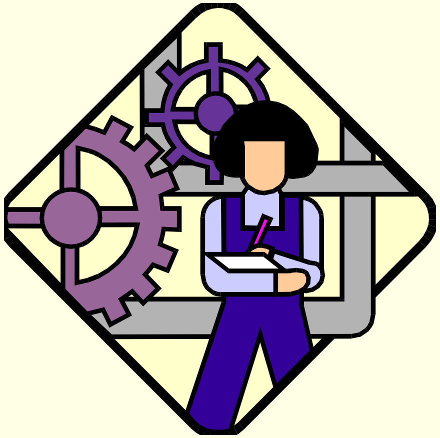
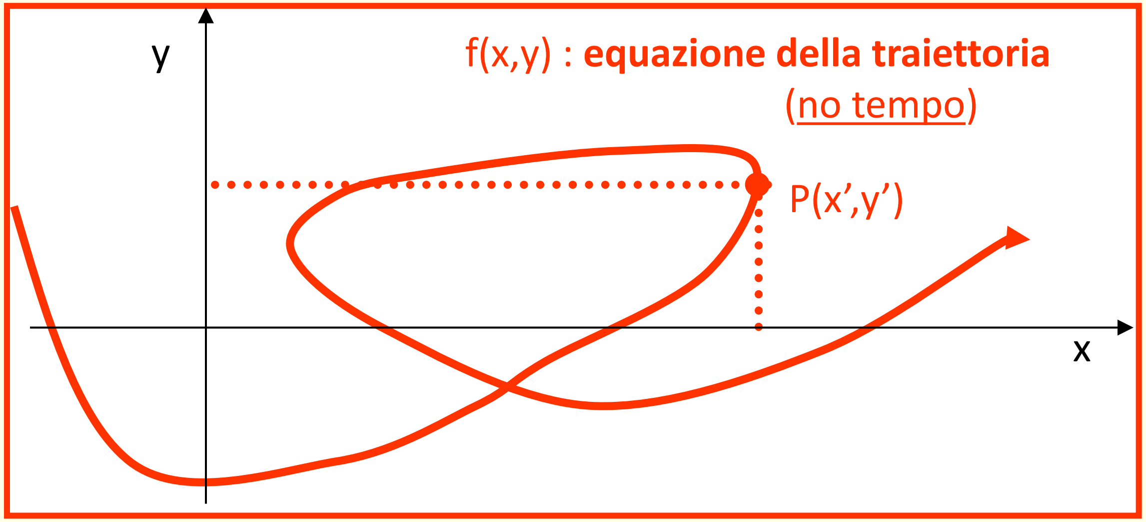
La Meccanica



- Cinematica, Statica, Dinamica.
- La cinematica studia il moto dei corpi in modo descrittivo, senza indagarne le cause.
- Cinematica = geometria analitica $\oplus$ evoluzione temporale.
- Moto in una $\rightarrow$ due, tre dimensioni.

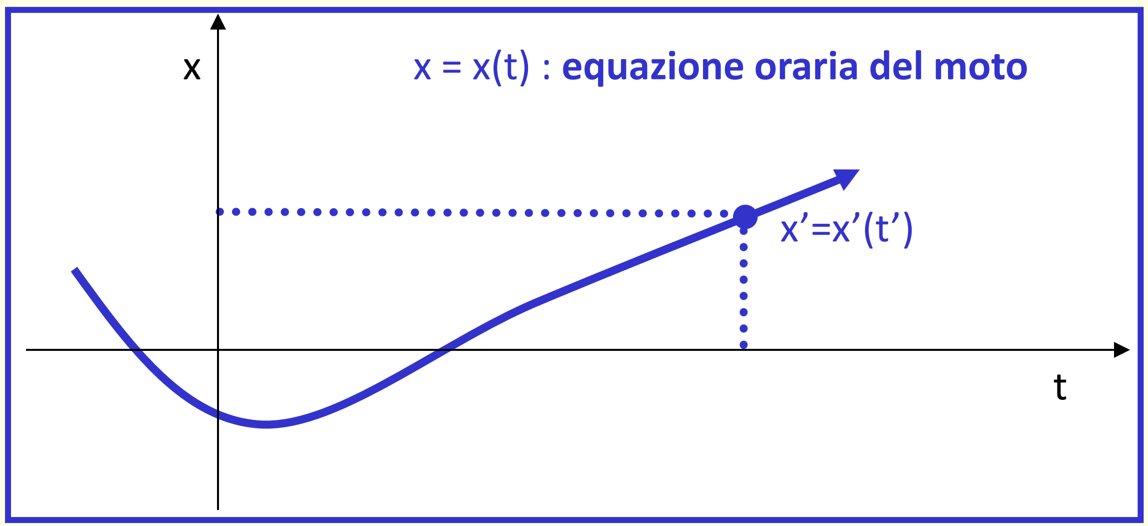
Rappresentazioni grafiche del moto



2 dimensioni

1 dimensione per volta

stesso moto, rappresentazioni differenti !!!



Velocità e accelerazione

Provvisoriamente solo in <u>una dimensione</u> (x).

- Spostamento Δx :

$$\boxed{\Delta x = x(t_2) - x(t_1)}$$

- Velocità media nel tempo t_1-t_2 (t_2-t_1 = Δt) :

$$\boxed{v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}}$$

- Velocità istantanea al tempo t :

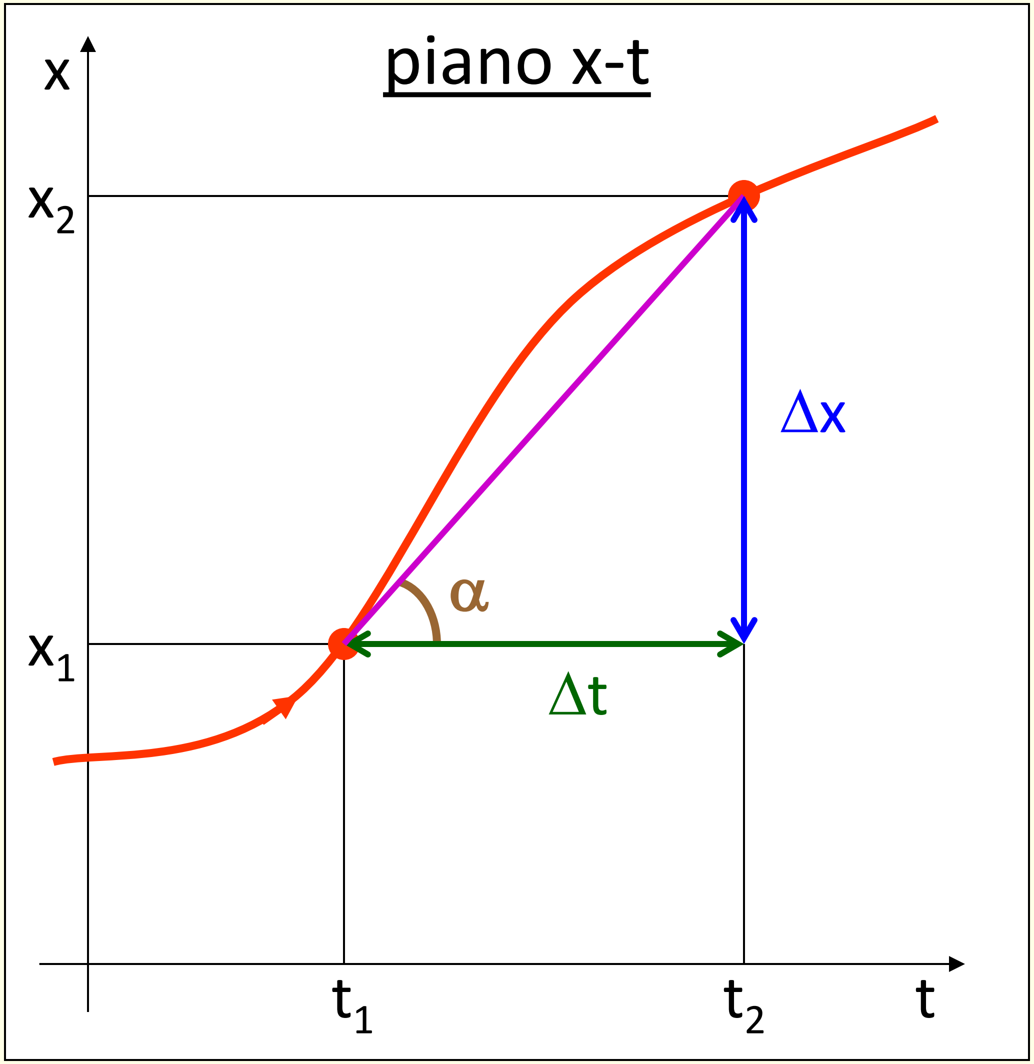
$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}}$$

- Accelerazione media e istantanea :

$$a_M = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t};$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

interpretazione geometrica



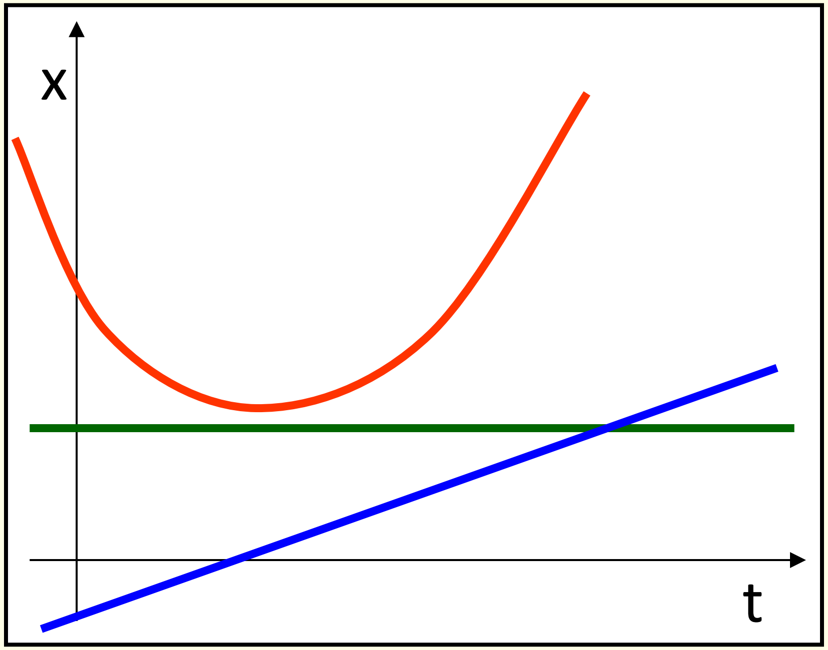
v_{Media} = Δx / Δt $\propto$ tan (α) è la pendenza del segmento (—) nel piano x-t;

$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$, cioè il triangolo diviene più piccolo, ma α resta quasi uguale;
la corda (—) diventa la tangente alla curva (—).

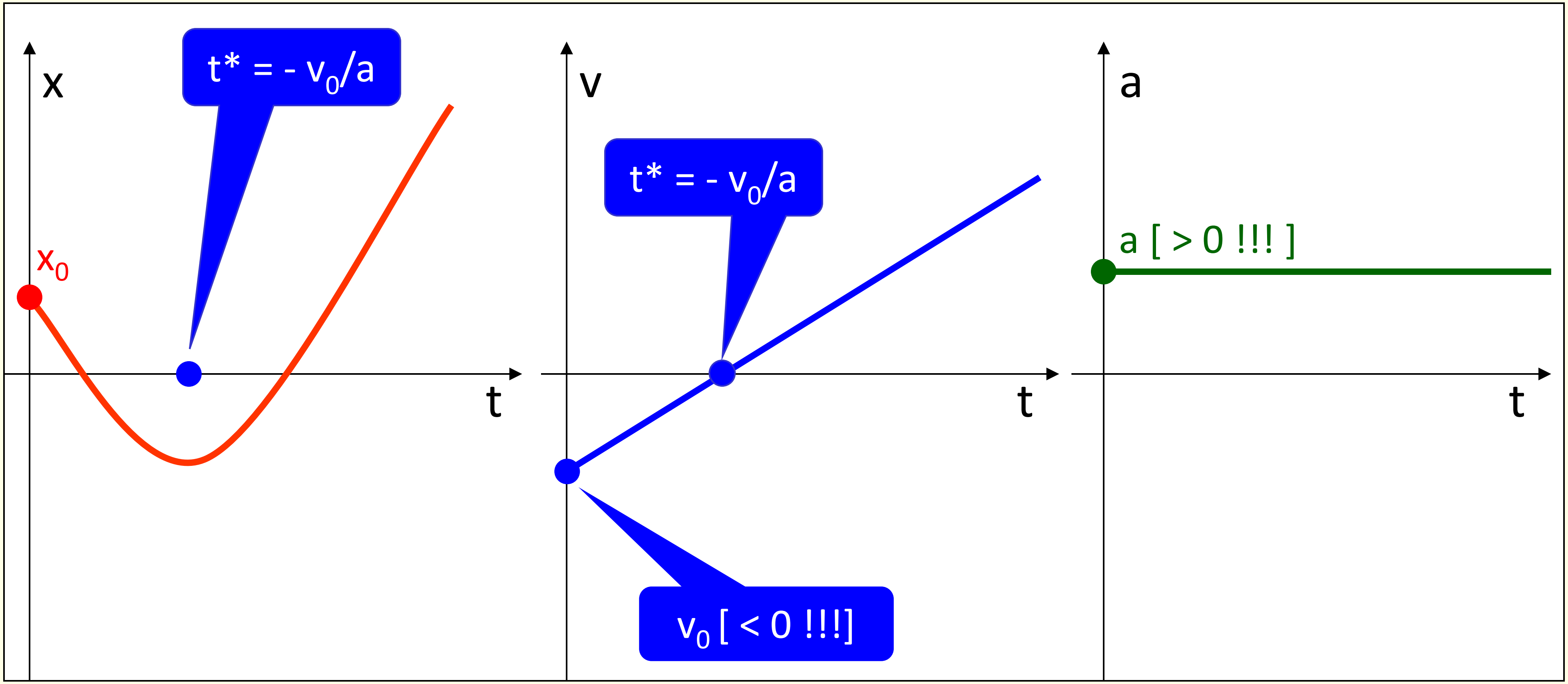
corrispondenza tra i concetti di "derivata", "pendenza", "tangente", "approssimazione lineare".

Esempi

- corpo fermo : $v=0,\ a=0\ ;\ x - x_0 = v\,(t - t_0) = 0 \rightarrow x = x_0.$
- moto uniforme : $v=\text{cost},\ a=0;$
  $x - x_0 = v\,(t - t_0) \rightarrow x = x_0 + v\,(t - t_0).$
- moto uniformemente accelerato :
  $a=\text{cost}\ ;\ [t_0 = 0]\ ;$
  $v(t) - v_0 = a \cdot t \rightarrow v(t) = v_0 + a\,t\ ;$
  $v_M = ½\,[\,v(t) + v_0\,] = v_0 + ½\,a\,t\ ;$
  $x - x_0 = v_M\,t$
  $\rightarrow x = x_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2.$



moto uniformemente accelerato



$x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$; $v = v_0 + a\, t$; $a = \text{cost.}$

Esempio (caduta dei gravi)

moto uniformemente accelerato

$a = - g$ ← costante di gravità

↑ scelta del sistema di riferimento (verso l'alto)

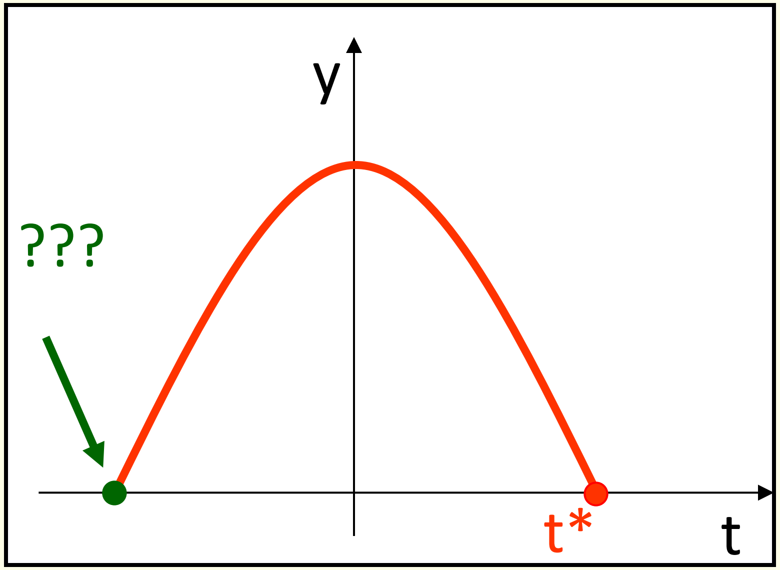
$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2;$

se : $v_0 = 0$; $a = - g$;

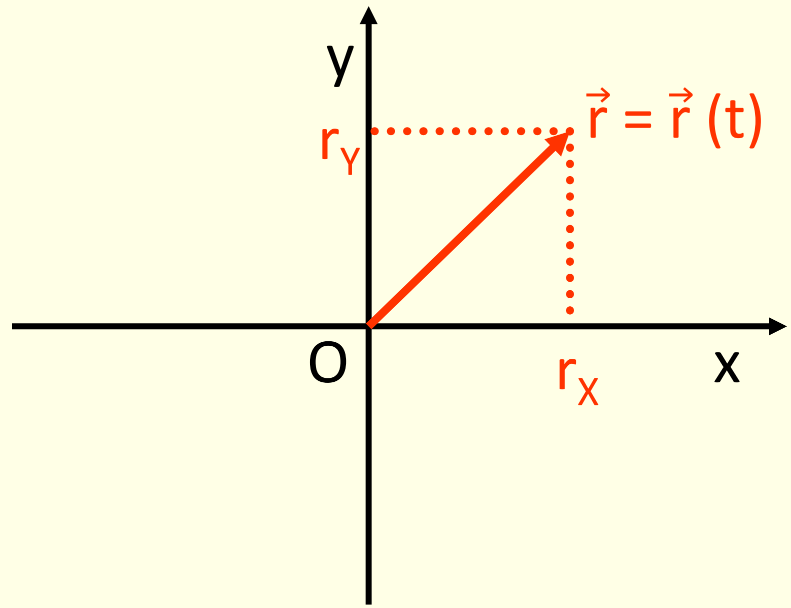
$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2.$

Ex. : trovare t* per cui $y(t^*) = 0$;

$$y_0 - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0 \longrightarrow t^* = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$



Vettori



molte grandezze fisiche possono essere rappresentate da vettori [ex. punti nello spazio, velocità, ...]

un vettore in 3D ha bisogno di 3 "numeri" per essere definito [ex. componenti x,y,z

- OPPURE -

modulo + 2 angoli]

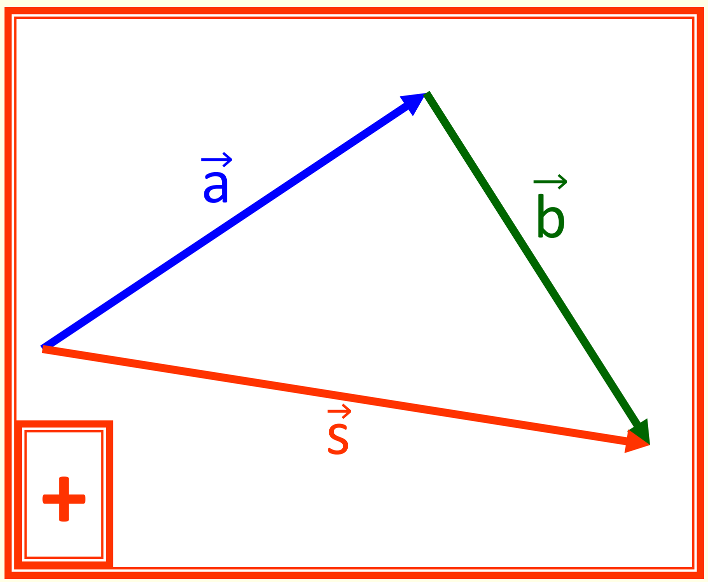
NB :

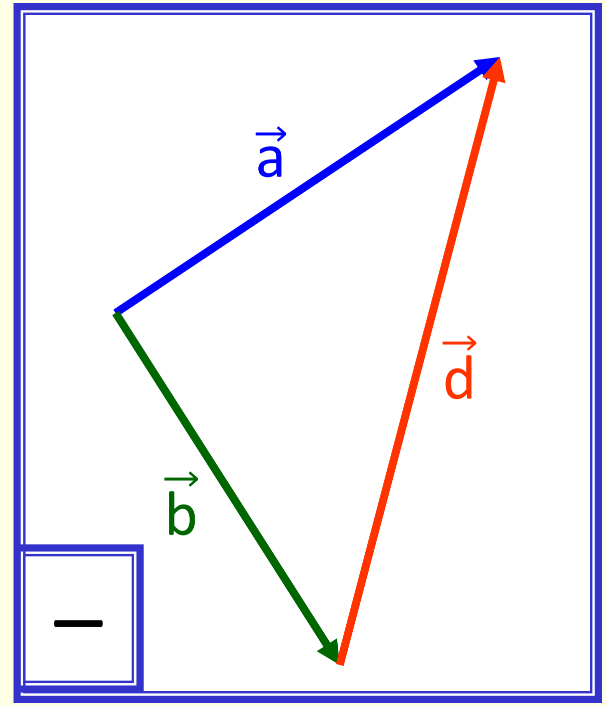
- nel disegno, solo due dimensioni (x,y), aggiungere la terza (z);
- si può scrivere **r** oppure $\vec{r}$;
- il simbolo r [oppure $|\vec{r}|$] è il modulo del vettore $\vec{r}$.

