# Elettromagnetismo

- elettrostatica
  - legge di Coulomb;
  - campo elettrico;
  - teorema di Gauss;
  - potenziale elettrostatico;
  - capacità e condensatori;
  - campi elettrici nella materia;
- correnti continue
  - leggi di Ohm;
  - forza elettro-motrice;
  - resistenze e circuito RC;
- campi magnetici
  - legge di Biot-Savart;
  - legge di Ampère;
  - toroide;
  - solenoide;
- induzione elettromagnetica
  - legge di Faraday-Neumann-Lenz;
  - induttanza;
  - circuito RL;
- equazioni di Maxwell

[poi vedi → onde elettromagnetiche]

# Elettromagnetismo

a) elettrostatica;

b) correnti continue;

c) campi magnetici;

d) induzione elettromagnetica;

e) equazioni di Maxwell (cenni).

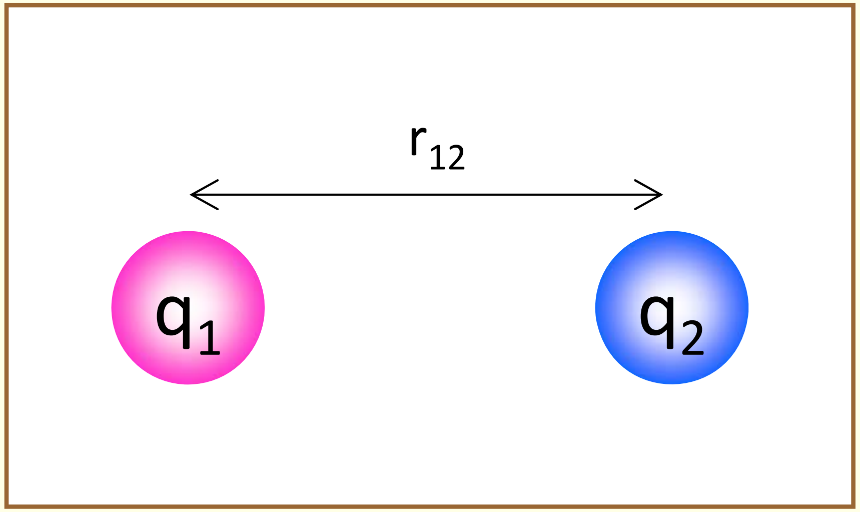
f) **onde e ottica [vedi].**

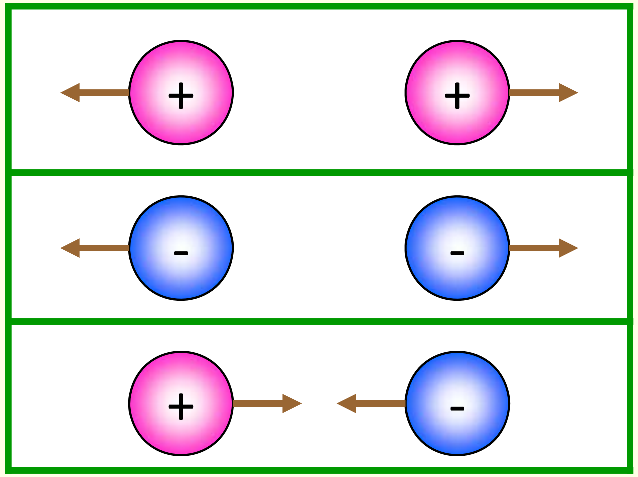
# La legge di Coulomb nel vuoto

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ C^2 / [N\ m^2]$ ;

