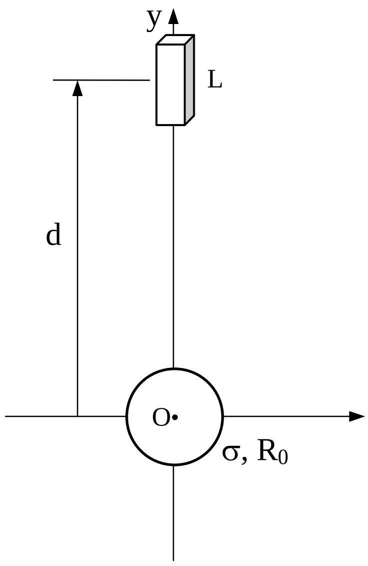
Esercizio n.1 [10 punti]

Una sfera conduttrice carica di raggio R_0 e densità di carica superficiale σ, è fissata nel punto O. Ad una distanza d dal centro della sfera è posto (vedi figura), un parallelepipedo di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di volume V, di lunghezza **L**, sezione quadrata di lato **l** e costante dielettrica relativa ε_r .

Calcolare, se è differente da zero, la forza con cui il parallelepipedo è attratto o respinto dalla sfera.

Le dimensioni del parallelepipedo, così come il raggio della sfera, sono molto minori della distanza d.

Dati: R_0= 1 mm ; $\sigma = 10^3$ C/m^2 ; d = 2 m ; ε_r=2 ; V = 1 cm^3.



Soluzione

La sfera, che ha una carica totale $Q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi \cdot R_0^2 = 4\pi\ 10^{-3}\ C$, si comporta come una carica puntiforme posta nell'origine O che genera (lungo l'asse y) un campo elettrico E. Questo campo elettrico induce nel dielettrico delle cariche di polarizzazione che danno origine ad una forza di interazione fra il parallelepipedo e la sfera carica. Per calcolare questa forza è necessario calcolare la polarizzazione del dielettrico, quindi le relative cariche di polarizzazione, l'energia potenziale del dielettrico dovuta alla presenza del campo E e la relativa forza di interazione.

Il campo elettrico generato dalla sfera carica nello spazio vuoto è: $\overline{E}_0(y) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, y^2}\,\hat{y}$

All'interno del dielettrico il campo E_d sarà $1/\varepsilon_r$ volte il valore che aveva fuori. Il valore di E_d Si può calcolare anche tenendo conto che il valore del vettore D non varia passando dall'esterno all'interno del dielettrico.

La polarizzazione P sarà: $\overline{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \overline{E}_0 = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{y^2}\,\hat{y}$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione sarà $\sigma_p = \overline{P}\cdot\hat{n}$, quindi negativa sulla faccia più vicina all'origine e positiva sulla faccia opposta.

La carica superficiale totale di polarizzazione sarà $q_p = \sigma_p \cdot l^2 = \left|\overline{P}\right| \cdot l^2 = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{y^2}\cdot l^2$

Questa carica darà origine ad un dipolo d di valore:

$$\overline{d} = q_p \cdot L\,\hat{y} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{y^2}\cdot l^2 \cdot L\,\hat{y} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{y^2}\cdot V\,\hat{y}$$

L'energia potenziale del dipolo d nel campo elettrico E sarà:

$$U = -\overline{E}\cdot\overline{d} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{Q^2V}{y^4}$$

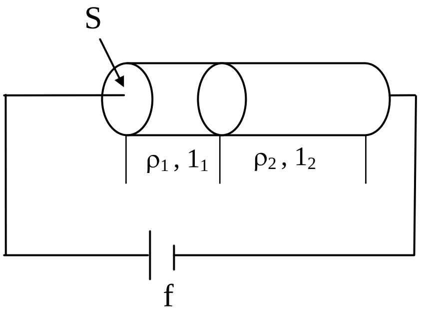
e la relativa forza di interazione, dirett3a lungo la y:

$$F_y = -\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_L = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{4}{(4\pi)^2}\frac{Q^2V}{L^5} = -7{,}1\cdot 10^{-3}\ N$$

, la forza è attrattiva.

Esercizio n.2 [8 punti]

Un generatore di f.e.m *f* è collegato ai capi di un sistema cilindrico di sezione costante *S* formato da due conduttori isotropi ed omogenei lunghi l_1 ed l_2 con resistività elettrica ρ_1 e ρ_2 (vedi figura). Calcolare l'intensità della corrente che scorre nel circuito e la densità di carica elettrica che si accumula sulla superficie di discontinuità fra i due conduttori.



Dati: ρ_1= $1\cdot10^{-7}$ $\Omega\cdot$m ; l_1= 1 cm ; ρ_2= $2\cdot10^{-7}$ $\Omega\cdot$m ; l_2= 2 cm ;

S = 10 μm^2 ; f=2 V.