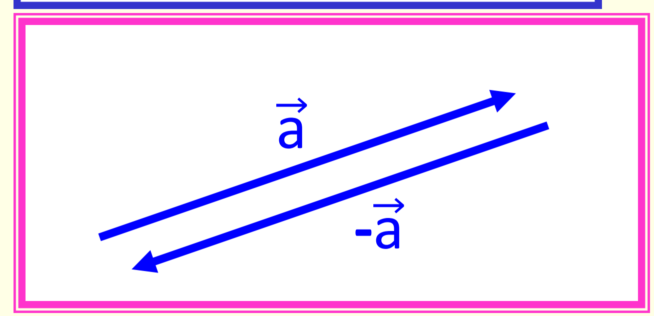
Operazioni tra vettori [1]

somma $\quad \vec{s} = \vec{a} + \vec{b}\,;$

differenza $\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}\,.$



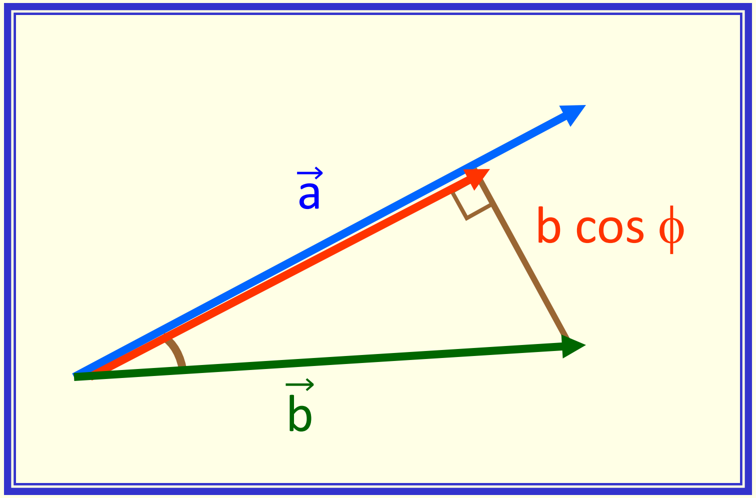


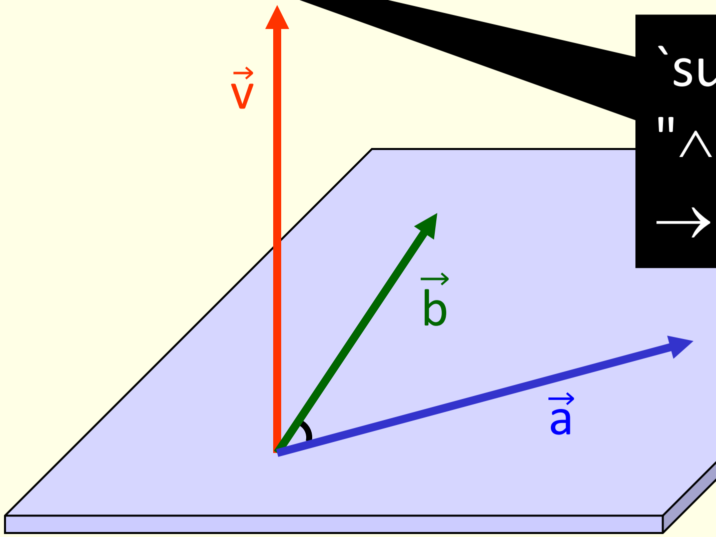


Operazioni tra vettori (2)

prodotto "scalare" $s = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$;

prodotto "vettoriale" $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$; $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\phi|$.





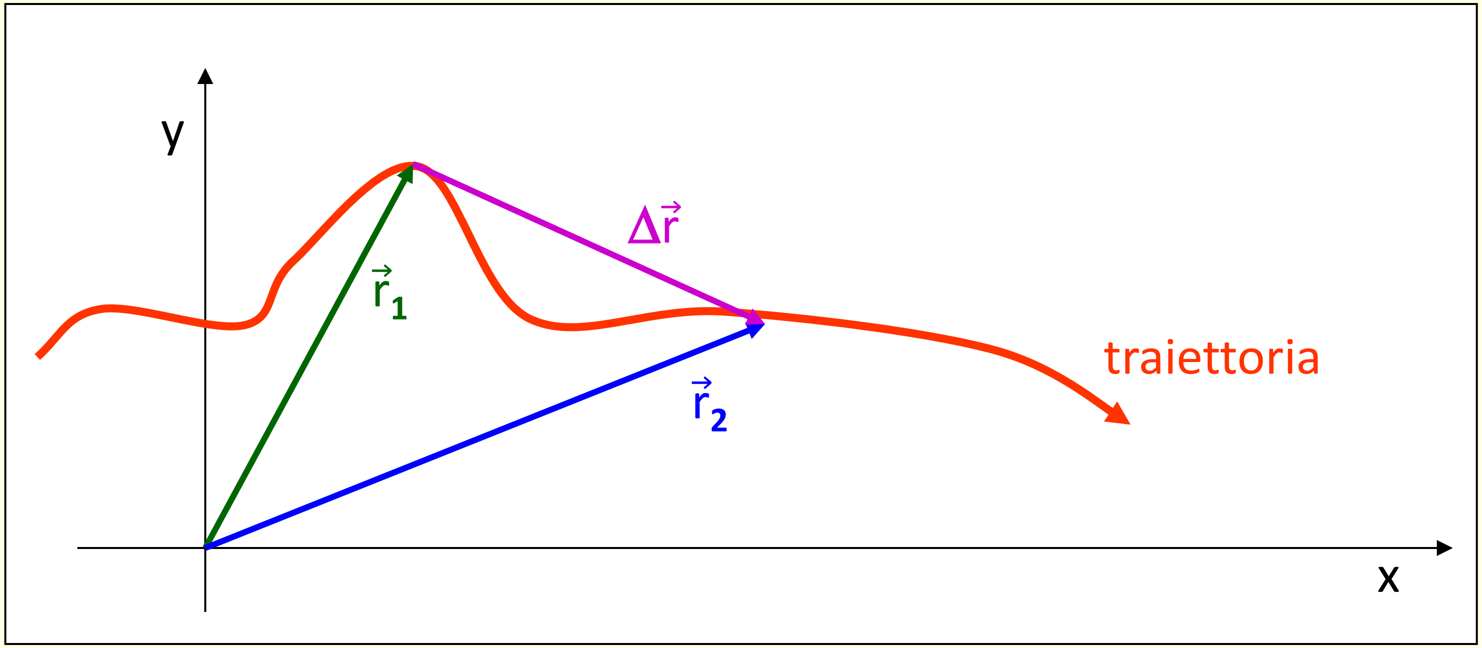
`su alcuni libri "∧" invece di "×" → $\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Velocità, accelerazione $\rightarrow$ vettori

- posizione $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_1+\Delta t) - \vec{r}(t_1)$
- velocità media $\vec{v}_M = \Delta\vec{r} \,/\, \Delta t$
- velocità istant. $\vec{v} = d\vec{r} \,/\, dt$

  $[v_x=dx/dt;\ v_y=dy/dt;\ v_z=dz/dt]$
- accelerazione media $\vec{a}_M = \Delta\vec{v} \,/\, \Delta t$
- accelerazione istant. $\vec{a} = d\vec{v}(t)/dt = d^2\vec{r}(t)/dt^2$.

vettore posizione e velocità

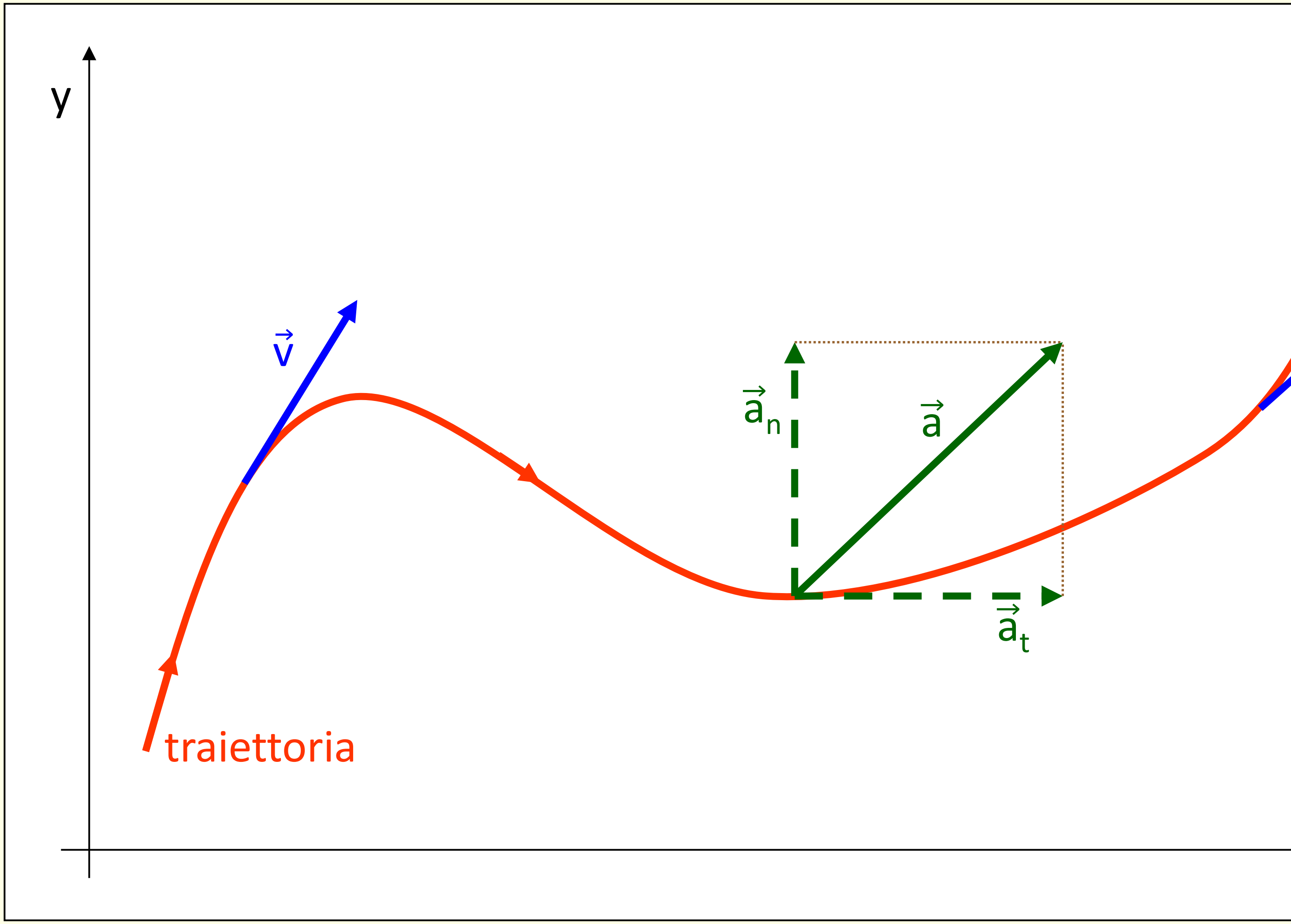


- posizione $\vec{r}_1$ al tempo t_1, $\vec{r}_2$ al tempo t_2 ;
- spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$;
- velocità media $\vec{v}_M = \Delta\vec{r} / \Delta t$ (direzione e verso = $\Delta\vec{r}$).

Velocità e accelerazione

- la velocità istantanea è <u>tangente</u> alla traiettoria (conseguenza della definizione);
- viceversa, l'accelerazione non ha sempre la stessa direzione;
- possiamo scomporla in due componenti [prossima pag.] :
  - componente parallela alla velocità (accelerazione <u>tangenziale</u>); modifica <u>solo</u> il *modulo* della velocità;
  - componente ortogonale alla velocità (accelerazione <u>normale</u>); modifica <u>solo</u> la *direzione* della velocità;
  - [esempi : l'acceleratore e il volante dell'automobile]

Accelerazione tangenziale e normale



$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$;

$\vec{a}_n \cdot \vec{v} = 0$;

$\vec{a}_t \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v}$.

Esempio: moto dei gravi in 2 dimensioni

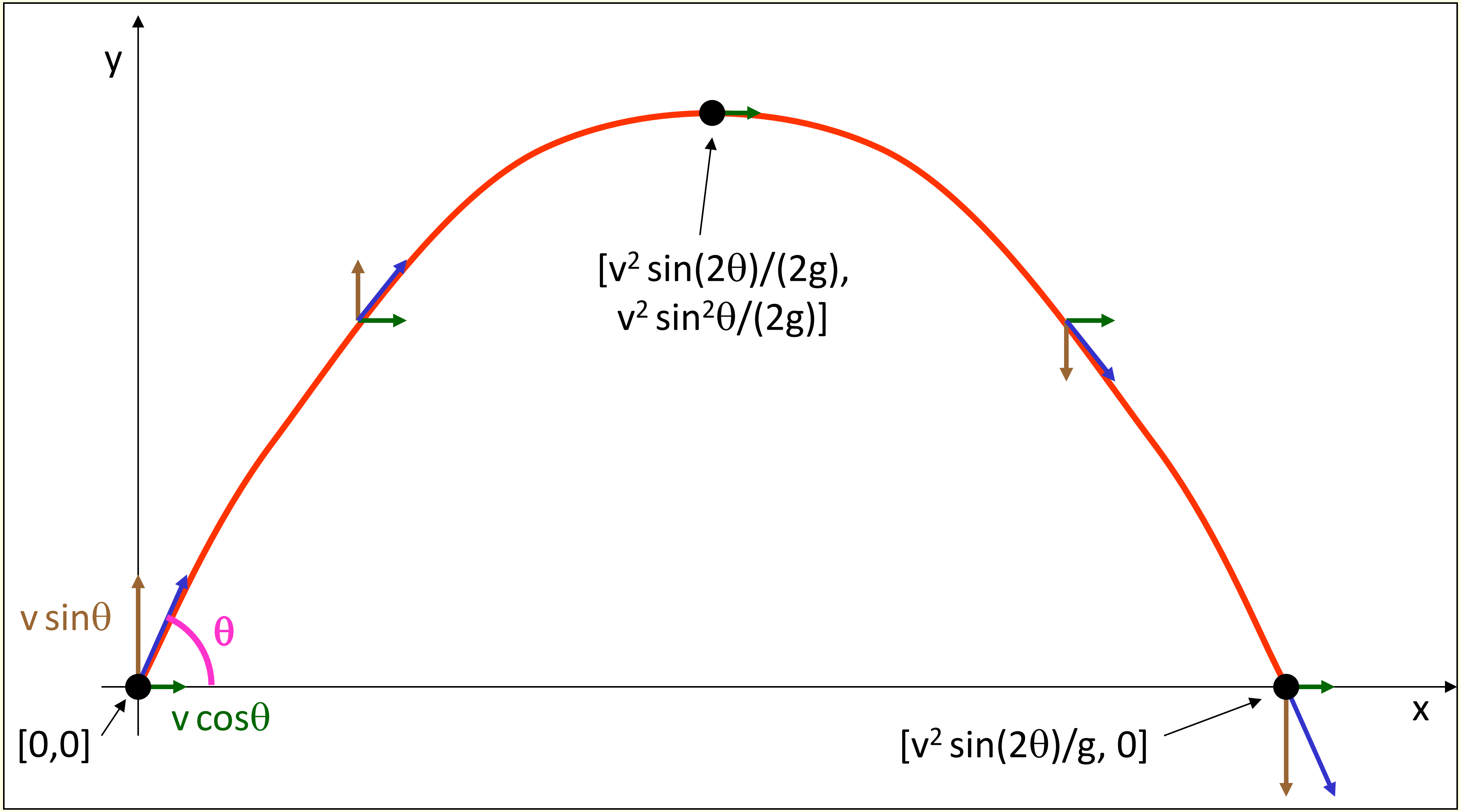
Asse x	→	$x_0 = 0;$	$v_0^x = v \cdot \cos\theta;$	$a^x = 0$
Asse y	↑	$y_0 = 0;$	$v_0^y = v \cdot \sin\theta;$	$a^y = -g$

$$\begin{cases} x(t) = v \cdot \cos\theta \cdot t \\ y(t) = v \cdot \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