$1/(4\pi\varepsilon_0) = 8.99 \times 10^9\ N\ m^2 / C^2$



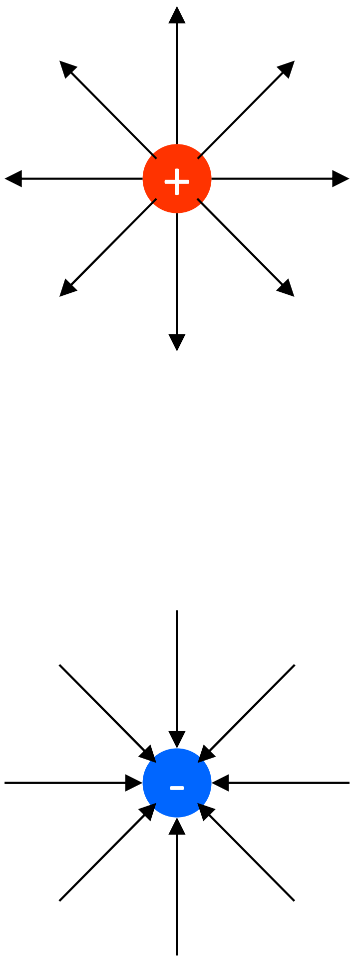
# la legge di Coulomb : commenti

- nuova unità MKS : <u>coulomb</u> [ C ] (molto grande) ;
- $q_1$ e $q_2$ nel vuoto; $\varepsilon_0$ = "costante dielettrica del vuoto" ;
- analoga alla legge di gravitazione, tranne segno " $\pm q$ " ;
- la carica elettrica <u>si conserva</u> (cfr. massa) ;
- la carica elettrica è <u>discreta</u> : $q = \pm N e$ [$N$ <u>molto</u> grande] ;
- $q_{\text{protone}} = 1.6 \times 10^{-19}$ C $= -q_{\text{elettrone}} = -e$ ;
- natura simmetrica se $q \leftrightarrow -q$ (tutte le cariche cambiano segno);
- $q_{\text{elettrone}} < 0 \rightarrow$ <u>scelta</u> (a posteriori, non troppo felice).

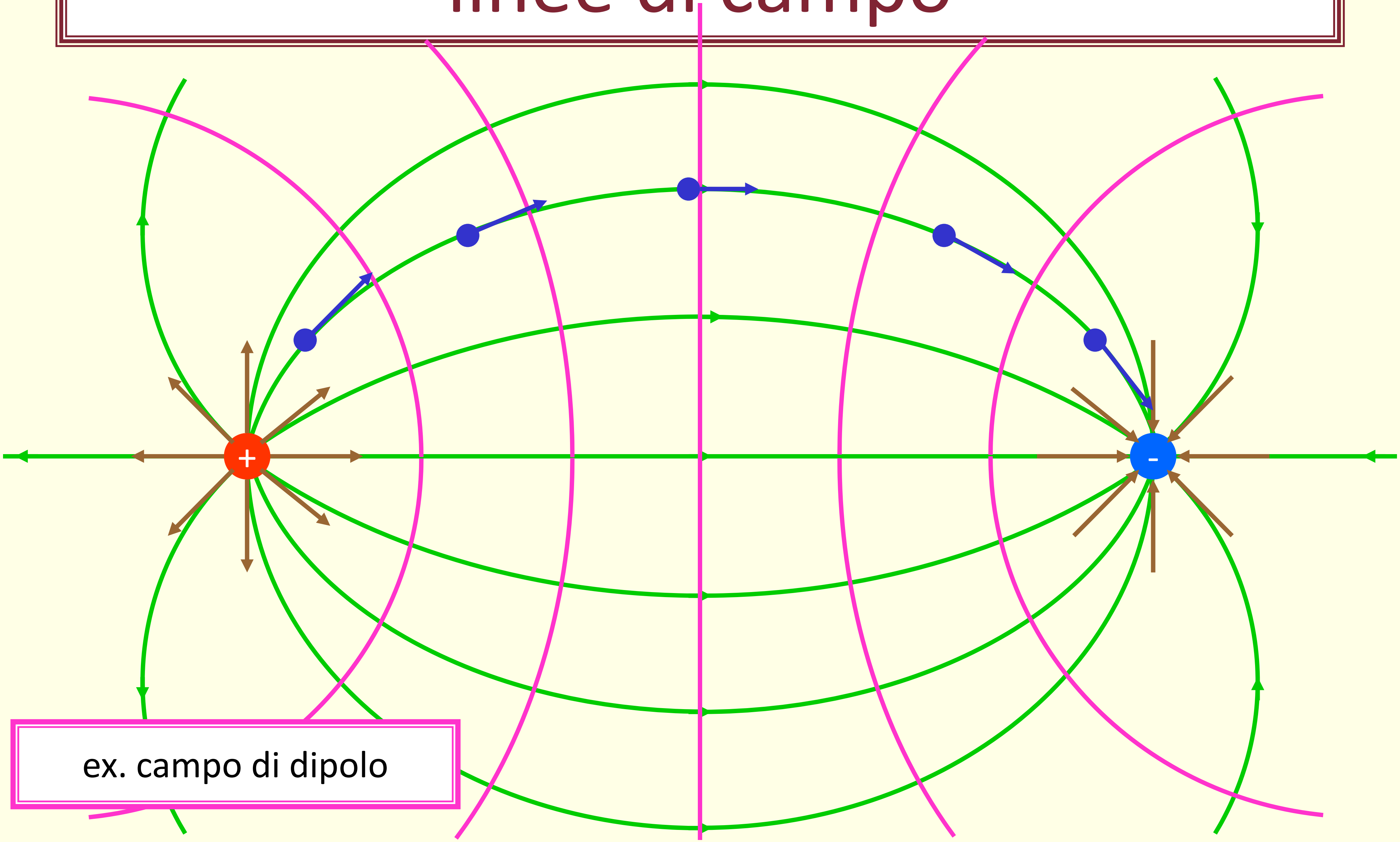
# campi vettoriali

definire :

