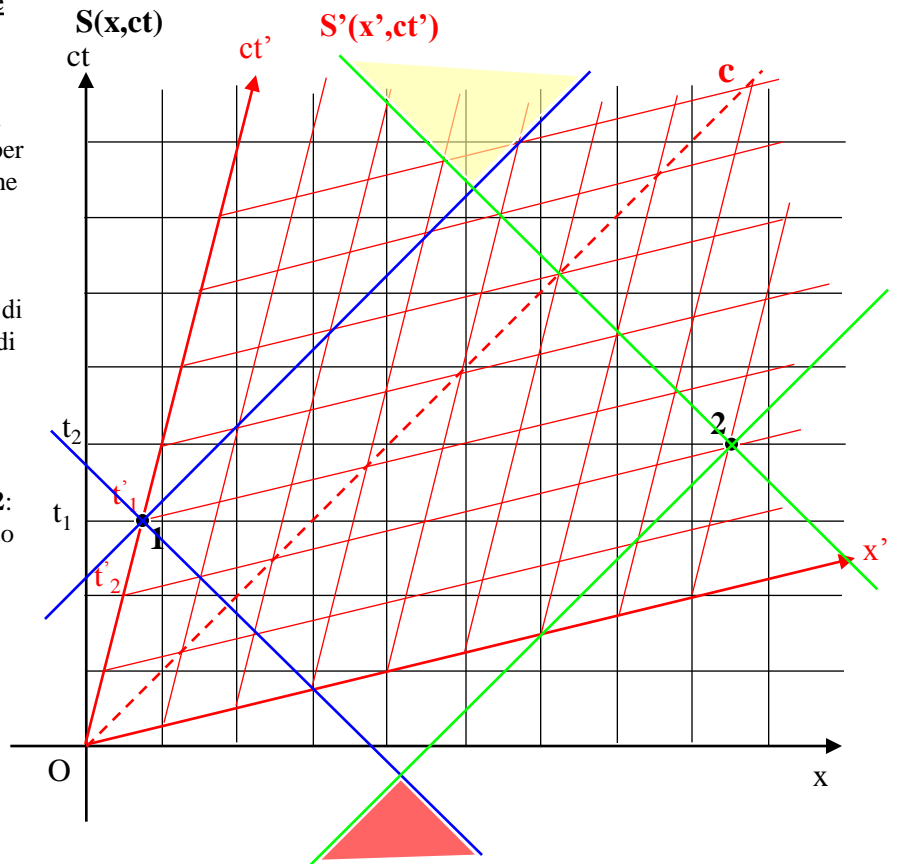
- Nel sistema $S(x,ct)$ $t_1 < t_2$ quindi l'evento 1 precede l'evento 2
- Nel sistema $S'(x',ct')$ $t_2' < t_1'$ quindi l'evento 2 precede l'evento 1



Problemi di causalità: soluzione

Dopo aver disegnato i due coni di luce per l'evento 1 (linee blu) e per l'evento 2 (linee verdi), si vede che **1** e **2** sono "altrove" uno rispetto all'altro, per cui non ci possono essere relazioni di causalità fra di loro, e l'ordine relativo dei tempi di accadimento dipende dai sistemi di riferimento da cui vengono guardati.

Nella storia passata o futura **1** e **2**: possono aver interagito nel passato nella zona ROSSA o potranno interagire nel futuro nella zona GIALLA.



La struttura dello spazio tempo in 2 dimensioni x, ct

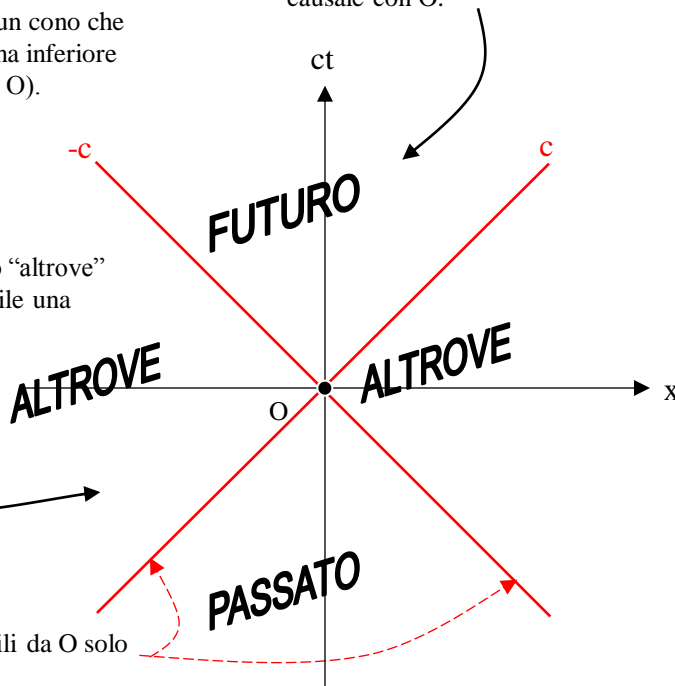
La “distanza” fra due eventi, uno dei quali avviene nell’origine O (qui e ora), mentre l’altro ha coordinate x, ct, è: $s^2 = c^2t^2 - x^2$.

In 3 dimensioni (x,y,ct) le rette $\pm c$ diventano un cono che separa la zona superiore (il futuro di O), la zona inferiore (il passato di O) e la zona laterale (l’altrove di O). Analogamente in 4 dimensioni (x,y,z,ct).

Eventi “ tempo”: $s^2 > 0$, sono nel passato o nel futuro di O, è possibile una relazione causale con O.

Eventi “ spazio”: $s^2 < 0$, sono “altrove” rispetto ad O, NON è possibile una relazione causale con O.

Eventi “ luce”: $s^2 = 0$, sono eventi raggiungibili da O solo tramite segnali luminosi a velocità c.



La distanza spazio temporale $s^2 = c^2t^2 - x^2$ è rappresentata, nelle quattro zone del grafico (futuro, passato || altrove) da iperboli. Tutti gli eventi di ogni singola iperbole hanno la stessa distanza da O. Ma non sono gli stessi eventi!

Un evento tempo: $s^2 > 0$, in particolare questo ha: $s^2 = a^2$. $E_t (x=0, ct=a)$

Un evento spazio: $s^2 < 0$, in particolare questo ha: $s^2 = -b^2$. $E_x (x=-b, ct=0)$