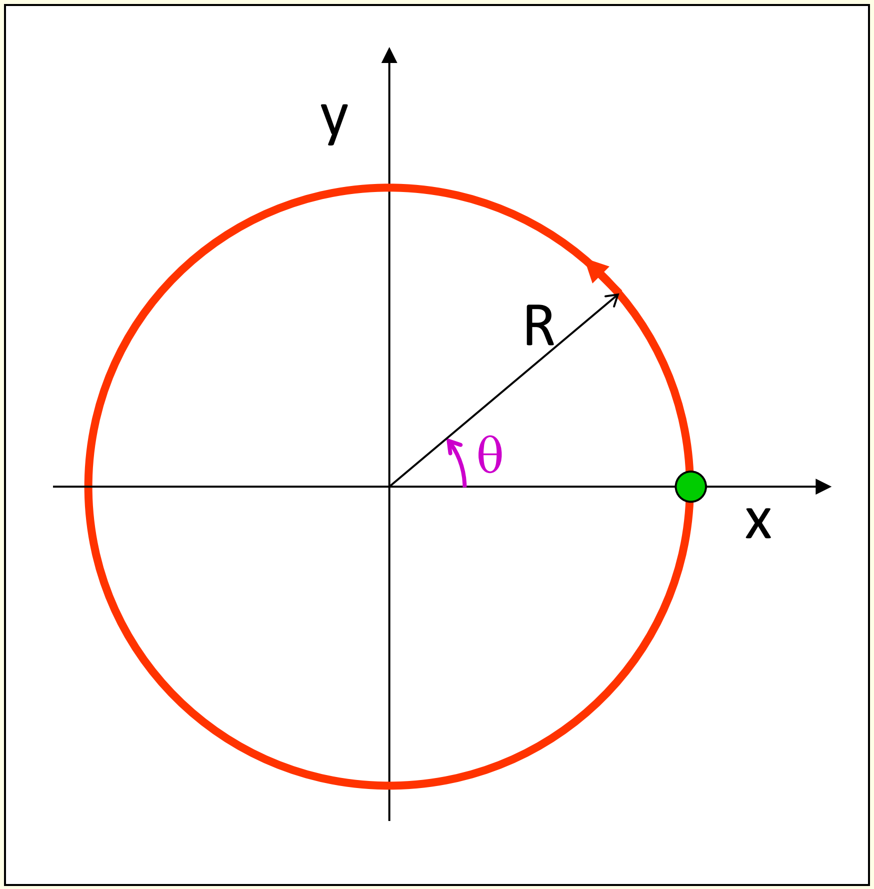
$$t = \frac{x}{v \cdot \cos\theta};$$

$$y = x \cdot \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v^2 \cos^2\theta}.$$

moto dei gravi in 2 dimensioni



Moto circolare uniforme



$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} = \text{velocità angolare}$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = R \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

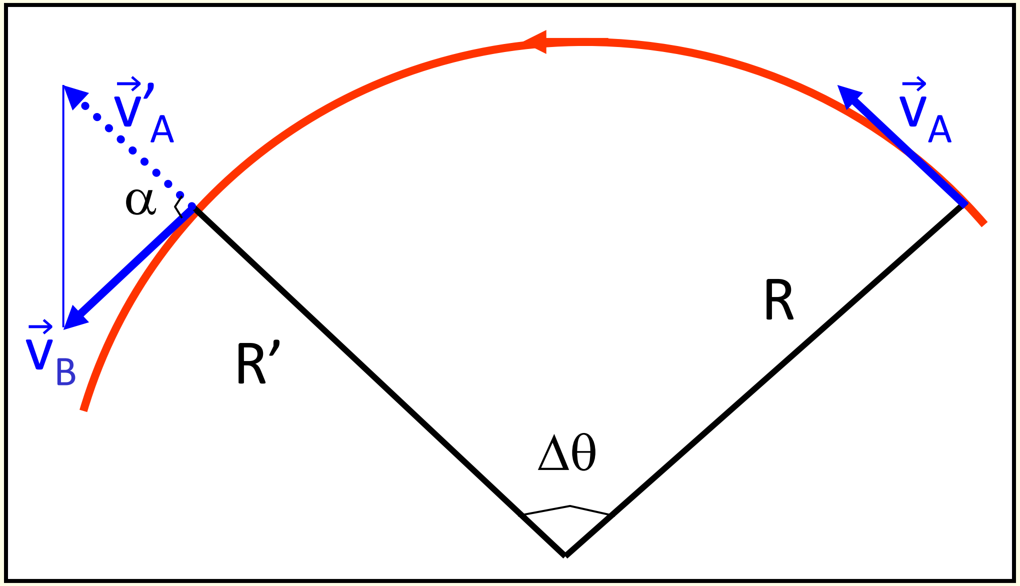
$$\begin{cases} v^x = -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ v^y = \omega R \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v &= \omega R \\ \omega &= v / R \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} a^x = -\omega^2 R \cdot \cos(\omega t) \\ a^y = -\omega^2 R \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= \omega^2 R \\ &= v^2 / R \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$$

[notare "→" e "-"]

Moto circolare uniforme : accelerazione



def. di accelerazione media

triangolo $v'_A v_A$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}'_A| = |\vec{v}_B| \\ \vec{v}'_A \perp \vec{R} \\ \vec{v}_B \perp \vec{R}' \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \Delta\theta$$

$$|\vec{a}_M \cdot \Delta t| = |\vec{v}_B - \vec{v}_A| = 2v\sin(\alpha/2) = $$
$$= 2v\sin(\Delta\theta/2) \xrightarrow[t\to 0]{} v\cdot\Delta\theta$$

$$|\vec{a}| = \frac{d\theta}{dt}\cdot v = \omega\cdot v = \omega^2 R = v^2/R$$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\theta \to 0 \Rightarrow \vec{v}_a \to \vec{v}_b \Rightarrow \alpha \to 0$
$\Rightarrow \vec{a} \to$ punta verso il centro.

Le unità di misura

Unità fondamentali :

- **metro** (**m**) : in origine 1/40 000 000 della circonferenza terrestre → definito in modo che c=299 792 458 m/s;
- **secondo** (**s**) : in origine 1/(24x60x60) del giorno solare medio → definito dalla frequenza della luce emessa dal Cesio 133 (1 s = T^{cesio} x 9 192 631 770;
- **massa** (**Kg**) : chilogrammo campione - oppure in funzione delle masse atomiche.

Sistema "MKS" (esiste anche il sistema "CGS") + unità derivate (ex. velocità : spazio / tempo → m/s.

Unità derivate

Si definiscono nuove unità di misura, derivate dalle unità fondamentali. Ex. :

- velocità = dx/dt → misurata in m/s;
- accelerazione = d^2x/dt^2 → misurata in m/s^2.

Dimensioni delle grandezze fisiche

Tutte le grandezze fisiche sono definite a partire da *poche* grandezze fondamentali.

Ex., in meccanica, sono sufficienti **TRE** grandezze fondamentali.
Scegliamo : L, T, M.

Conseguenza : ogni altra grandezza può essere espressa in funzione di LTM [*equazioni dimensionali*]. Ex.

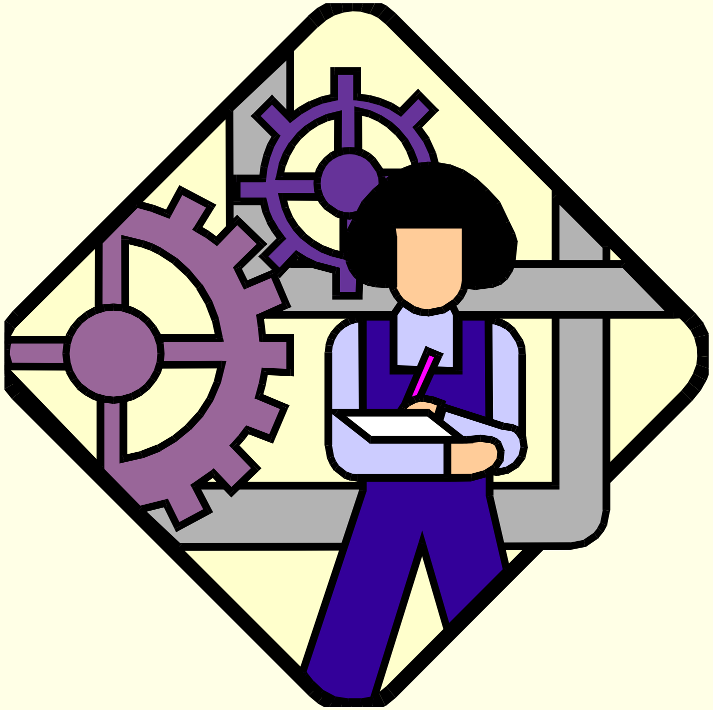
$[v] = [L \cdot T^{-1}]$; $[a] = [L \cdot T^{-2}]$; $[f] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$.

NB : si confrontano, sommano, sottraggono solamente grandezze omogenee, cioè con le stesse dimensioni. Ex. $v_1 = v_2 + v_3$.

→ Gli argomenti di funzioni trascendenti sono "numeri puri".
Ex. $x = R \cdot \sin(\omega t)$ ove $[x] = [R] = [L]$, $[\omega] = [T^{-1}]$.

La Meccanica del punto

- Le TRE leggi fondamentali;
- esempi di forze;
- lavoro ed energia;
- forze conservative – energia potenziale;
- conservazione dell'energia;
- oscillazioni.



Leggi fondamentali della dinamica

[I. Newton, ~ 300 anni fa]

- dal punto di vista formale, postulati da cui è possibile derivare altre leggi come teoremi.
- scelte in modo che esse, e le loro conseguenze, siano in accordo, entro le precisioni di misura, con le osservazioni sperimentali.
- nel tempo, nuovi fenomeni (e/o migliore precisione) → miglioramenti successivi; le vecchie leggi sono prime approssimazioni delle nuove (ex. relatività speciale, meccanica quantistica).

prima legge

"Un corpo non soggetto ad interazioni, permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme".

sembra che l'unica difficoltà sia superare la concezione aristotelica delle forze, ma in realtà è una legge "difficile" :

- si richiede la conoscenza delle ***interazioni***, a priori dal loro effetto sul moto dei corpi (altrimenti è un enunciato "circolare");
- obiezione : si può sempre trovare un **sistema di riferimento** in cui il principio sia soddisfatto (ex. un sistema solidale con il corpo allo studio), in modo che il principio sia banalmente valido per tutti i corpi, soggetti ad interazioni, oppure no.

¿ come si risolve questo problema ?

soluzione

Prima legge modificata : "In un **sistema di riferimento inerziale**, un corpo non soggetto ad interazioni permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme".

- la legge (modificata) dice che il moto dei corpi si può studiare solo nei sistemi in cui non compaiono anomalie, cioè accelerazioni non dovute ad interazioni;
- dato un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi, in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso, sono anche essi dei sistemi di riferimento inerziali;
- dal punto di vista della dinamica, quiete e moto rettilineo uniforme sono equivalenti.

[NB. non abbiamo fatto ricorso al concetto di “stelle fisse” (?!)]

seconda legge

"Una forza impressa ad un corpo produce un'accelerazione parallela alla forza e ad essa proporzionale; la costante di proporzionalità ("*massa*") non dipende dalla forza, ma dalle proprietà intrinseche del corpo."

$$\vec{f}=m\vec{a}$$

- richiede la conoscenza delle *forze*, a priori dal loro effetto sul moto dei corpi (altrimenti è un enunciato "circolare");
- il coefficiente "*m*" è la *massa* di un corpo :
  - la massa non dipende dallo stato di quiete o di moto del corpo;
  - la massa si mantiene identica per tutta la vita di un corpo.

le forze

- la seconda legge è la base di tutta la dinamica :
  - osservando la natura, si descrivono le forze con leggi matematiche;
  - quindi, applicando la seconda legge, si calcola il moto dei corpi **[in sistemi inerziali !!!]** ;

- le forze sono vettori <u>additivi</u> : ex., se su un corpo si esercitano due forze ($\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$), vale la legge :

$$m\,\vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{f}_{tot}$$

Unità di misura della forza

$[F] = [m] \cdot [a] = [m \cdot l \cdot t^{-2}]$

si misura in Newton (MKS) o in dine (CGS);

$1\ N = 1\ Kg \cdot 1\ m / 1\ s^2$;

$1\ dine = 1\ g \cdot 1\ cm / 1\ s^2 = 1\ N / 10^5$.

terza legge

"Quando un corpo *A* imprime una qualsiasi forza $\vec{f}_{AB}$ su un corpo *B*, automaticamente il corpo *B* imprime su *A* una forza $\vec{f}_{BA}$ uguale in modulo e direzione ed opposta in verso".

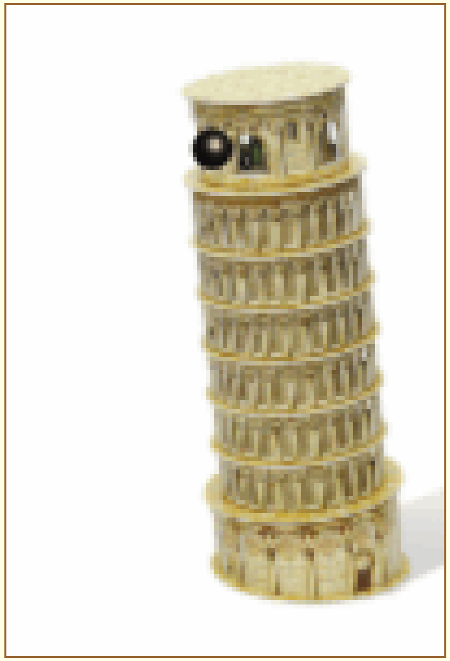
Principio di azione e reazione:

$$\vec{f}_{AB} = - \vec{f}_{BA}$$

- non è particolarmente difficile : molti esempi pratici (nuoto, barche a remi, ecc.);
- nei sistemi isolati, la somma vettoriale di tutte le forze (cioè la forza totale) è sempre nulla, perché nella somma tutte le forze tra corpi, comunque complicate, si cancellano due a due.

La forza peso [1]

un famoso esperimento (probabilmente mai avvenuto nel modo tradizionalmente tramandato) :



- esperimento : i corpi cadono tutti con la stessa traiettoria e nello stesso tempo;
- cinematica : pertanto tutti i corpi sono soggetti alla stessa accelerazione (diciamo "$\vec{g}$”");
- seconda legge : ciò è possibile solo se $\vec{f} \propto m\,\vec{g}$:

$$m\,\vec{a} = \vec{f} \propto m\,\vec{g} \rightarrow \vec{a} \propto \vec{g} \quad \text{[per tutti i corpi]}$$

NB : i segni "=", "$\propto$" hanno significato differente :
1. legame tra forza, massa e accelerazione (II legge);
2. espressione <u>empirica</u> della forza peso.

La forza peso [2]

$$\vec{f} = m_g \cdot \vec{g}$$

accelerazione di gravità [costante, = 9.8 m/s^2, verso il basso]

massa (meglio, “massa gravitazionale”)

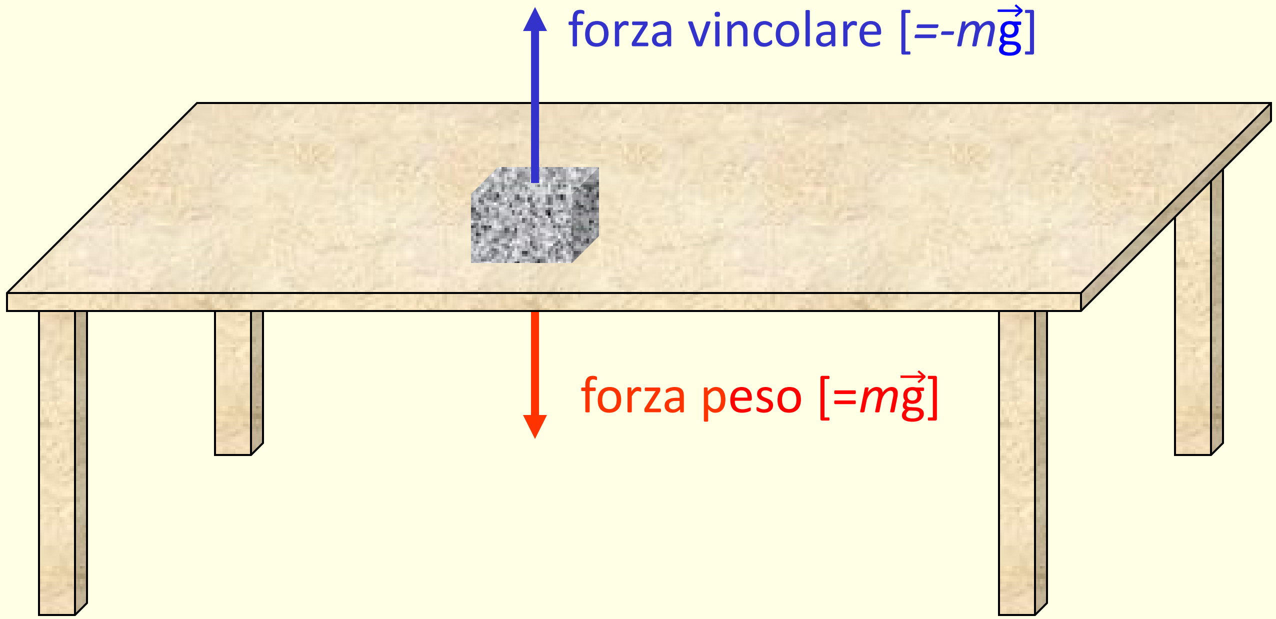
forza

- $\vec{g}$ è diretta verso il basso (vedi oltre, “gravitazione”);
- $m_g = m$ per tutti i corpi; cioè la "massa" che compare nel secondo principio è identica (*meglio, è proporzionale*) a quella che compare nella forza peso e nella legge di gravitazione (*perché ??? nella fisica classica non si sa, vedi Relatività Generale*);
- conseguenza : l’accelerazione di caduta è la stessa per tutti i corpi (a = g), ed è indipendente dalla massa.

vincoli

- esempi : tavoli, rotaie, fili inestensibili, ...
- il "trucco" consiste nel sostituire nel calcolo il vincolo con una <u>forza ortogonale</u> al vincolo, che produca lo <u>stesso effetto</u> sul moto.