- sorgenti e pozzi;
- linee di campo;
- superfici equipotenziali;
- flusso;
- integrale di linea;

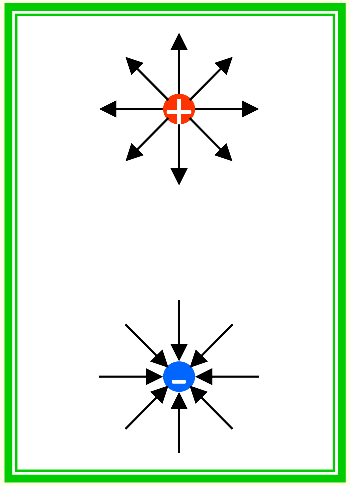


# linee di campo




ex. campo di dipolo

# il campo elettrico



- concetto di campo vettoriale : $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ ;
- linee di campo escono da $+q$, entrano in $-q$ ;
- $\vec{E} = \vec{F} / q_0$ [ "carica esploratrice" ] ;
- $q$ puntiforme $\rightarrow$ $|\vec{E}| = q / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$ ;
- $q$ distribuzione qualsiasi, $|\vec{E}(x,y,z)|$ contiene l'informazione completa [è equivalente conoscere la distribuzione delle cariche, oppure il campo elettrico in tutto lo spazio] ;
- il campo è additivo : $\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ...$
- forza su carica $q$ in $(x,y,z)$ : $\vec{F} = q\,\vec{E}(x,y,z)$ ;
- $E$ si misura in $N / C$ (oppure -vedi oltre- in $V / m$).

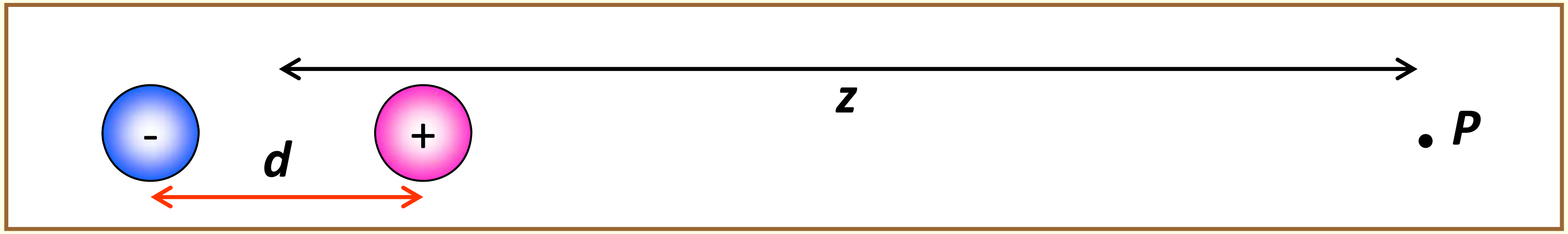
# campo elettrico di dipòlo

- applicazioni importanti (ex. molecola d'acqua $H_2O$) ;
- caso particolare : lungo l'asse del dipolo :

$$E_{TOT} = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{z^2 - dz + d^2/4} - \frac{1}{z^2 + dz + d^2/4}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o z}\,\frac{z+d-z+d}{z^2-d^2} = \frac{2qd}{4\pi\varepsilon_o z^3} = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_o z^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o z^3}$$