Soluzione

Il conduttore ha una resistenza totale R data dalla somma delle resistenze dei due tratti (R in serie):

$$R = R_1 + R_2 = \rho_1 \frac{l_1}{S} + \rho_2 \frac{l_2}{S} = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{S} = 500\Omega$$

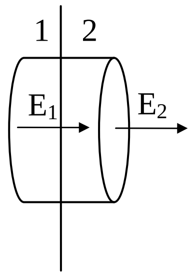
La corrente che scorre nel circuito sarà:

$$I = \frac{f}{R} = \frac{2V}{500\Omega} = 4mA$$

All'interno dei due conduttori il campo elettrico sarà:

$$E_1 = \rho_1 \cdot J \quad ; E_2 = \rho_2 \cdot J \quad essendo \ J = \frac{I}{S}$$

Quindi l'interfaccia fra i due tratti di conduttore avrà dalle due parti due campi elettrici differenti, la carica superficiale si può calcolare utilizzando il teorema di Gauss su di un cilindro di sezione S, perpendicolare alla superficie di separazione fra 1 e 2:



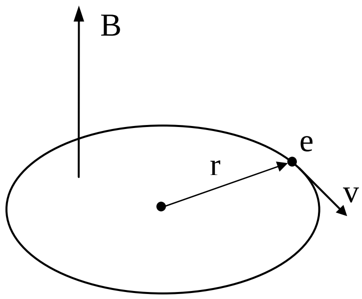
$$\phi(E) = \int \overline{E} \cdot \hat{n}\, ds = S \cdot (E_2 - E_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad da\ cui$$

$$\sigma = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \varepsilon_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{S} \frac{f \cdot S}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} = \varepsilon_0 f \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} = 3{,}54 \cdot 10^{-10}\ C/m^2$$

Esercizio n.3 [12 punti]

Si consideri un atomo con un solo elettrone ed un protone, nell'approssimazione classica. Si supponga di applicare allo spazio in cui si trova l'atomo un campo di induzione magnetica B costante ed uniforme, perpendicolare al piano dell'orbita dell'elettrone (vedi figura). Si calcoli la variazione fra il momento di dipolo magnetico che l'atomo acquisisce in presenza del campo B, e quello dell'atomo imperturbato. Si supponga che l'elettrone descriva un'orbita circolare e che il raggio r di tale orbita resti costante sia in assenza che in presenza del campo B.

Dati : $r=5{,}3\ 10^{-11}$ m ; $m_e=9{,}1\ 10^{-31}$ kg ; B=0,3 T.



Soluzione

Come prima cosa calcoliamo il momento magnetico dell'atomo in assenza di campo magnetico.

L'elettrone ruoterà su di un'orbita circolare a causa della forza di attrazione elettrostatica dovuta all'interazione con il nucleo.

$$|F_{es}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e \cdot \omega^2 r = m_e \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r$$

Da cui si può calcolare il periodo di rotazione T_0 in assenza di campo:

$$T_o = \frac{4\pi}{e}\sqrt{\pi\, m_e r^3 \varepsilon_0} = \frac{4\pi\, r}{e}\sqrt{\pi\, m_e r \varepsilon_0} \cong 1{,}52 \cdot 10^{-16}\, s$$

A questo periodo di rotazione con raggio r , dell'elettrone, corrisponde un momento magnetico:

$$|m_0| = i \cdot S = \frac{e}{T_0}\cdot \pi\, r^2 = \frac{r\, e^2}{4}\sqrt{\frac{1}{\pi m_e\, r\, \varepsilon_0}} \cong 9{,}28 \cdot 10^{-24}\ A/m^2$$

Applicando il campo B l'elettrone sarà sottoposto alla forza di Lorentz $\overline{F}_L = -e\,\overline{v} \times \overline{B}$ diretta verso l'esterno dell'orbita che si somma vettorialmente alla forza elettrostatica, per rappresentare la forza centripeta necessaria a mantenere l'elettrone sull'orbita.

$$|\overline{F}_L + \overline{F}_{es}| = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - e\, v\, B = \frac{m_e v^2}{r}$$

Risolvendo l'equazione rispetto a *v* si ottiene la nuova velocità dell'elettrone:

$$v = \sqrt{\left(\frac{eBr}{2m_e}\right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} - \frac{eBr}{2m_e}$$

dove, delle due soluzioni, è stata presa quella positiva.

Da cui il nuovo momento magnetico dell'elettrone sarà:

$$|m| = \frac{e}{T}\cdot \pi\, r^2 = \frac{ev}{2\pi r}\cdot \pi\, r^2 = \frac{r\,ev}{2} = \frac{r\,e}{2}\cdot\left[\sqrt{\left(\frac{eBr}{2m_e}\right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} - \frac{eBr}{2m_e}\right] =$$

$$= \frac{r\,e^2}{4}\cdot\left[\sqrt{\left(\frac{Br}{m_e}\right)^2 + \frac{1}{\pi\varepsilon_0 m_e r}} - \frac{Br}{m_e}\right] \cong \frac{r\,e^2}{4}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 m_e r}} - \frac{Br}{m_e}\right] =$$

$$|m_0| - \frac{Br^2 e^2}{4m_e}$$

La differenza fra i due momenti sarà $|m| - |m_0| = -\dfrac{Br^2e^2}{4m_e} = -5{,}9 \cdot 10^{-30}\ A\!\!\diagup\!_{m^2}$