Ex. :



i vincoli nel moto circolare uniforme

$|\vec{a}| = v^2 / r$ ➡ $|\vec{f}| = m\, v^2 / r$

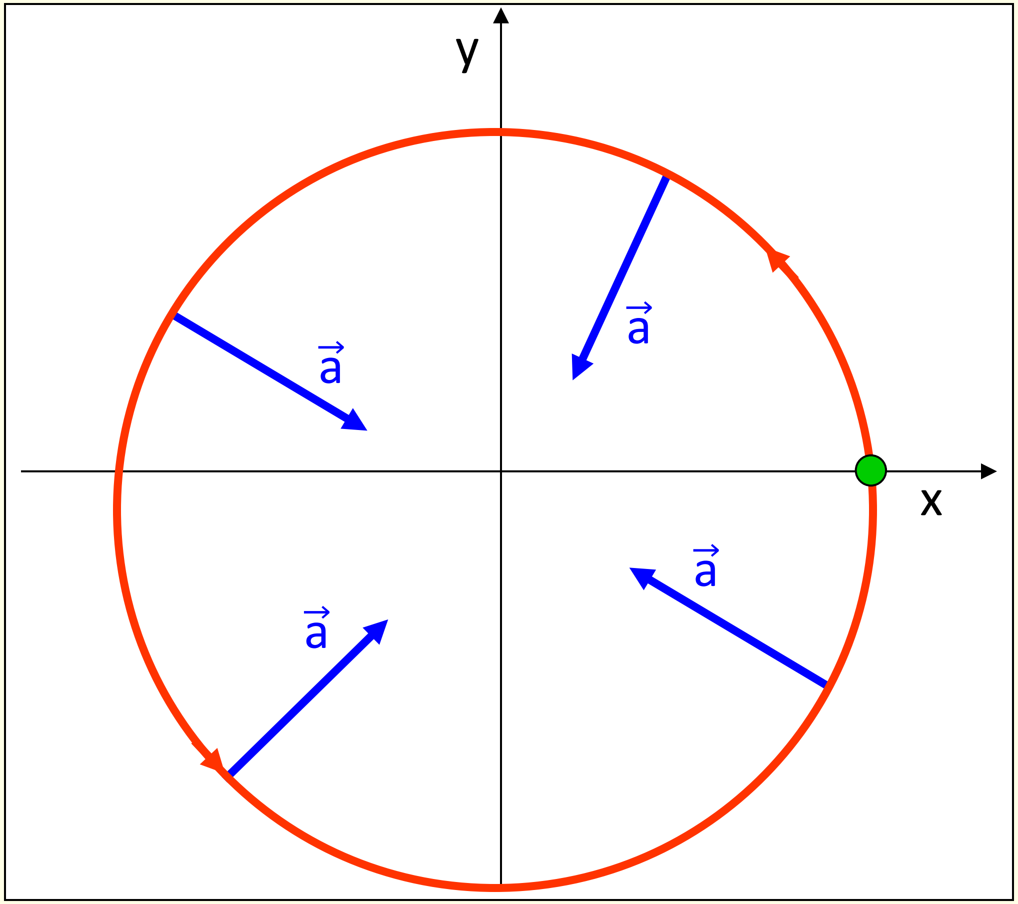
la forza è diretta

verso il centro

(<u>forza centripeta</u>)

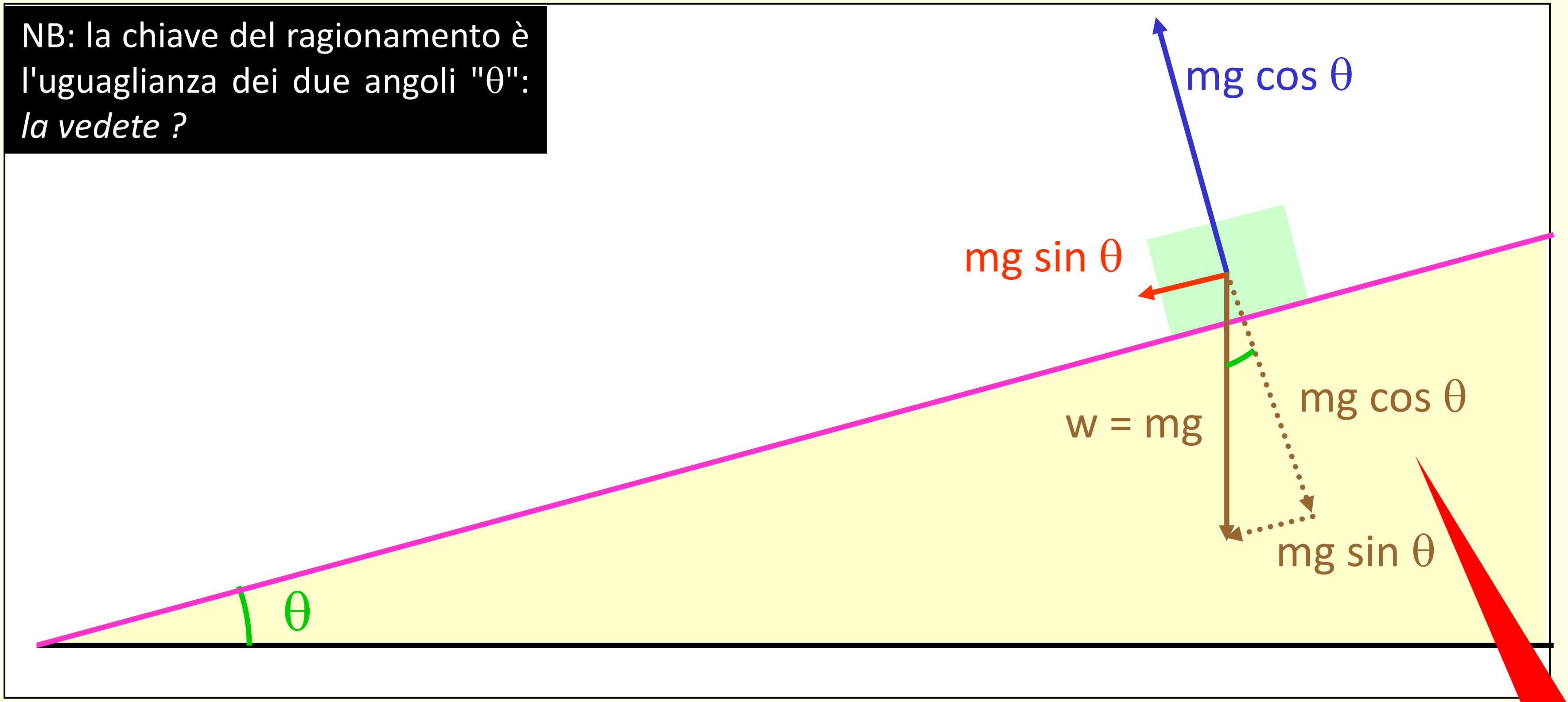
in pratica, si può usare

un filo robusto (vincolo)



il piano inclinato

NB: la chiave del ragionamento è l'uguaglianza dei due angoli "θ": *la vedete ?*



piano inclinato (caso senza attrito)

nel disegno le lettere indicano i moduli dei vettori, le "→" le direzioni.

scomposizione delle forze

- esempio classico : il piano inclinato ;
- la forza peso ($\overrightarrow{W}_{tot}$) è diretta verso il basso;
- scomposizione :
  - sia θ l'angolo del piano inclinato;
  - *mg cos* θ ortogonale al piano inclinato, bilanciata dalla forza vincolare;
  - *mg sin* θ efficace, parallela al piano inclinato.
- cioè, lungo il piano inclinato :

$$m\, a_{\text{p.i.}} = w \sin\theta = m\, g \sin\theta$$

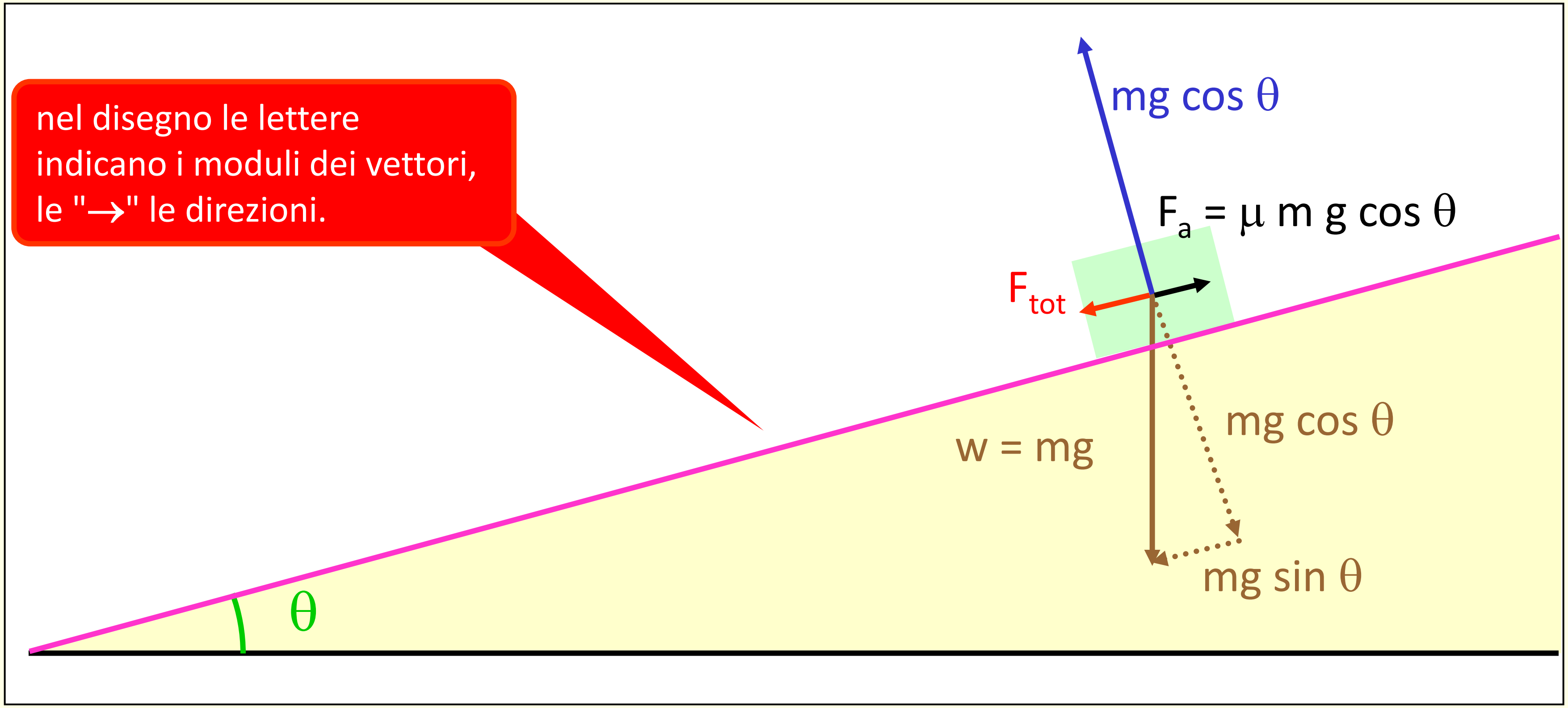
"come se" l'accelerazione di gravità *g* fosse minore ($\times$ *sin* θ) e diretta lungo il p.i. .

forze di attrito

Due tipi di attrito :

- attrito statico (impedisce l'inizio del moto) :
  - opposto alle forze che agiscono sul corpo;
  - valore <u>massimo</u> : $|\vec{f}|_{stat}(max) = \mu_s N = \mu_s m g$ (in modulo, la direzione è differente !!!).
- attrito dinamico (agisce durante il moto) :
  - $|\vec{f}| = \mu_d N = \mu_d m g$
  - direzione e verso = $-\vec{v}$
- i coefficienti μ_s e μ_d sono differenti ($\mu_d < \mu_s$) e dipendono dalle superfici dei corpi e dalla presenza di lubificanti, polveri, etc. (cioè dalla presenza di asperità che impediscano lo scorrimento relativo delle superfici).

il piano inclinato + attrito



piano inclinato (caso con attrito dinamico)

il lavoro

- Si definisce lavoro L di una forza $\vec{f}$ su un corpo che si sposta di un tratto $\vec{d}$:

$$\boxed{L = \vec{f} \cdot \vec{d} = |\vec{f}|\ |\vec{d}| \cos\theta}$$

- $L > 0$ se $\vec{f}, \vec{d}$ concordi ($\theta < 90°$);
- $L < 0$ se $\vec{f}, \vec{d}$ discordi ($\theta > 90°$);
- $L = 0$ se $\vec{f}, \vec{d}$ ortogonali ($\theta = 90°$).

ex. a) caduta di un grave da fermo (forza peso) : $L = m\ g\ h$;

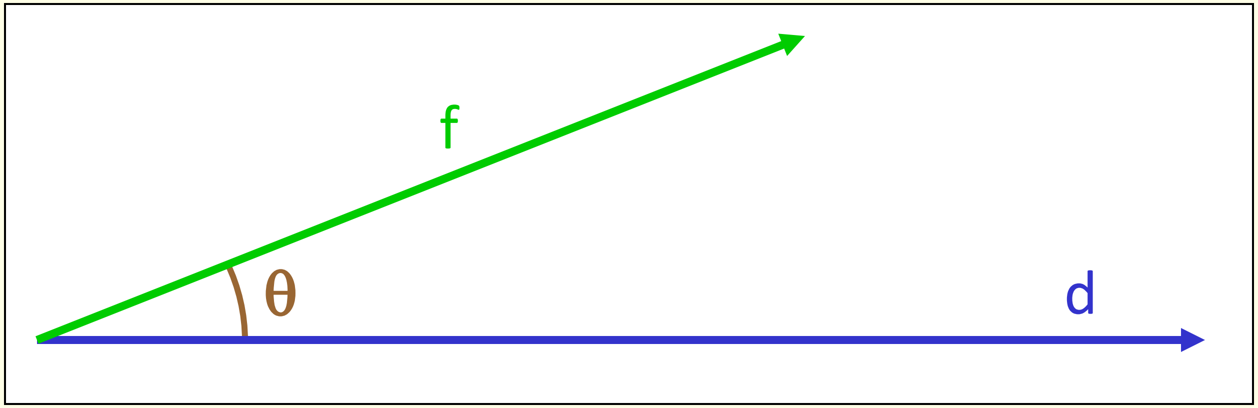
b) attrito dinamico : $L < 0$;

c) attrito statico : $L = 0$;

d) moto circolare uniforme (forza centripeta) : $L = 0$;

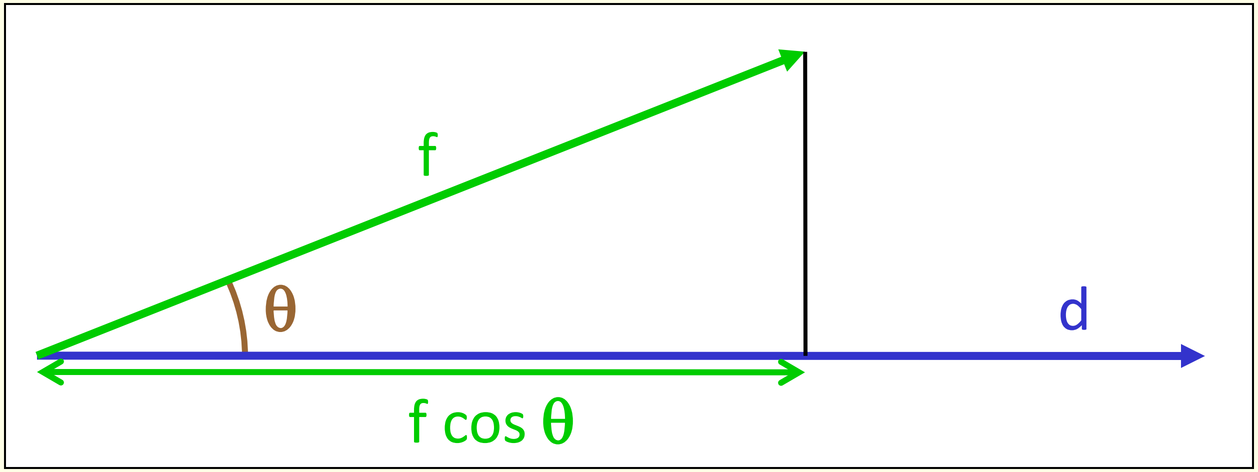
NB. $\vec{f}$ può non essere l'unica forza che agisce sul corpo; si parla di "*lavoro di una forza su un corpo*".

definizione del lavoro



$$L = \vec{f} \cdot \vec{d}$$

definizioni perfettamente identiche

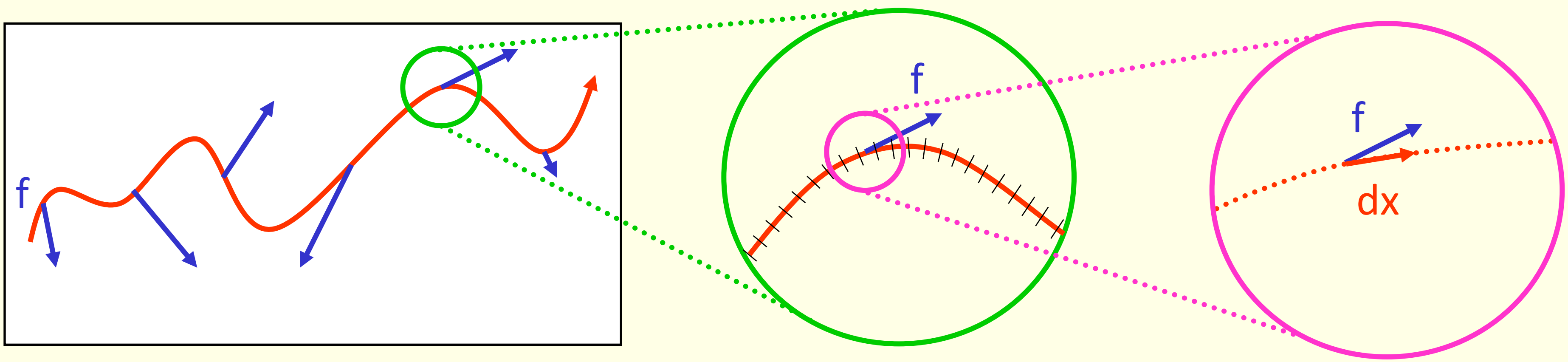


$$L = f \cos\theta \times d$$
$$= f \times d \cos\theta$$

lavoro di forze variabili

L'espressione precedente può essere "non definita" se una (o più) delle grandezze in gioco varia in modulo e/o in direzione durante il tragitto.

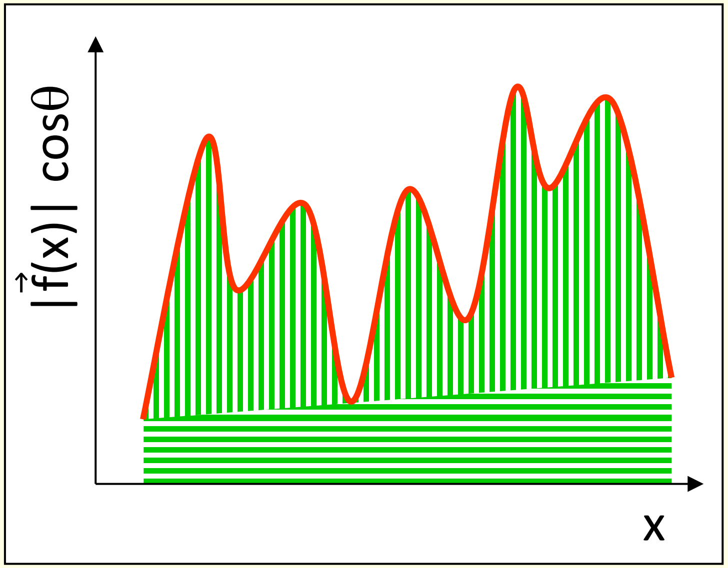
In tale caso occorre scomporre il cammino in intervalli piccoli (al limite, infinitesimi) e considerare il lavoro totale come la somma dei lavori parziali : $dL = \vec{f} \cdot d\vec{x}$.



lavoro di forze variabili

Ciò corrisponde a fare una somma ($\rightarrow$ un integrale), ciascun addendo della quale è un prodotto scalare tra la forza nel punto considerato e un vettore spostamento molto piccolo ($\rightarrow$ infinitesimo).

$$L = \int dL = \int \vec{f} \cdot d\vec{x}$$



unità di misura del Lavoro

[e di <u>tutte</u> le grandezze con le stesse dimensioni*]

$[L] = [F\, d] = [m\, l^2\, t^{-2}]$

MKS : J = joule = 1 newton · 1 metro;

CGS : erg = 1 dine · 1 centimetro = 1 J / 10^7.