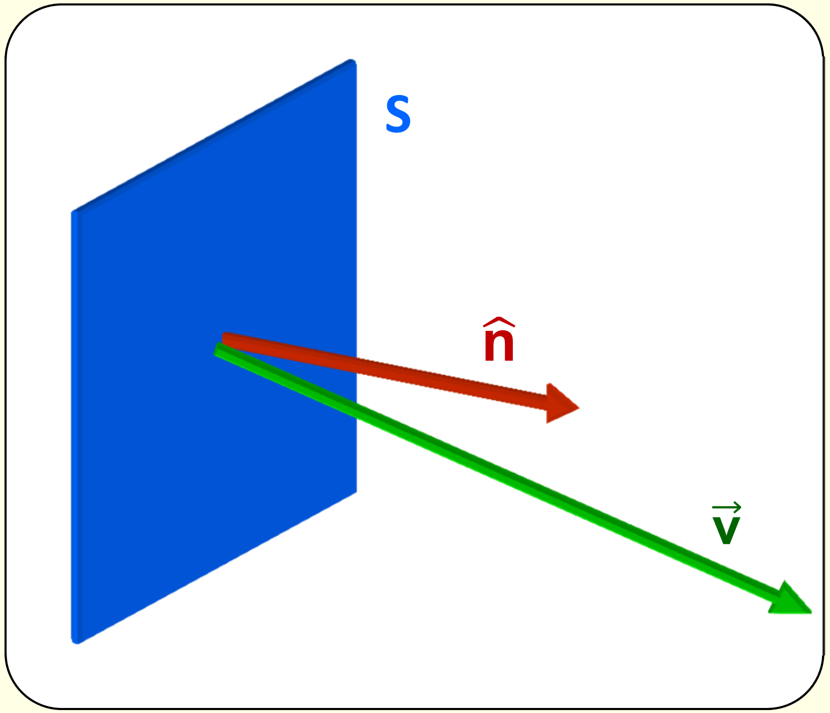


# Flusso del campo elettrico

- Definizione di flusso di un campo vettoriale $\vec{v}$ *attraverso* una superficie *S*, di cui $\hat{n}$ è il <u>vettore unitario normale</u> *(versore)* :

$$\Phi_v(S) = \vec{v} \cdot \hat{n}\, S \qquad \text{[oppure]}$$

$$\Phi_v(S) = \int \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$




- caso particolare :

  $\vec{v}$ è il campo elettrico $\vec{E}$.

NB :

- *S* è una superficie geometrica “ideale”;
- $\Phi_v(S)$ è uno scalare, che dipende da vettori.

# teorema di Gauss

Data una superficie chiusa *S* ed un campo elettrostatico $\vec{E}$ :

$$\Phi_{\vec{E}}(S) \equiv \oint \vec{E} \cdot \hat{n} \; dS = \sum_i q_i / \varepsilon_o \; ;$$

la somma algebrica $\sum_i$ è estesa a tutte le cariche contenute nella superficie *S*.

NB
- il teorema di Gauss è matematicamente equivalente alla legge di Coulomb;
- è un potente strumento di calcolo dei campi elettrici (cfr. conservazione dell'energia in meccanica).

# campi elettrici : carica puntiforme [1]

- dalla legge di Coulomb per carica puntiforme *Q* :

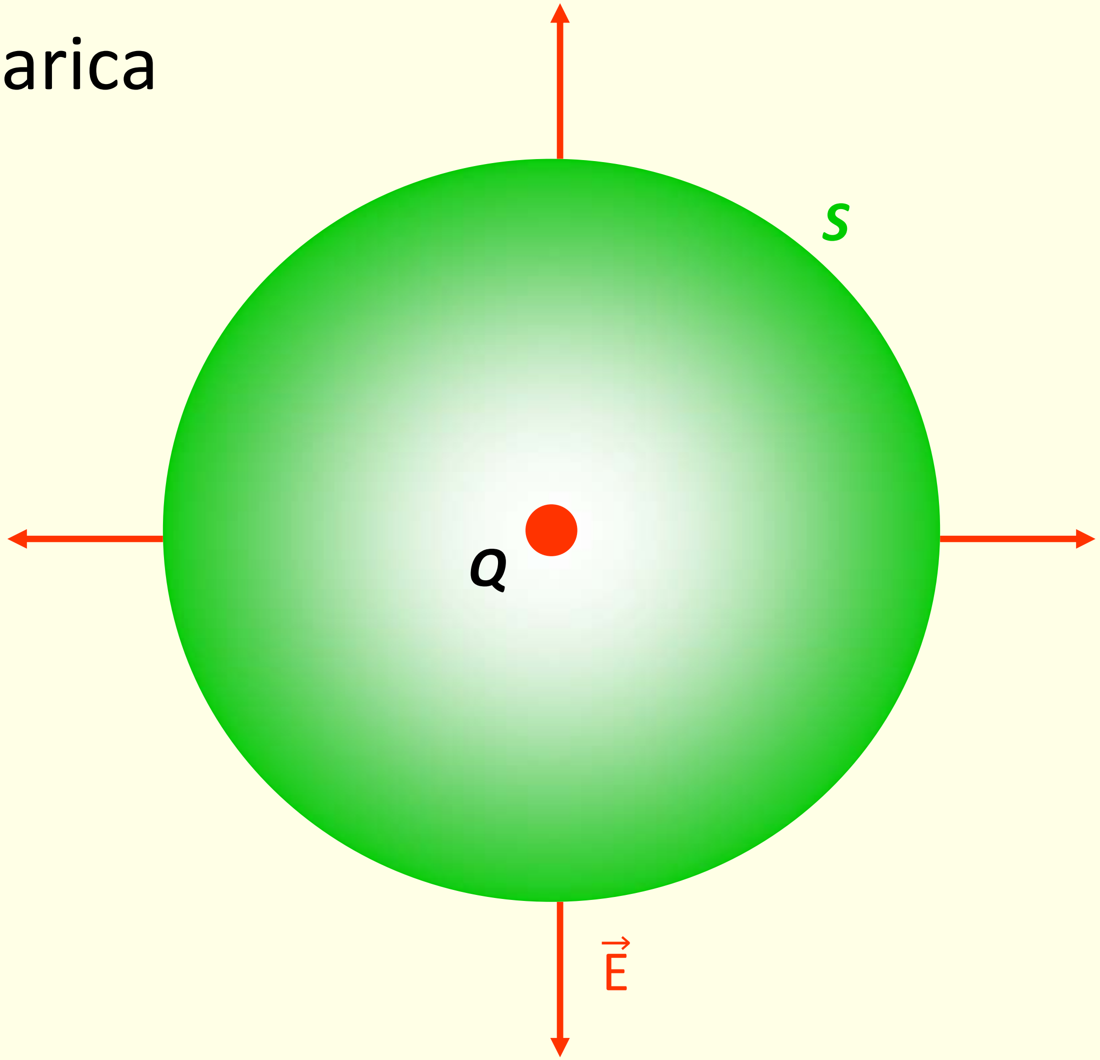
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

→ (senza conoscere il t. di Gauss) :

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int ds\, \vec{E} \cdot \hat{n} =$$

$$= \frac{4\pi r^2 Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_o}.$$

**QED**



# campi elettrici : carica puntiforme [2]

- viceversa, noto il t. di Gauss :

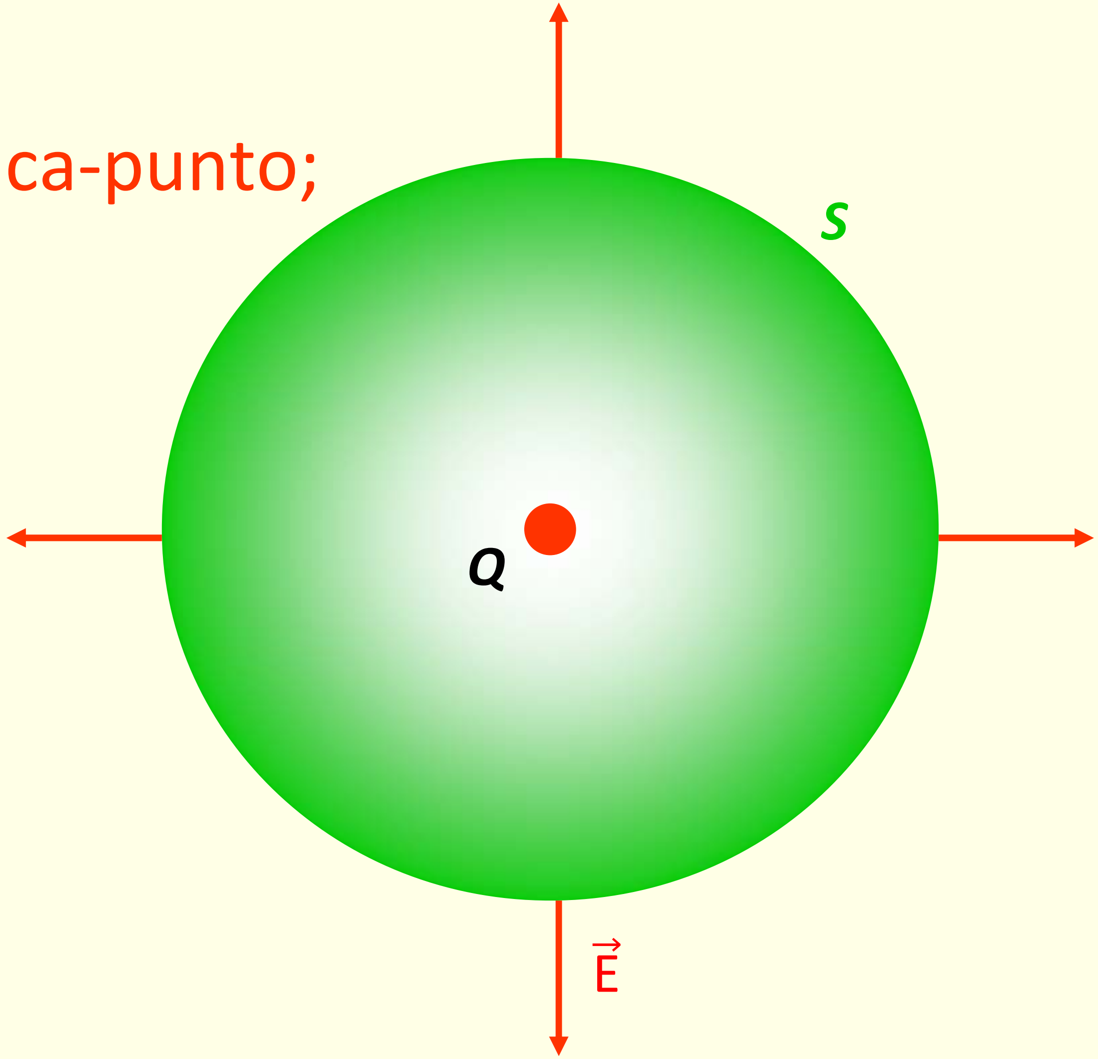
$\vec{E}$ ha simmetria sferica;