____

* Energia cinetica, Energia potenziale, Calore, Energia interna, … (vedi nel seguito).

energia cinetica

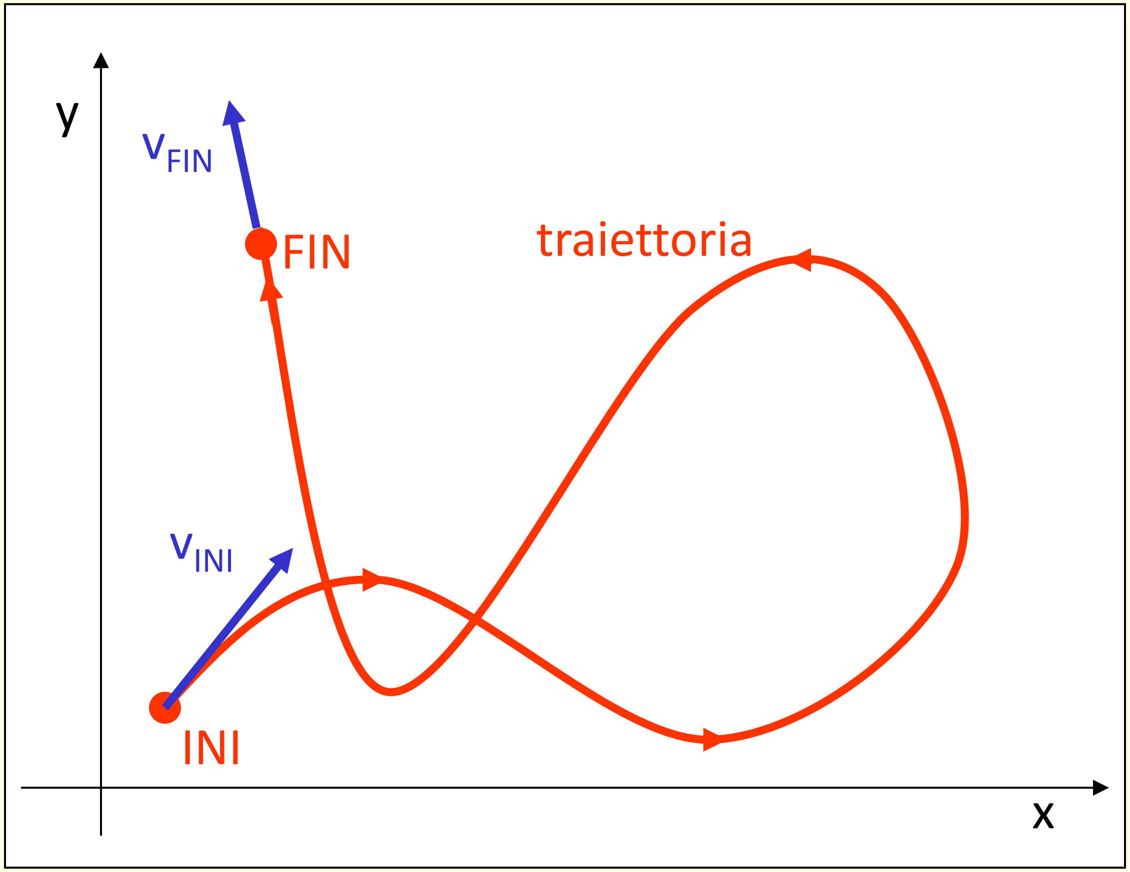
- Un corpo, di massa m e velocità v (modulo), possiede un'*energia cinetica* data da :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

- K dipende solo dal modulo della velocità, non da direzione e verso;
- $[K] = [\, m\, v^2\,] = [\, m\, l^2\, t^{-2}\,] = [\, L\,]$
- pertanto K si misura in J (erg).

teorema dell'energia cinetica

Il lavoro totale delle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso :



$$L = \Delta K = K_{FIN} - K_{INI}$$

- valido per qualsiasi forza e qualsiasi corpo (purché sia il lavoro della ***forza totale***);
- correla grandezze differenti:
  - lavoro (forze e spostamento);
  - energia cinetica (massa e velocità).

teorema dell'energia cinetica [2]

Dimostrazione (caso unidimensionale con accelerazione costante)

$$a_{\text{media}} = \frac{\text{v-v}_o}{\Delta t};$$

$$x = x_o + \text{v}_o \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a(\Delta t)^2;$$

$$x - x_o = \Delta x = \text{v}_o \Delta t + \frac{1}{2}(\text{v} - \text{v}_o)\Delta t =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\text{v} + \text{v}_o)\Delta t.$$

$$L \quad = F \cdot \Delta x = m \cdot a \cdot \Delta x =$$

$$= m \cdot \frac{\text{v-v}_o}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2}(\text{v+v}_o)\Delta t =$$

$$= \frac{1}{2} m(\text{v}^2\text{-v}_o^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m\text{v}^2 \text{-} \frac{1}{2} m\text{v}_o^2.$$

teorema dell'energia cinetica [3]

Dimostrazione (caso unidimensionale generale)

$$L = \int_{x_o}^{x_1} F(x) \cdot dx$$

$$F(x) \cdot dx = m \cdot a \cdot dx = m \cdot \boxed{\frac{dv}{dt}} \cdot dx =$$

$$= m \cdot \boxed{\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}} \cdot dx = m \cdot \boxed{\frac{dv}{dx} \cdot v} \cdot dx = m \cdot v \cdot dv$$

$$L = \int_{v_o}^{v_1} mvdv = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_o^2)$$

QED

la potenza

- definizione :

  il lavoro compiuto nell'unità di tempo

$$W = dL / dt$$

1 Watt = 1 W = 1 J / 1 s

(anche : cavallo-vapore = 736 W ;

lavoro in watt-ora = 3600 J)

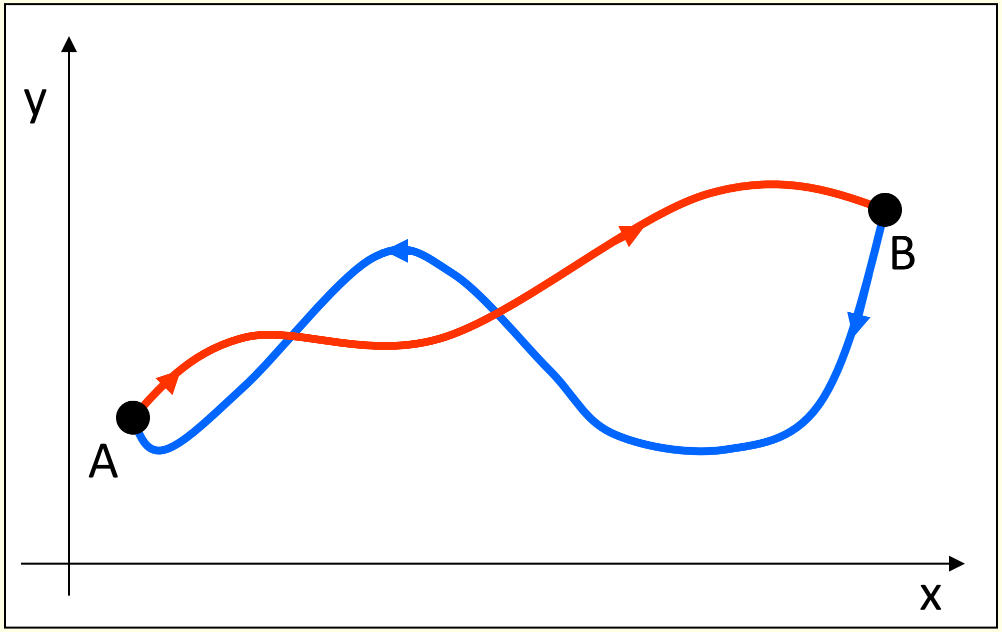
$W = dL / dt = d\,(\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}) / dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ **[se F costante]**

forze conservative

- una forza si dice *conservativa* se :
  - in *ogni* ciclo chiuso L=0;

  \- oppure -

  - L in un cammino dipende *solamente* dai punti iniziale e finale e *non* dalla traiettoria:



- $L_{AB} + L_{BA} = 0$;
- $L_{AB} = -L_{BA}$.

[dimostrazione facile, da $L_{AB} = -L_{BA}$ per le proprietà degli integrali]

energia potenziale

- se una forza è <u>conservativa</u>, si può definire una funzione $U(\vec{x})$, che dipende <u>unicamente</u> dal punto dello spazio $\vec{x}$, tale che [notare i "-"] :

$$L_{AB} = -\Delta U_{AB} = U(\vec{x}_A) - U(\vec{x}_B) \; ;$$

$$U(\vec{x}_B) = U(\vec{x}_A) - \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{x}$$

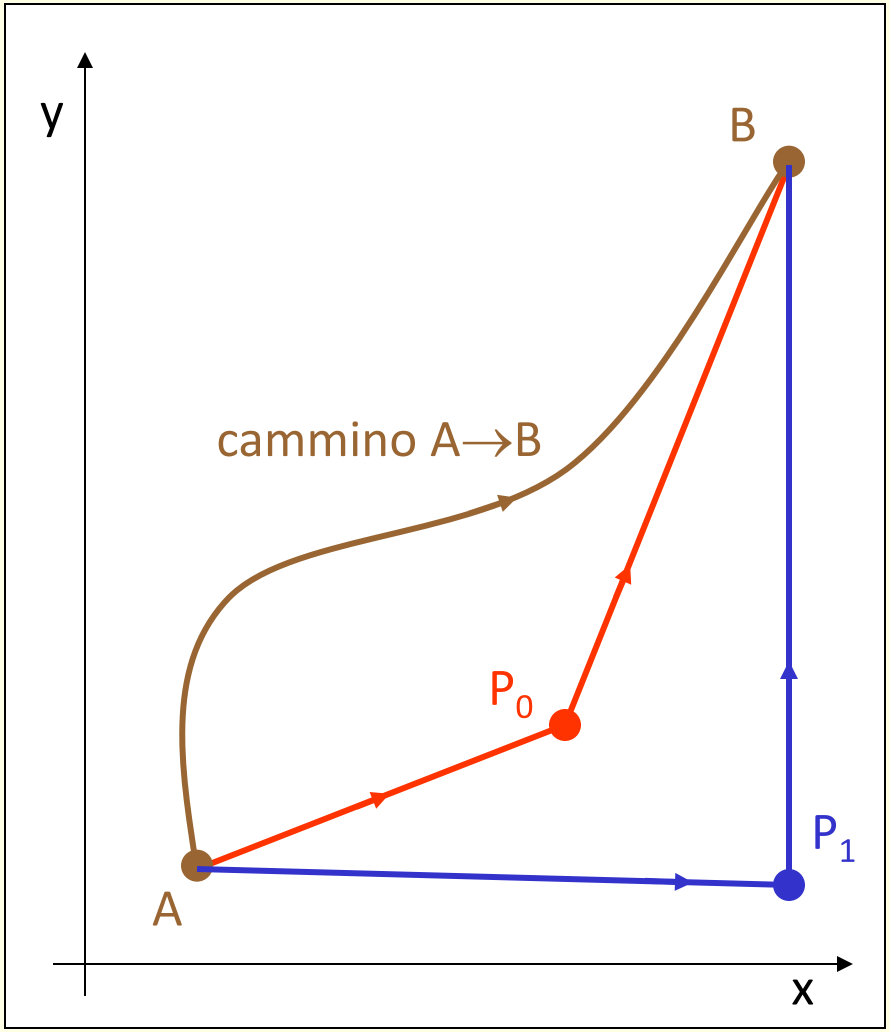
- Teorema energia cinetica $\rightarrow$

$$L_{AB} = K_B - K_A = U_A - U_B \; ;$$

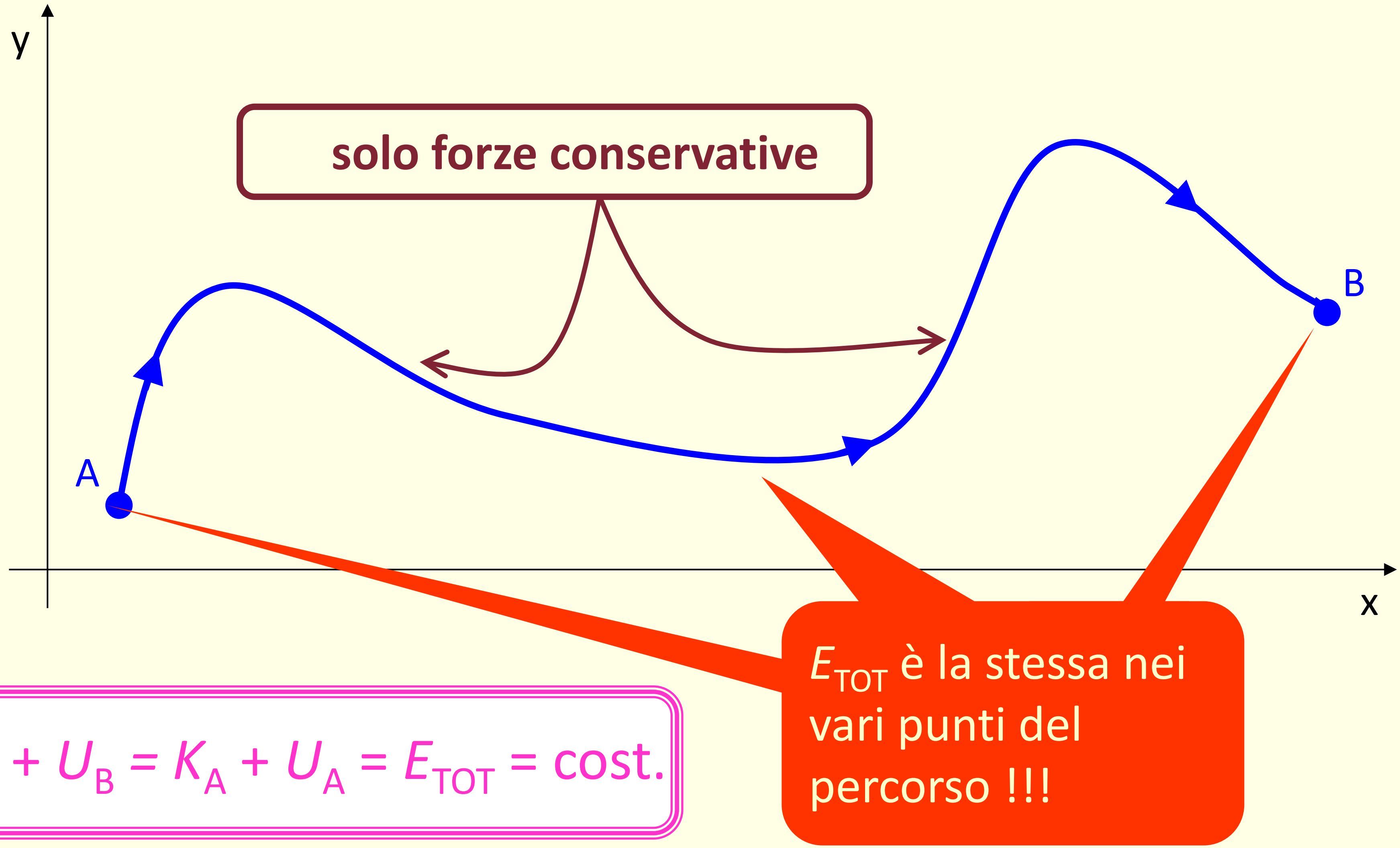
$$K_B + U_B = K_A + U_A = E_{TOT} = \text{costante}$$

differenze di energia potenziale

- L'energia potenziale <u>non</u> è una grandezza misurabile.
- Solamente le <u>differenze</u> di e.p. hanno valore in fisica (pag. prec.).
- La scelta del punto di riferimento, rispetto a cui si calcola l'e.p., si <u>cancella</u> nelle differenze.
  - e.g. due scelte : $U(x_0)=0$
  - oppure : $U^*(x_1)=0$.
  - $U(x_A)-U(x_B) = L_{AB} = L_{A0} + L_{0B} =$
    $= L_{A1} + L_{1B} = U^*(x_A)-U^*(x_B)$.



conservazione dell'energia



$$K_B + U_B = K_A + U_A = E_{TOT} = \text{cost.}$$

forze conservative : gravità

$A \downarrow B$

<u>Gravità :</u> $U(x) = U(x_o) - L$

$= U(x_o) - m\,g\,h$

$= - m\,g\,h + \text{costante}$

Ex. $U(x_A) = 0;$ $\quad K(x_A) = 0;$

$U(x_B) = -mgh;$ $\quad K(x_B) = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 \rightarrow$ calcolare

$\rightarrow 0 = -mgh + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

oppure $U(x_B) = 0;$ $\quad U(x_A) = +mgh;$

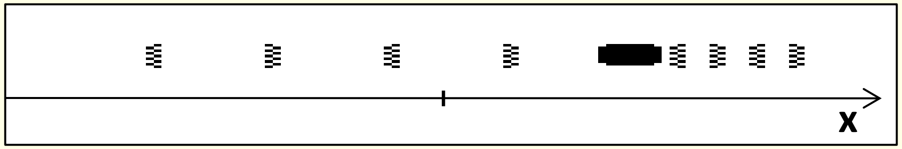
$\rightarrow 0 + mgh = 0 + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2$

$\rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$

!!!

forze conservative : molla

<u>Forze elastiche</u> (ex. molla) :



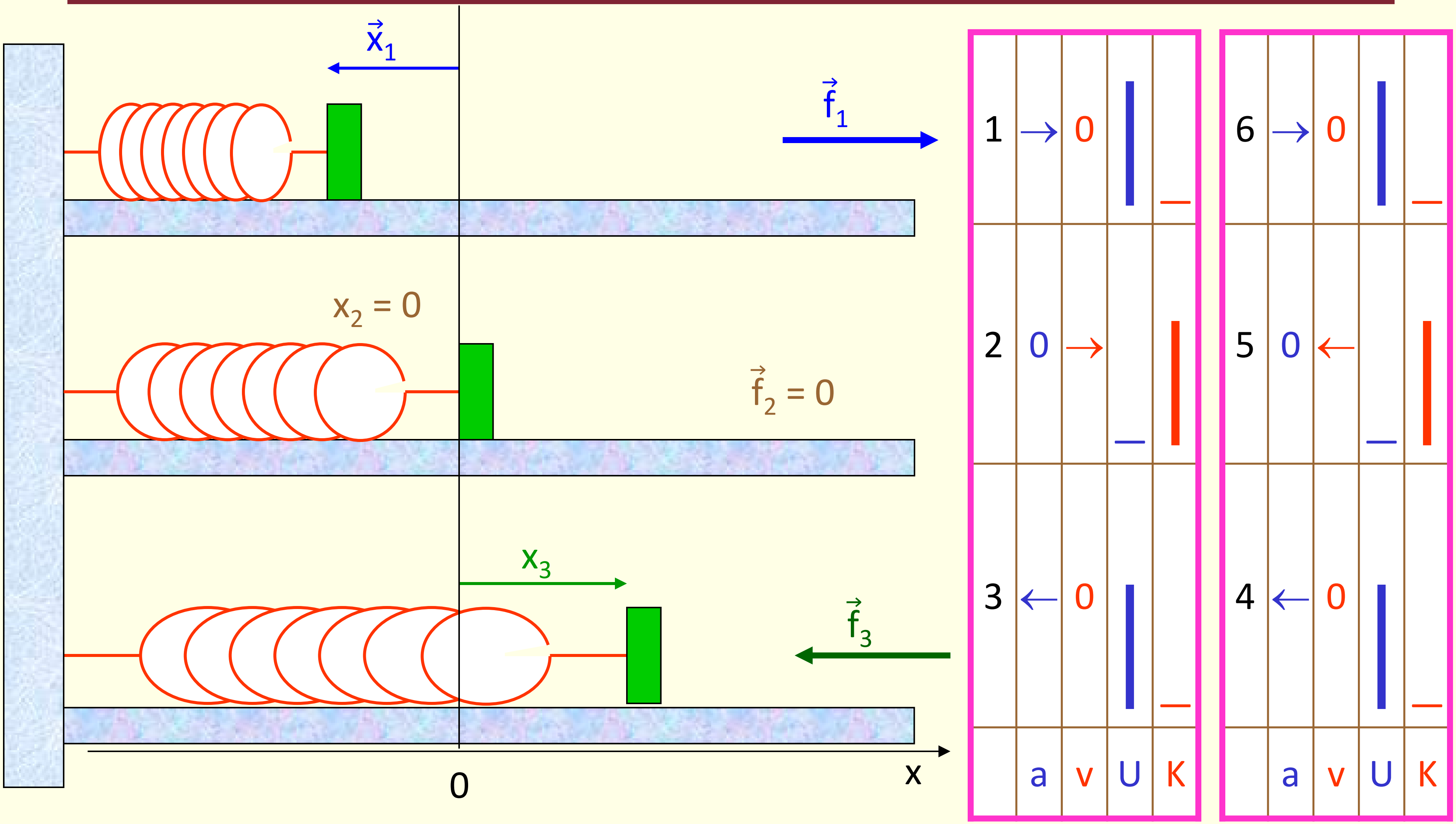
$$\boxed{\vec{f} = -K\,\vec{x}}$$

- la forza è proporzionale alla deformazione della molla;
- il parametro K (che <u>non</u> dipende da $\vec{x}$) indica la "robustezza" della molla (= forza per deformazione unitaria);
- la forza è diretta lungo l'asse della molla, in senso opposto alla deformazione;
- la forza è conservativa (facile : immaginare un ciclo).