$\vec{E}$ è diretto lungo la linea carica-punto;

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int ds\, \vec{E} \cdot \hat{n} =$$

$$= 4\pi r^2 \times E = Q/\varepsilon_o;$$

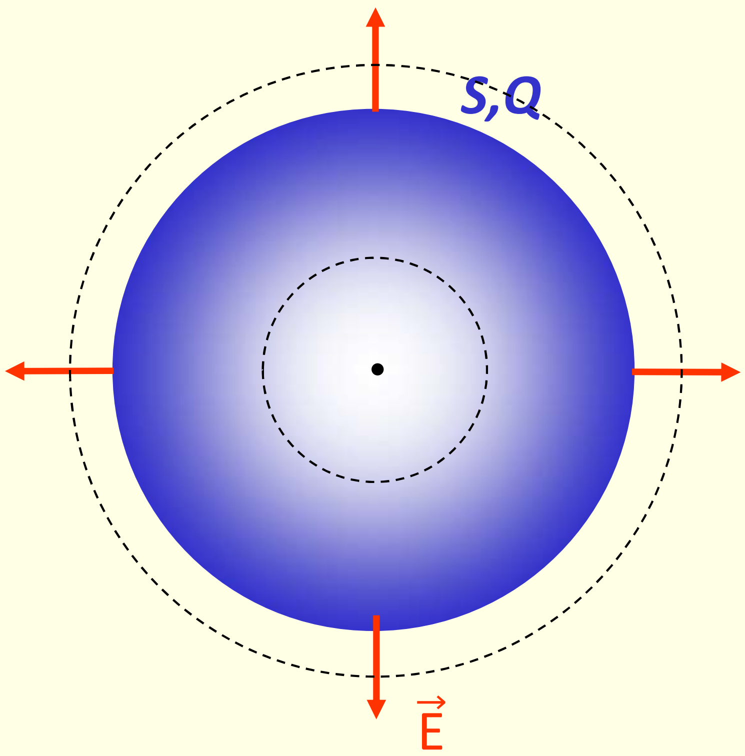
$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}. \quad \textbf{\textit{QED}}$$



# campi elettrici : guscio sferico

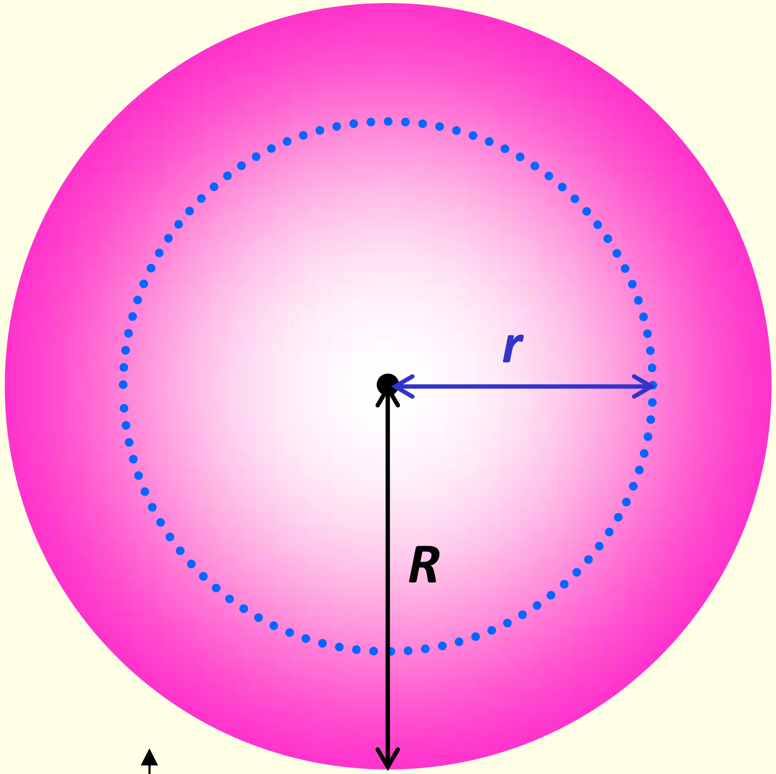
due zone dello spazio:

- punto <u>esterno</u> al guscio : ripetere ragionamento precedente → un guscio sferico produce all'esterno lo stesso campo di una carica puntiforme : $|\vec{E}| = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$; direzione <u>radiale</u>.
- punto <u>interno</u> al guscio : ripetere ragionamento precedente → il campo elettrico all'interno del guscio è nullo : $\vec{E} = 0$.