$$U(\vec{x}) = -L = -\int(-Kx)dx = \tfrac{1}{2} K x^2 + \text{costante.}$$

$$\tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} K x^2 = \text{costante.}$$

forze elastiche



oscillazioni - moto armonico

Ex. molla (v. precedente) :

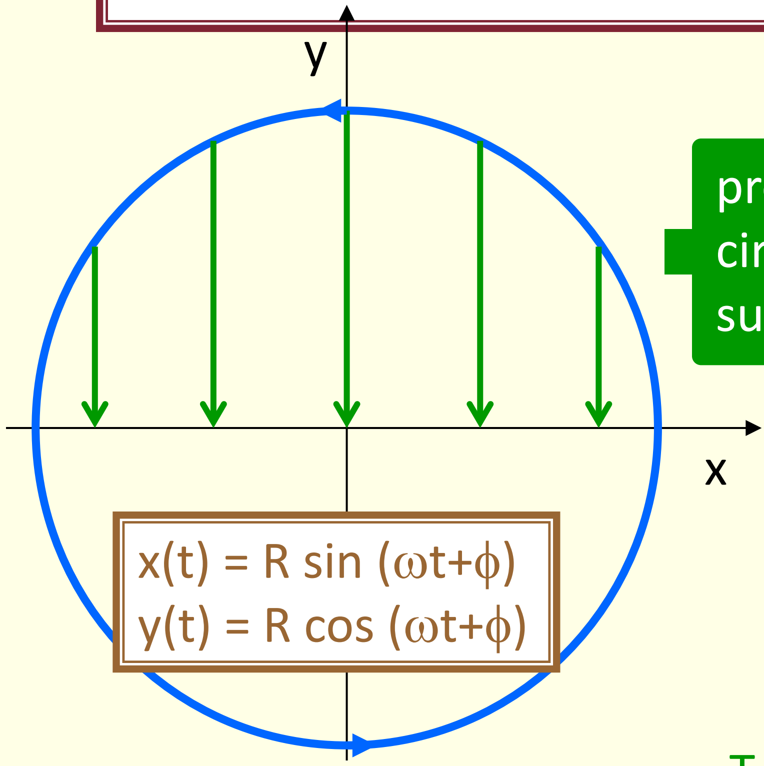
$f = - K x;$ $U = ½ K x^2;$

- la forza riporta il corpo nel punto di equilibrio (segno “-”) $\rightarrow$ oscillazioni, moto periodico;
- ricordiamo il moto circolare uniforme ($\vec{a} = - \omega \vec{r}$);
- proiettiamo su un asse (ex. *x*) - moto "armonico" :
  - $x = A \sin (\omega t);$
  - $v = dx/dt = A\omega \cos (\omega t);$
  - $a = dv/dt = d^2x/dt^2 = -A\omega^2 \sin (\omega t) = -\omega^2 x ;$

  $\rightarrow f = ma = - Kx = - KA \sin (\omega t) = - m A \omega^2 \sin (\omega t);$

  $\rightarrow \omega = \sqrt{K/m} ;$ $T = 2\pi / \omega = 2 \pi \sqrt{m/K} ;$
- le oscillazioni sono “isocrone” (ω e T non dipendono da A) $\rightarrow$ oscillazioni più ampie sono compiute a velocità maggiore;

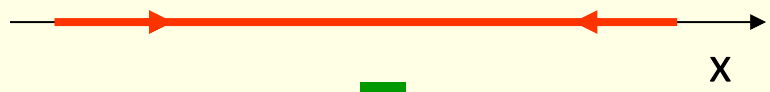
moto armonico



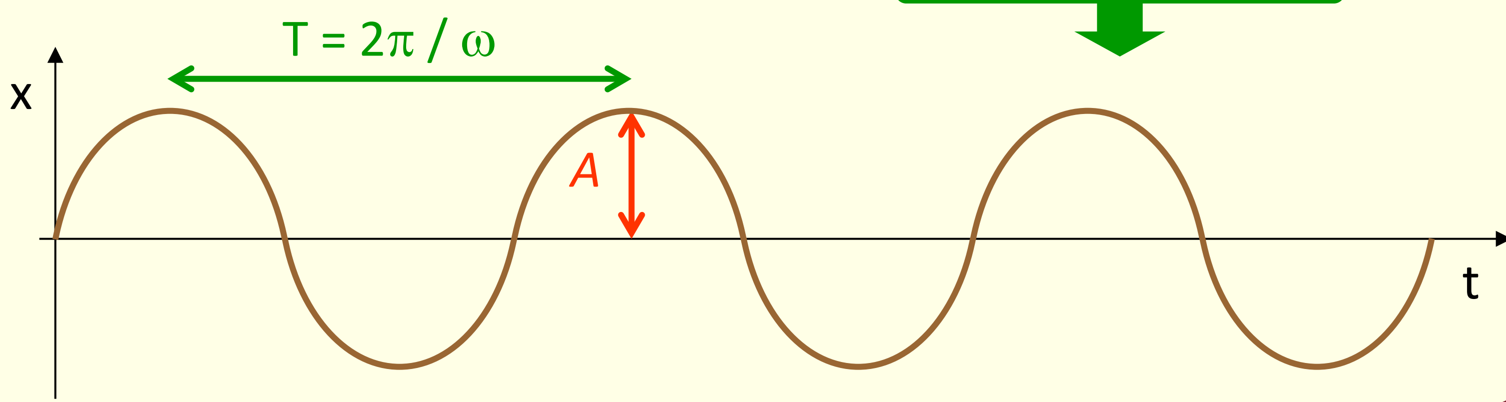
$x(t) = R \sin(\omega t + \phi)$
$y(t) = R \cos(\omega t + \phi)$

proiettare il moto circolare uniforme sull'asse x

$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

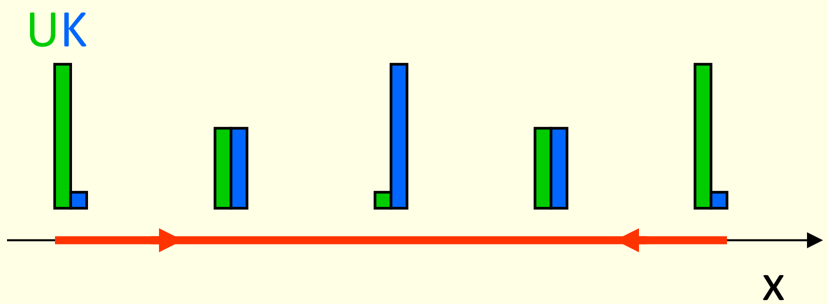


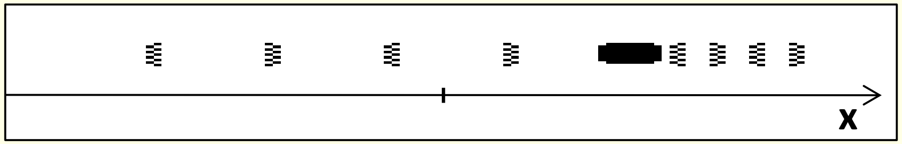
scegliere (a piacere) l'istante iniziale (e.g. ϕ=0)



$x(t) = A \sin(\omega t)$

moto armonico : energia

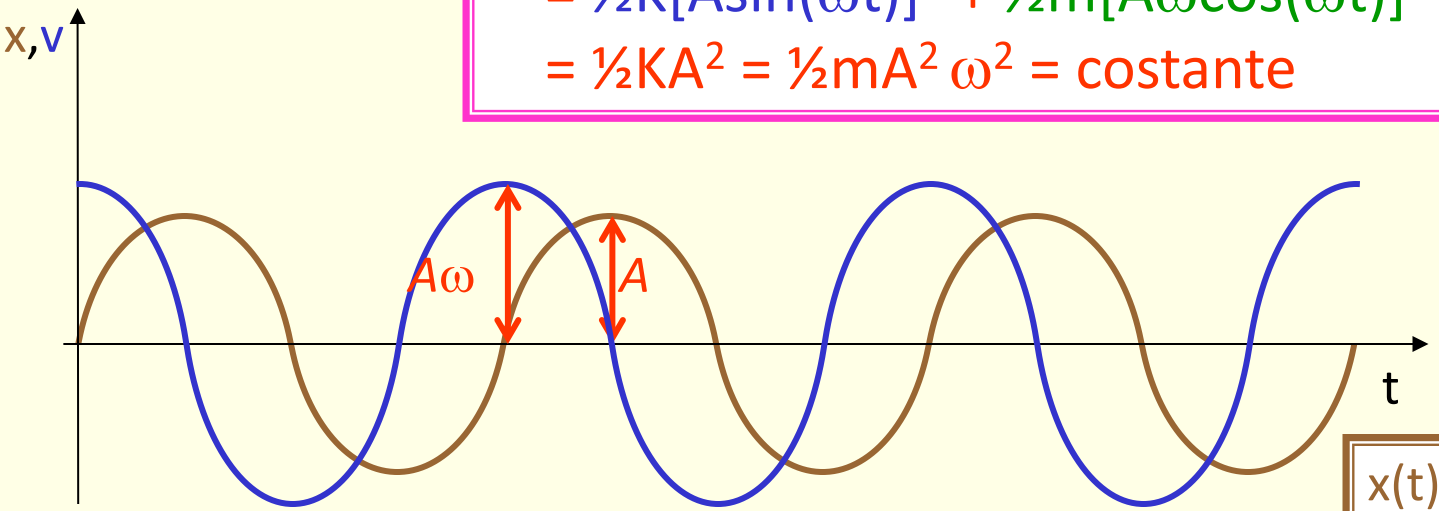




$$E = \tfrac{1}{2}Kx^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 = \qquad [\omega = = \sqrt{K/m}\,]$$

$$= \tfrac{1}{2}K[A\sin(\omega t)]^2 + \tfrac{1}{2}m[A\omega\cos(\omega t)]^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}KA^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\,\omega^2 = \text{costante}$$



$x(t) = A \sin(\omega t)$

$v(t) = A\,\omega \cos(\omega t)$

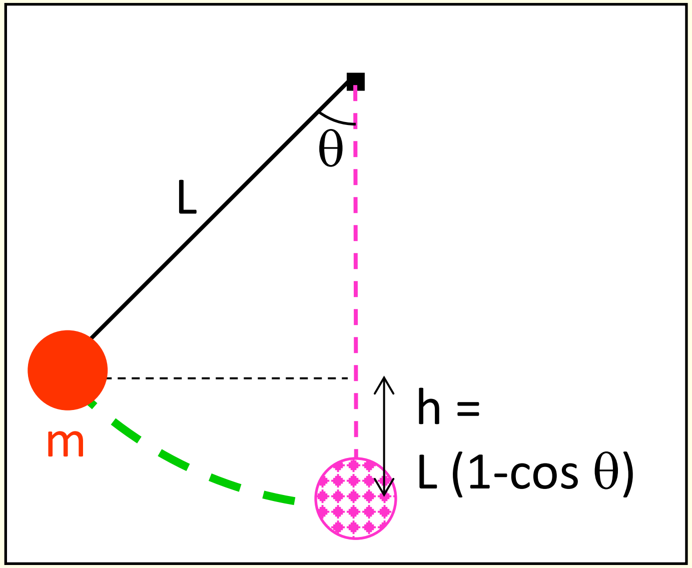
forze conservative : pendolo

$F_{peso} = m\,g$ (verso il basso)

$F_{filo} = \ldots$ (vincolo lungo il filo)

tutte le forze sono <u>conservative</u>.

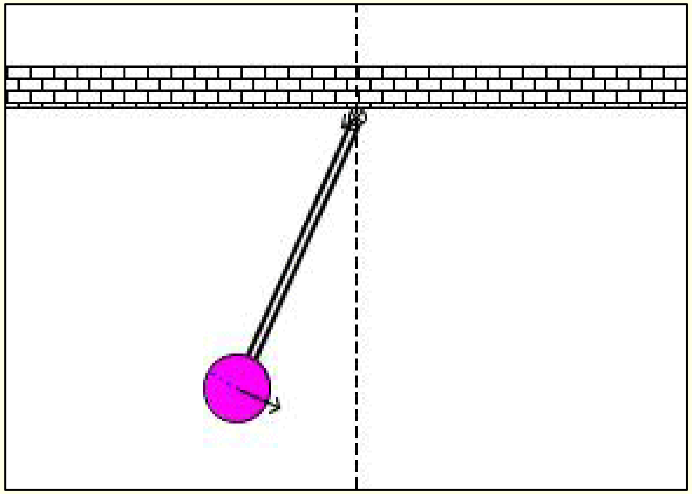
$$U = m\,g\,h = m\,g\,L\,(1 - \cos\theta)$$



anche : proiettare le forze lungo assi (parallelo e ortogonale al filo) :

$F_{PAR} = mg \cos\theta + T = 0$

$F_{ORT} = - mg \sin\theta \approx - mg\,\theta$ ("-" indica la direzione verso il punto di equilibrio)



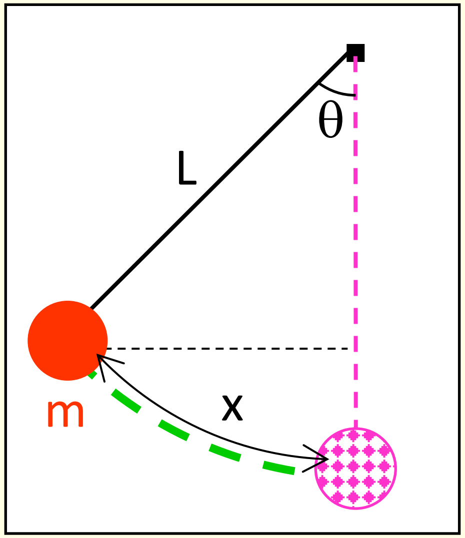
equazione del pendolo

Pendolo, caso di "piccole oscillazioni" :

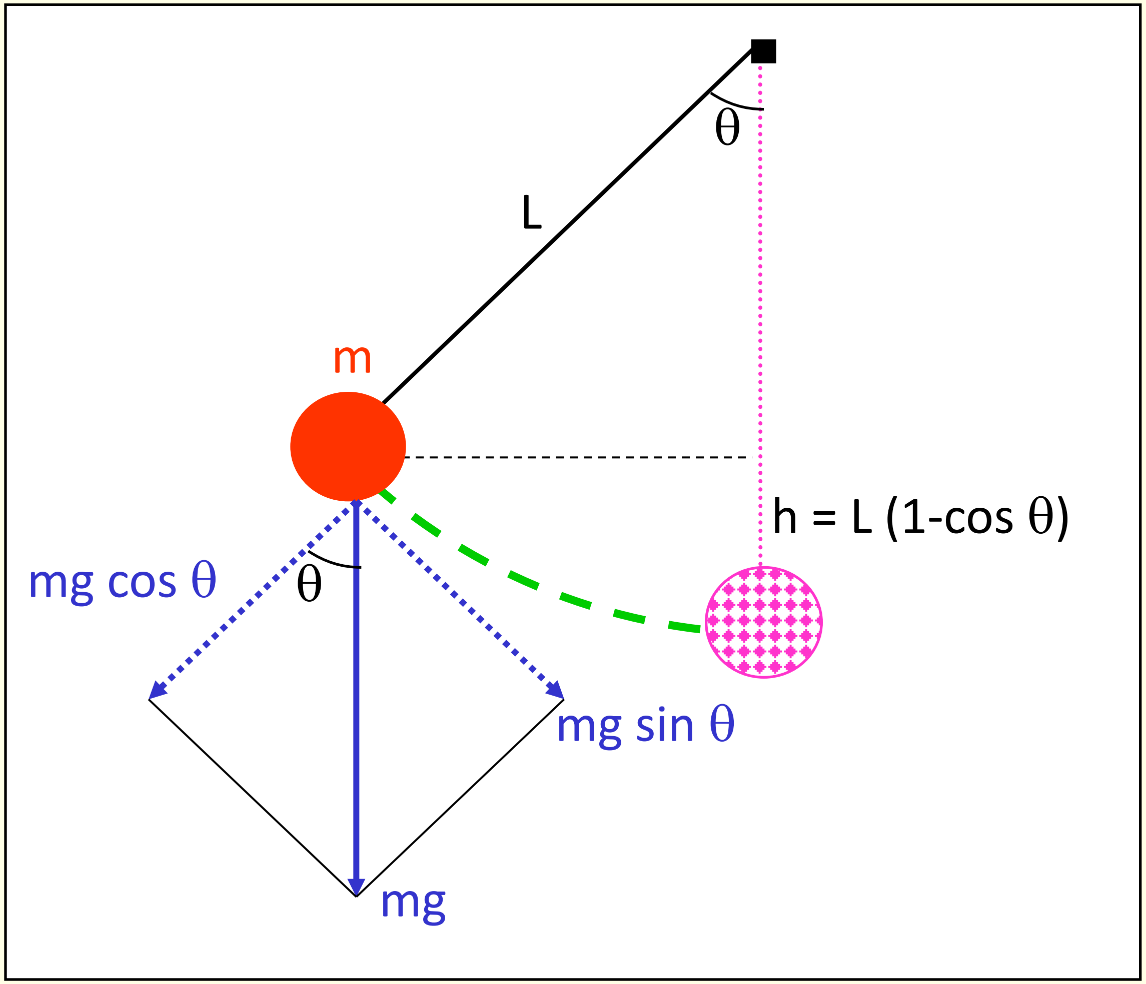
$x \approx L\,\theta;$

$F = -\,m\,g\,\sin\theta \approx -\,mg\,\theta = -\,mg\,x\,/\,L\,;$

- formalmente identico alla molla, con $K = mg\,/\,L$
  - $\rightarrow$ oscillazioni isocrone;
    frequenza, periodo :
  - ❖ $\omega\ [= \sqrt{K\,/\,m}\ ] = \sqrt{g\,/\,L}\ ;$
  - ❖ $T = 2\pi\,/\,\omega = 2\pi\,\sqrt{L\,/\,g}\,;$
- moto armonico, di equazione
  $x = A\sin(\omega t);\qquad A = x_{MAX} = L\,\theta_{MAX}.$



pendolo



$F_\perp = mg \cos\theta + T$
$= 0;$

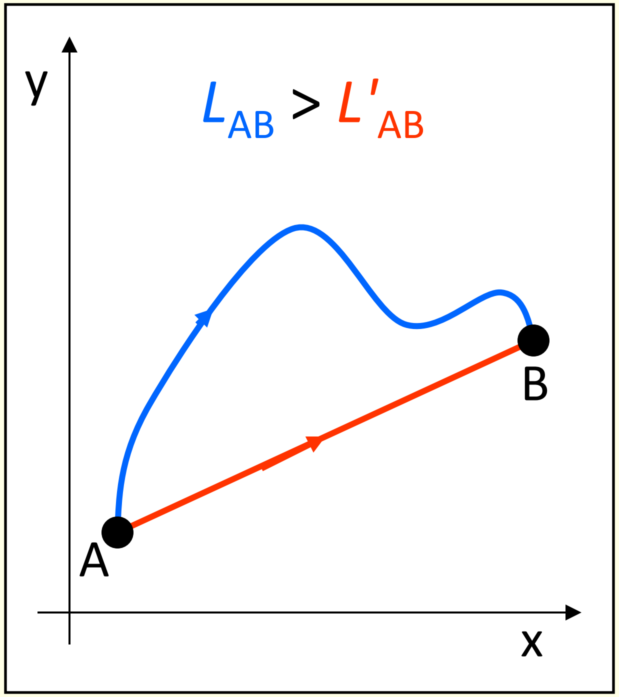
$F_{//} = - mg \sin\theta$
$\approx - mg\,\theta$

però non è un riferimento inerziale ...

forze non conservative

Ex. attrito :

- il lavoro dipende dal cammino (a parità di coefficiente μ, maggiore percorso = maggiore lavoro);
- la forza <u>NON</u> è conservativa (ex. il lavoro in un <u>ciclo chiuso</u> NON è nullo).