# campi elettrici : sfera piena

sfera piena (raggio R, carica Q) :



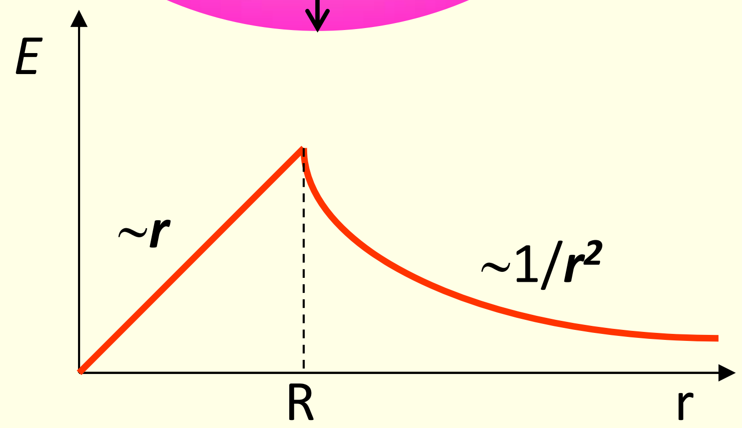

a) esterno (r > R) :

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$; direzione radiale.

b) interno (r < R) :

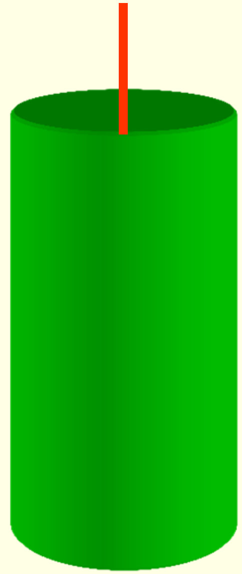
$$\Phi_{\vec{E}}(S) = 4\pi r^2 \times E = [q(r)]/\varepsilon_0 =$$
$$= [\,Q \times (^4\!/\!_3\,\pi r^3) \,/\, (^4\!/\!_3\,\pi R^3)\,]\,/\varepsilon_o;$$

$$|\vec{E}| = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$; direzione radiale.



# campi elettrici : filo carico

- filo carico, densità $\lambda = dQ/dx$ :



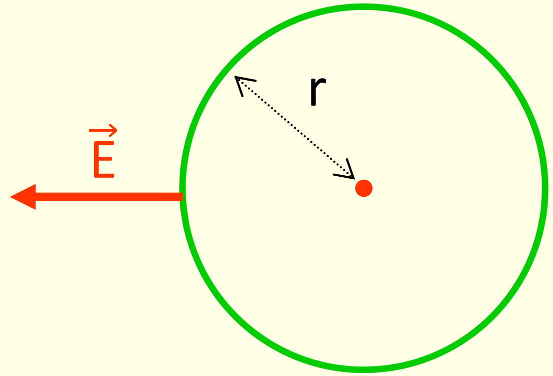
$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \Phi_{\vec{E}}(mantello) + \Phi_{\vec{E}}(tappi) =$$

$$[\,\Phi_{\vec{E}}(tappi) = 0\,]$$

$$= S\,E =$$

$$= 2\pi r h \times E = \lambda \times h / \varepsilon_o ;$$

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$ ; direzione <u>radiale</u>.




[NB : $E \sim 1/r$ ]