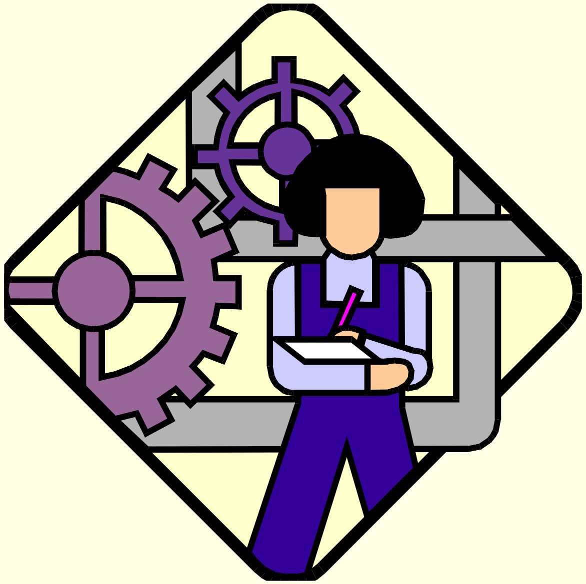
L'energia si disperde nell'ambiente, e.g. sotto forma di calore.

meccanica dei sistemi

- corpi rigidi estesi (non in programma), sistemi a molti corpi, …

- quanti valori per identificare la posizione di un corpo ? concetto di grado di libertà;

- sistema a molti corpi : *n* punti materiali di massa m_i e posizione r_i (i = 1,2,3,…,n);



→ "3n" gradi di libertà (x_i, y_i, z_i, i=1,…n).

centro di massa

definizione di <u>centro di massa</u> :

$$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{TOT}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$\rightarrow$ $M_{\mathrm{TOT}}\, \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{CM}} = \sum m_{\mathrm{i}}\, \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}};$

$M_{\mathrm{TOT}}\, \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{CM}} = \sum m_{\mathrm{i}} \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}};$

.... segue ...

Sistemi di punti materiali [2]

... segue ...

Principio di azione e reazione

$$\rightarrow M_{TOT}\,\vec{r}_{CM} = \sum m_i\,\vec{r}_i;$$

$$M_{TOT}\,\vec{v}_{CM} = \sum m_i\vec{v}_i;$$

$$M_{TOT}\,\vec{a}_{CM} = \sum m_i\,\vec{a}_i = \sum \vec{f}_i^{\,TOT} = \sum \vec{f}_i^{\,EXT} + \underbrace{\cancel{\sum \vec{f}_i^{\,INT}}}_{=\,0}$$

Teorema del centro di massa : il moto (virtuale) del c.m. è deteminato dalle sole forze esterne al sistema; le forze interne determinano i moti relativi dei membri del sistema :

$$M_{TOT}\,\vec{a}_{CM} = \sum \vec{f}_i^{\,EXT} = \vec{f}_{TOT}^{\,EXT}.$$

quantità di moto

definizione : $\vec{p} = m\,\vec{v}$

$$\rightarrow \vec{f}\ [= m\,\vec{a} = m\,d\vec{v}\,/\,dt = d\,(m\,\vec{v})\,/\,dt\,] = d\,\vec{p}\,/\,dt$$

[spesso citata come espressione corretta della 2ª legge, include i sistemi a massa variabile, per cui $dm/dt \neq 0$].

Nei sistemi a molti corpi, definiamo $[M_{TOT}\,\vec{v}_{CM} = \sum m_i\vec{v}_i]$:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\,\vec{v}_i = M_{TOT}\,\vec{v}_{CM}$$

Possiamo scrivere il teorema del centro di massa :

$$\vec{f}^{\,EXT}_{TOT} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM} = d\vec{P}\,/\,dt\,;$$

$$\vec{f}^{\,EXT}_{TOT} = 0 \rightarrow d\,\vec{P}\,/\,dt = 0 \rightarrow \boxed{\vec{P} = \sum m_i\vec{v}_i = \text{costante.}}$$

Urti

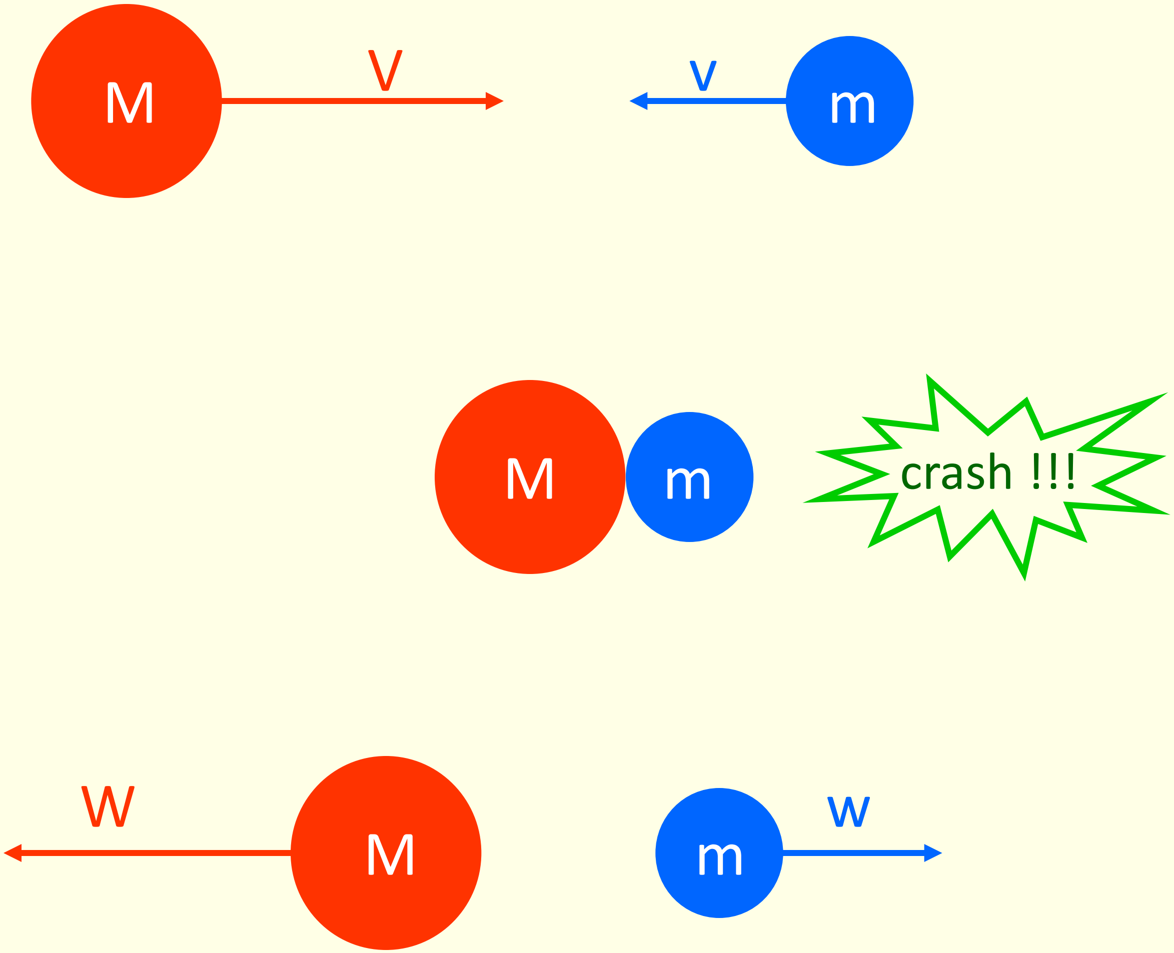
- l'urto avviene in un tempo piccolo (qualche ms);
- pertanto, le forze d'urto sono molto intense;
- pertanto, durante l'urto, possiamo trascurare le altre forze (ex. gravità, forze elastiche, attriti);
- poiché le forze d'urto sono <u>interne</u> al sistema di corpi che collidono e le forze esterne sono trascurabili, durante l'urto si conserva sempre la <u>quantità di moto totale</u> dei corpi che si urtano [$\rightarrow P_{INI} = P_{FIN}$];
- <u>se le forze d'urto sono conservative</u>, poiché l'energia potenziale prima e dopo l'urto è la stessa (forze d'urto nulle fuori della collisione), anche l'<u>energia cinetica</u> si conserva durante l'urto [$\rightarrow K_{INI} = K_{FIN}$].

urti elastici [1]

- si chiamano u.e. quelli in cui si conserva l'energia cinetica;
- anche la quantità di moto si conserva (vedi sopra);
- studiamo il caso (semplice) in cui le forze d'urto sono collineari con la linea che congiunge i CM dei corpi che si urtano (urti "centrali", ex. NON due palle da biliardo che si "spizzano");
- semplifichiamo al caso in cui le velocità dei corpi prima dell'urto siano parallele (urti unidimensionali);
- abbiamo quindi (in una sola dimensione) le seguenti variabili :
  - masse (M, m);
  - velocità prima dell'urto (V, v) e dopo l'urto (W, w) **[in UNA dimensione]**;
- ... e le seguenti equazioni :
  - conservazione della quantità di moto **[in UNA dimensione]**;
  - conservazione dell'energia cinetica.

... segue ...

urti elastici [2]



prima dell'urto

w ?   W ?

urti elastici [3]

$$\left.\begin{array}{l} MV + mv = MW + mw \quad \text{p} \\ \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MW^2 + \frac{1}{2}mw^2 \quad \text{E} \end{array}\right\} \text{equazioni iniziali}$$

algebra →

$$m (v - w) = M (W - V)$$

$$m (v - w) (v + w) = M (W - V) (W + V)$$

$$v + w = W + V \rightarrow W = v + w - V$$

$$m (v - w) = M (v + w - V - V)$$

$$w (m + M) = mv - Mv + 2MV$$

← algebra

soluzioni →

$$w = [\ 2MV + v\ (m - M)\ ] \ /\ (M + m)$$

$$W = [\ 2mv + V\ (M - m)\ ] \ /\ (M + m)$$

urti elastici [4]

soluzioni

$w = [\ 2MV + v\,(m - M)\ ]\ /\ (M + m)$

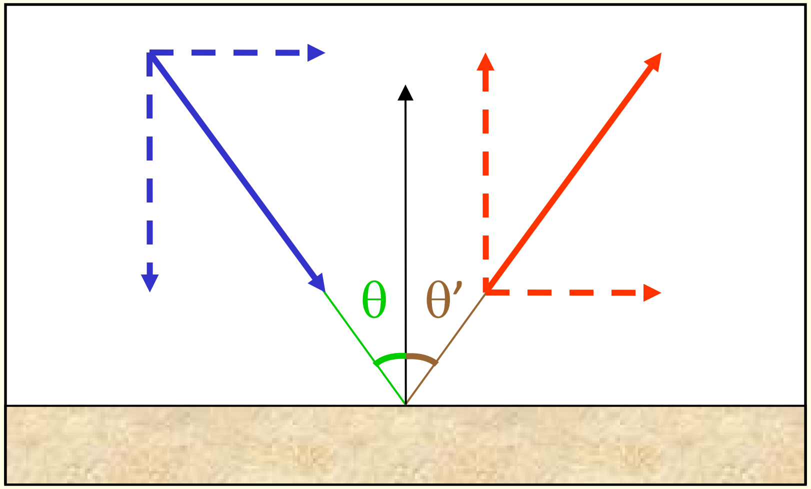
$W = [\ 2mv + V\,(M - m)\ ]\ /\ (M + m)$

Casi particolari :

- $M=m \rightarrow w = V,\ W = v$ (*inversione delle velocità*);
- $M>>m,\ V=0 \rightarrow w = -v;\ W \approx 0$ (*rimbalzo*).

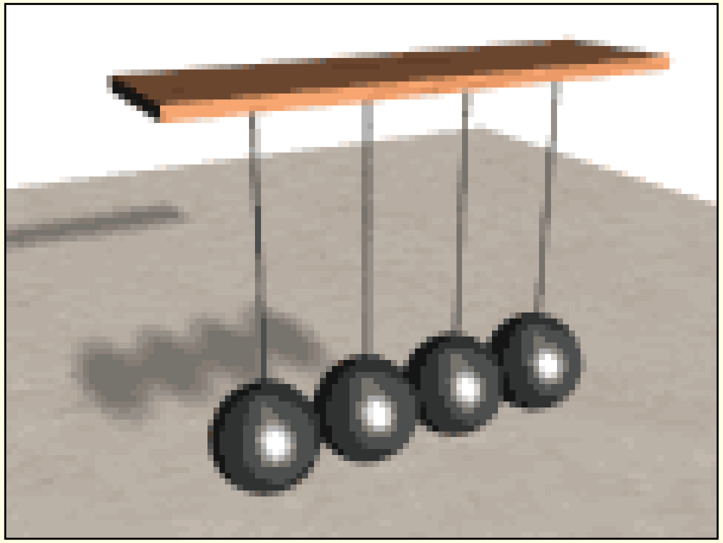
conseguenza : Riflessione

1. l'angolo di incidenza θ e quello di riflessione θ' sono uguali;
2. la traiettoria incidente, quella riflessa e la normale al piano di riflessione giacciono nello stesso piano.

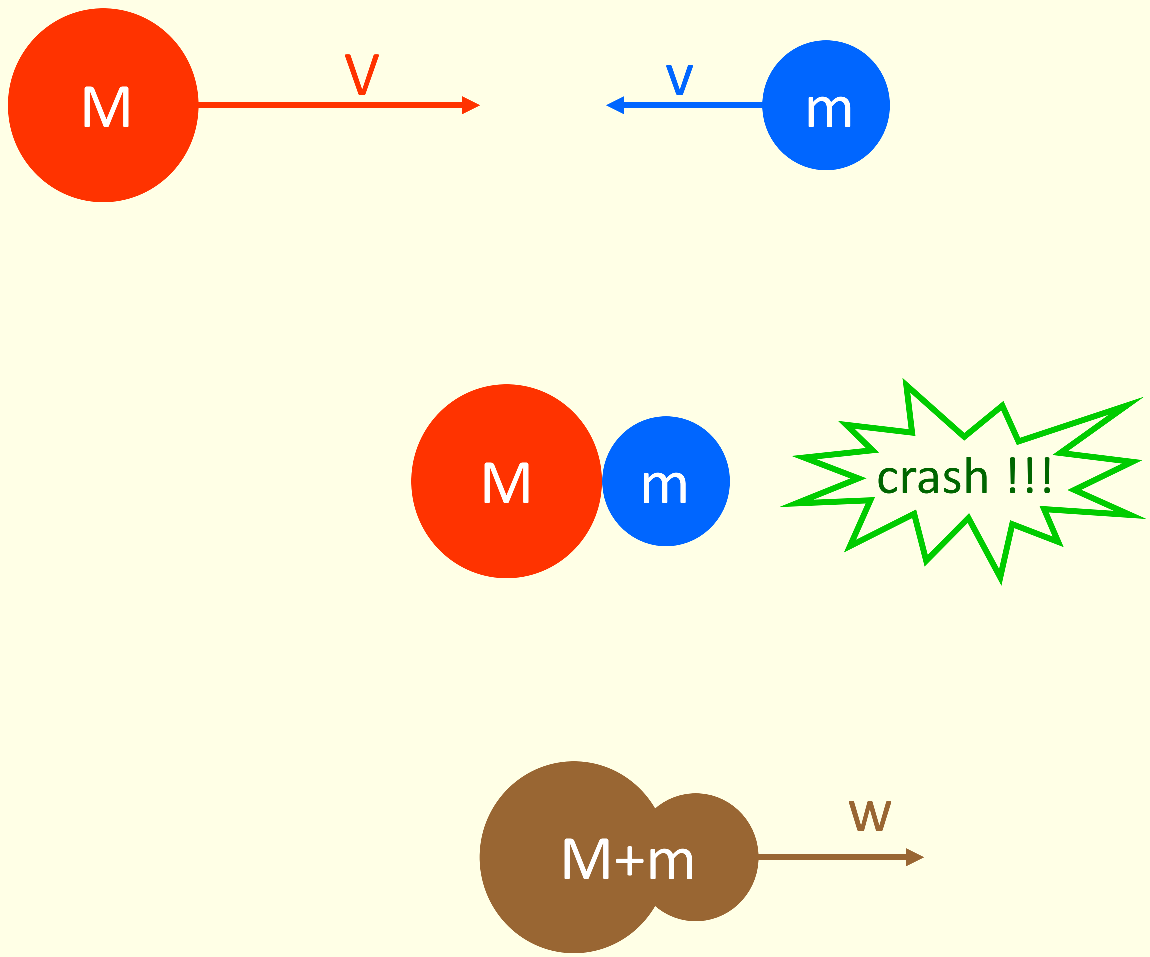


urti elastici [5]

- M=m $\rightarrow$ w = V, W = v (*inversione delle velocità*)



urti [completamente] anelastici [1]



prima dell'urto

w ?

urti anelastici [2]

- l'energia cinetica NON si conserva **[forze non conservative]** ;
- la quantità di moto si conserva **[sistema isolato]** ;
- studiamo solamente il caso estremo :
  i due corpi restano attaccati dopo l'urto.

$$MV + mv = (M + m)\, w$$

$$w = (MV + mv) / (M + m)$$

l'energia cinetica diminuisce (si disperde, ex. in calore o deformazioni)

$$\Delta K = K_{FIN} - K_{INI} = \tfrac{1}{2} (M+m)\, w^2 - \tfrac{1}{2} MV^2 - \tfrac{1}{2} mv^2 =$$

$$= (\ldots) = - \tfrac{1}{2} mM\, (V - v)^2 / (M + m) < 0$$

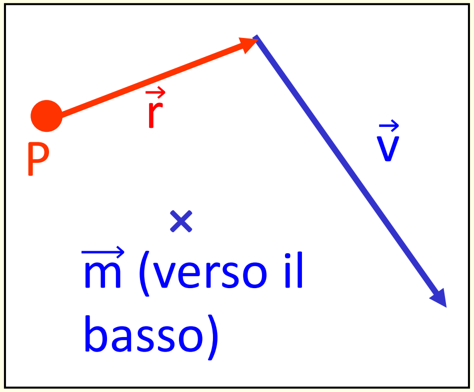
molto lungo, ma facile – tentare per esercizio

momento delle forze

- si definisce <u>momento</u> di un vettore v rispetto a un punto P :

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{v}$$

`su alcuni libri "$\wedge$" invece di "$\times$" $\rightarrow \vec{m} = \vec{r} \wedge \vec{v}$



- il momento è correlato con il concetto di rotazione attorno ad un asse;
- definiamo il momento della forza $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}$$

Equilibrio dei corpi

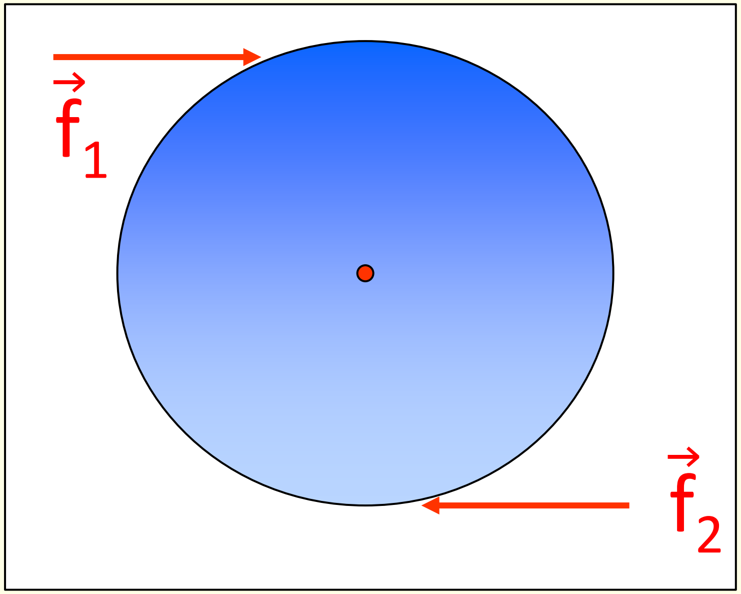
- i corpi puntiformi in quiete sono in equilibrio se

  $\vec{f}_{TOT} = \sum_i \vec{f}_i = 0;$

- i corpi estesi richiedono in più :

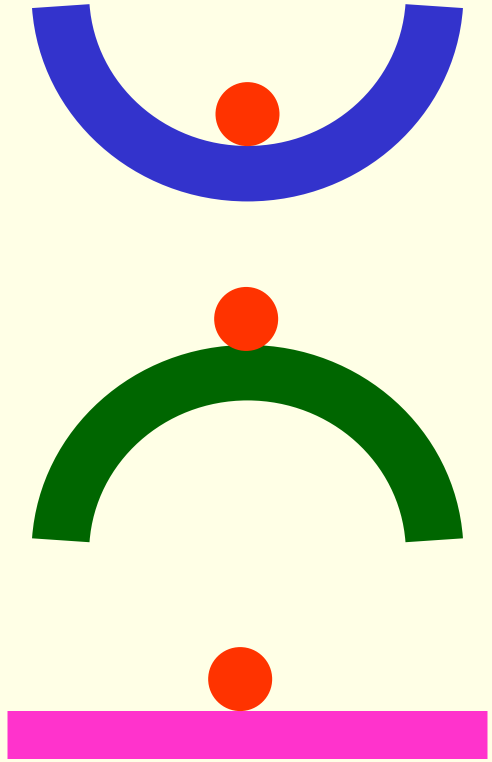
  $\vec{\tau}_{TOT} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0.$

Ex., $\vec{f}_{TOT} = 0$, $\vec{\tau}_{TOT} \neq 0$,
$\rightarrow$ il corpo ruota.



Tipi di equilibrio

- stabile, se il corpo, allontanato dalla posizione di equilibrio, vi torna;
- instabile, se si allontana ulteriormente;
- indifferente, se resta nella nuova posizione;

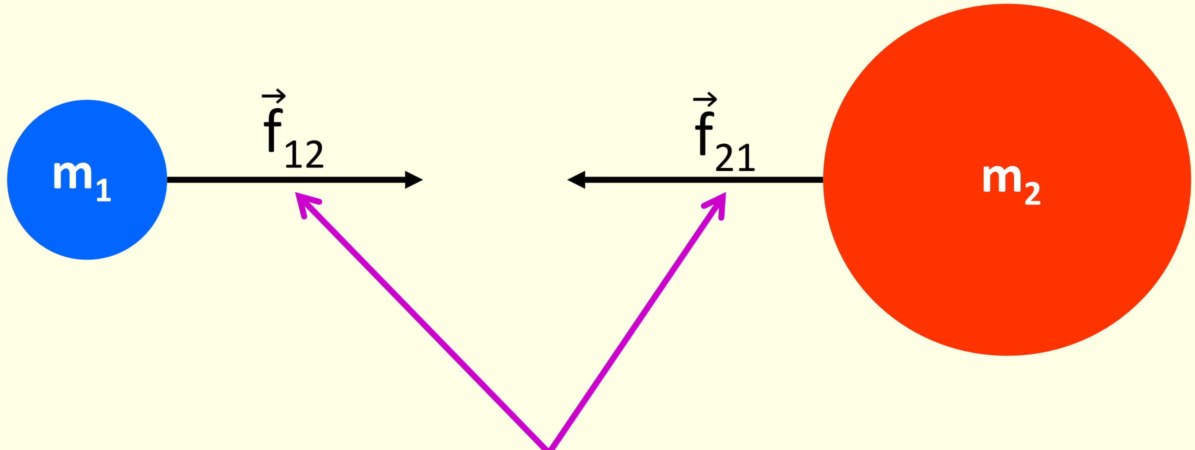


Attenzione in più dimensioni, ex. un “punto di sella”.

Forza di gravitazione

- le masse (gravitazionali) si attraggono :

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2}; \qquad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$



stesso modulo, stessa direzione, verso opposto !!! (3 principio)

Gravità e forza peso

- se $r_{12} \approx r_{terra}$, $m_1 \approx m_{terra}$ $\rightarrow$

$$F = [Gm_T/r_T^2] \times m = m\,g$$

cioè la forza peso *mg* è solo un <u>caso particolare</u> della forza di gravità, *g* dipende solo da m_T e r_T;

- la forza di gravità è conservativa (facile da dimostrare);
- l'energia potenziale vale :

$$U(r_{12}) = - G\,m_1 m_2 / r_{12} + \text{cost}$$

[dimostrare per esercizio : $U(r_{12})$ partendo da F;
$U(r_{12}) \approx mgh$ + costante, se sulla superficie della terra]

Le leggi di Keplero

1. i pianeti percorrono orbite *ellittiche*; il sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse;
2. il *raggio vettore* tra sole e pianeta spazza aree uguali in tempi uguali;
3. il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore è lo stesso per tutti i pianeti.

NB :

- le leggi sono "dimostrabili" a partire dalla legge di gravità;
- valgono per qualsiasi sistema gravitazionale, il sistema solare è solo un esempio;
- approssimazione m(sole) >> m(pianeti).

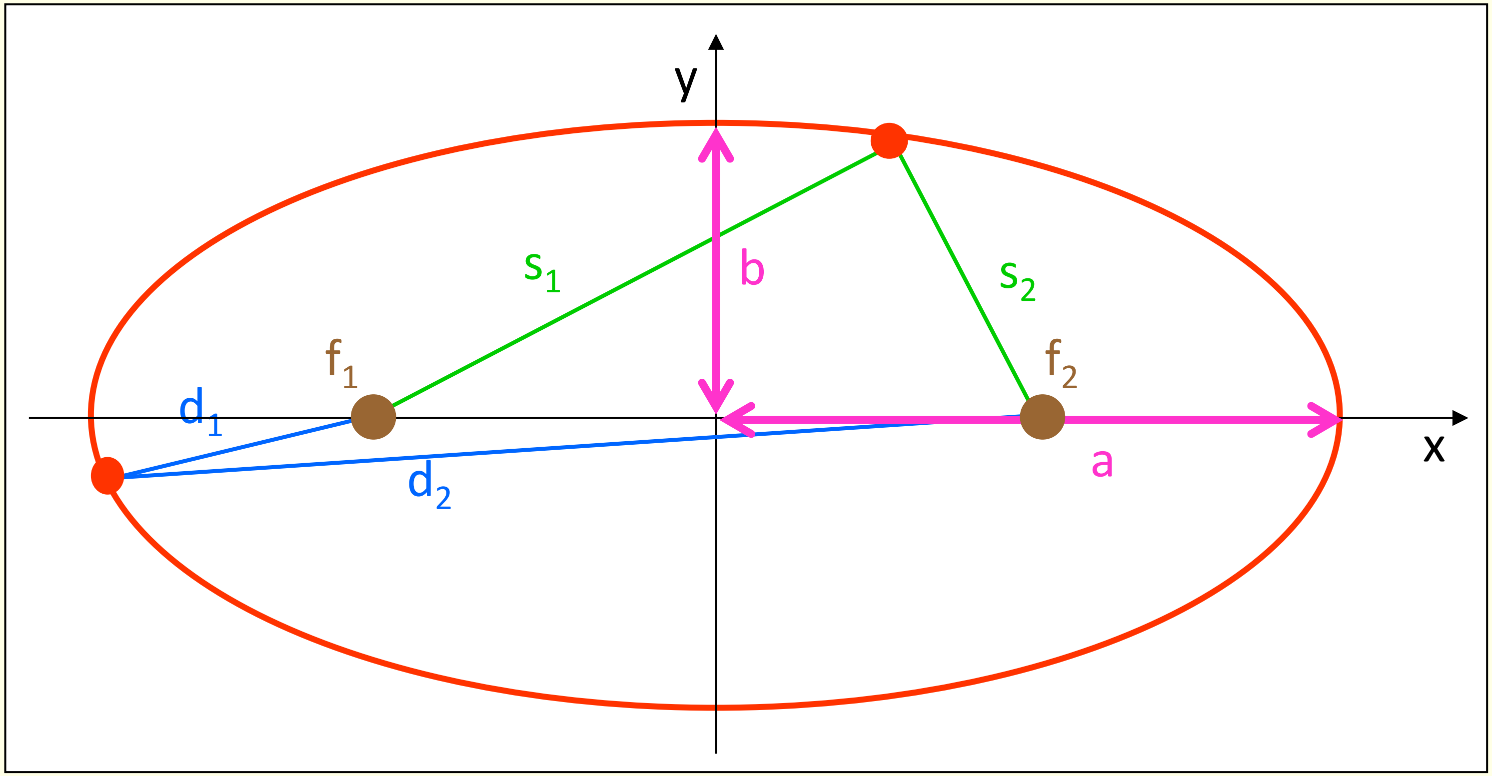
ellisse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ellisse : ;

il cerchio è un caso particolare con $a = b = s_1 = s_2 = d_1 = d_2 = R$.

- $s_1 + s_2 = d_1 + d_2 =$ cost.
- f_1, f_2 "fuochi".

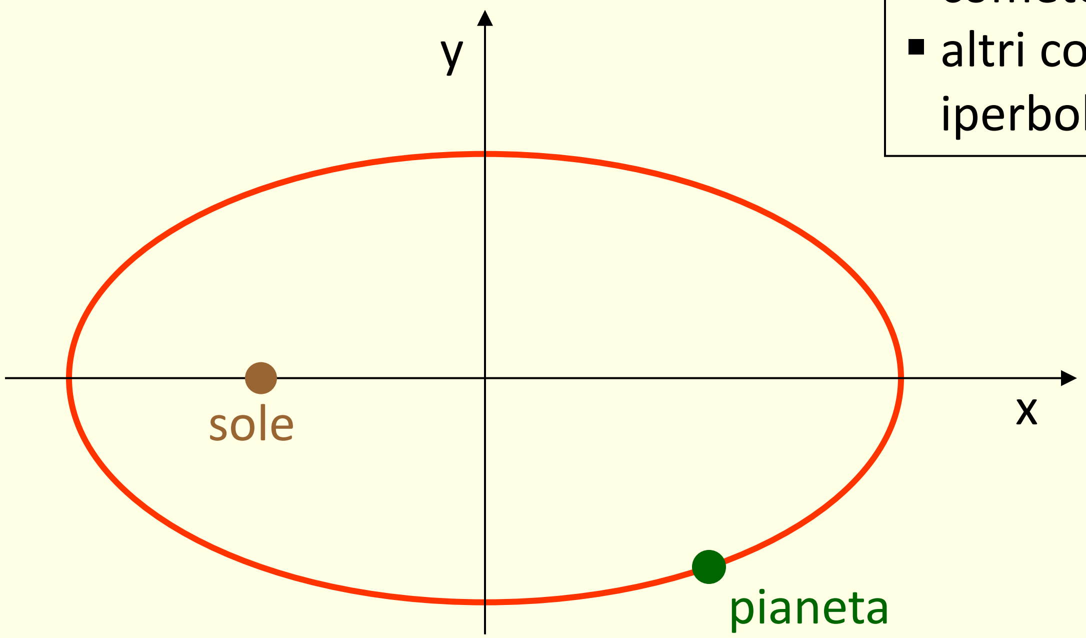


1ª legge di Keplero

ellisse : $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

(generalizzazione del cerchio, $a = b = R$).

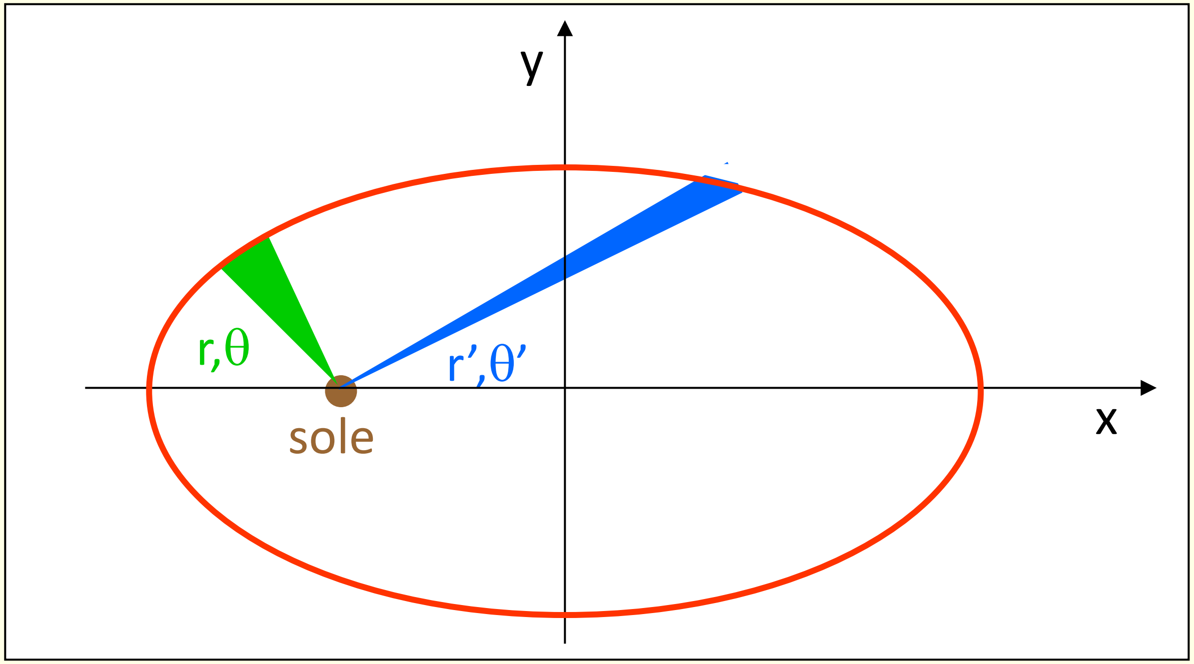
- a, b = semiassi (maggiore, minore);
- comete periodiche : ellissi schiacciate;
- altri corpi celesti : ellissi oppure iperboli, parabole



NB : il disegno è un'esagerazione, le orbite reali dei pianeti sono quasi cerchi (a ≈ b).

2ª legge di Keplero

- i due triangoli (▲ e ▲) corrispondono a tempi uguali, ed hanno area uguale; pertanto :



$$\Delta A = \tfrac{1}{2} \times r \times r\,\theta = \tfrac{1}{2}\, r^2\, \omega\, \delta t = \text{costante};$$

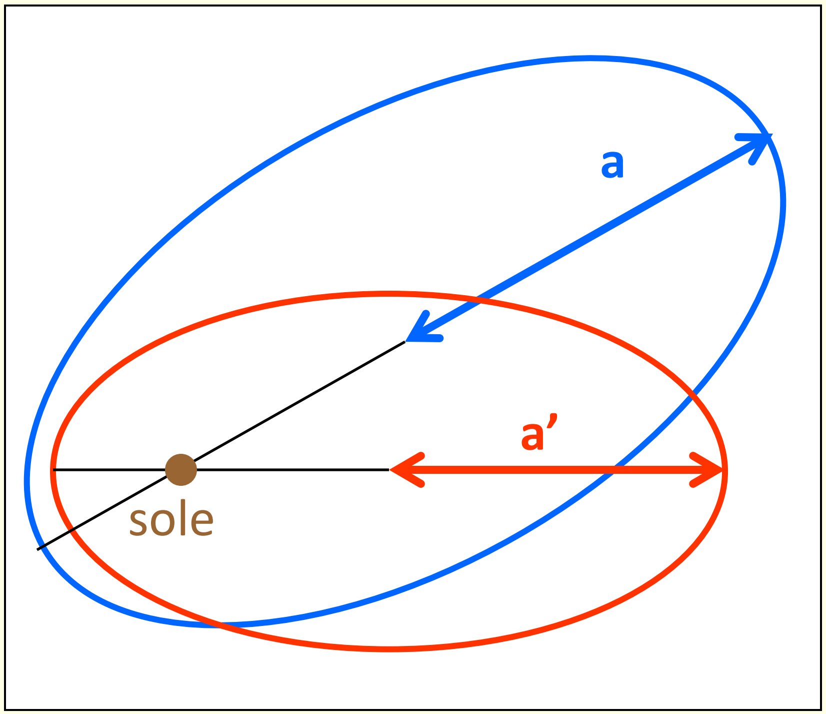
$$\omega\, r^2 = v\, r = \text{costante};$$

$$v \sim 1 / r.$$

3ª legge di Keplero

dati due pianeti :

$T^2 / a^3 = T'^2 / a'^3$



Dim. (caso particolare, orbite circolari):

$m_1 \omega_1^2 r_1 = m_1 [2\pi/T_1]^2 r_1 =$

$= G\, m_s\, m_1 / r_1^2 ;$

$\rightarrow \quad T_1^2 / r_1^3 = 4\,\pi^2 / [G\, m_s] ;$

$\rightarrow \quad T_2^2 / r_2^3 = 4\,\pi^2 / [G\, m_s] ;$

$T_1^2 / r_1^3 = T_2^2 / r_2^3 = 4\,\pi^2 / [G\, m_s]$

= costante

[indipendente dal pianeta].

Fine parte 1