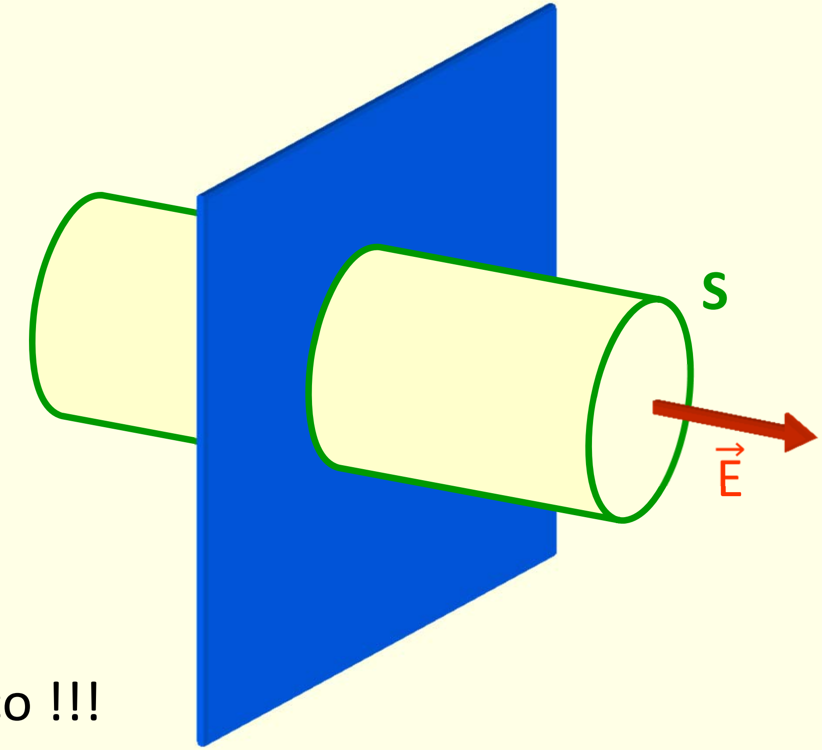
# campi elettrici : strato

- strato carico piano, densità $\sigma = dQ/dS$ :

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \Phi_{\vec{E}}(\mathit{mantello}) + \Phi_{\vec{E}}(\mathit{tappi}) =$$

$$[\Phi_{\vec{E}}(\mathit{mantello}) = 0]$$

$$= 2SE = Q/\varepsilon_o = \sigma S/\varepsilon_o ;$$



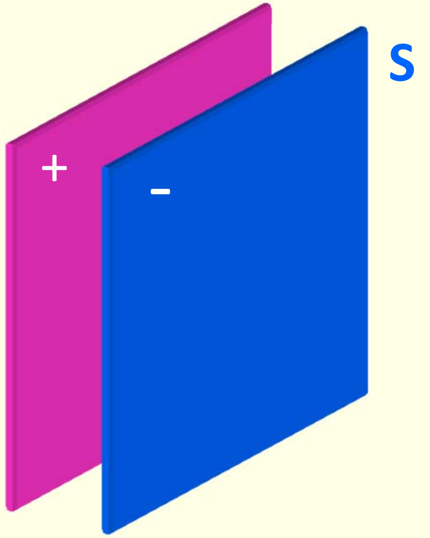

$$E = \sigma / (2\,\varepsilon_o).$$

NB *E* non dipende dalla distanza punto-piano carico !!!

capire bene le approssimazioni implicite ...

# campi elettrici : doppio strato

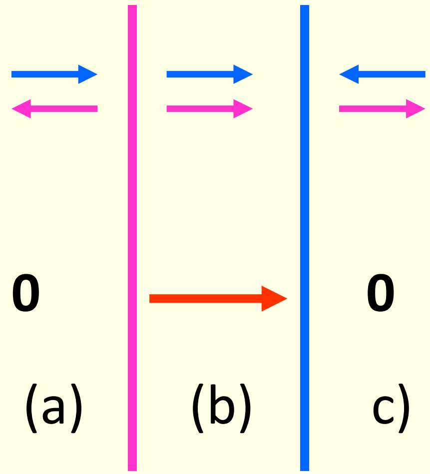
- doppio strato carico (due piani indefiniti paralleli, con densità $\pm\sigma$) ;
- tre zone dello spazio : a,b,c (somme vettoriali);




a) $E = 0$;

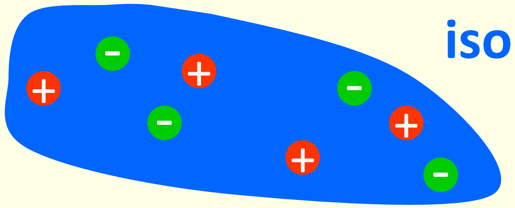
b) $E = E_+ + E_- = \sigma / \varepsilon_o$ ;

c) $E = 0$.

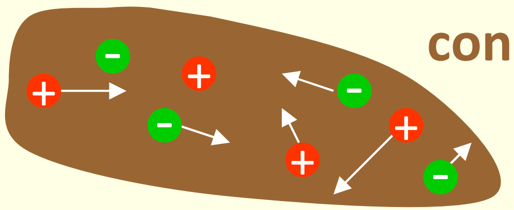


# conduttori ed isolanti

- si chiamano "*isolanti*" quei corpi (ex. legno, vetro, ceramica) in cui le cariche elettriche NON possono muoversi; l'elettrostatica degli isolanti è simile a quella del vuoto (vedi oltre $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0\, \varepsilon_r$);
- si chiamano "*conduttori*" quei corpi (ex. metalli), all'interno dei quali le cariche elettriche scorrono liberamente (meglio, gli elettroni degli orbitali esterni sono *liberi*); l'elettrostatica dei conduttori richiede che le cariche elettriche siano in equilibrio elettrostatico tra loro (cfr. l'acqua in un sistema di condotti).



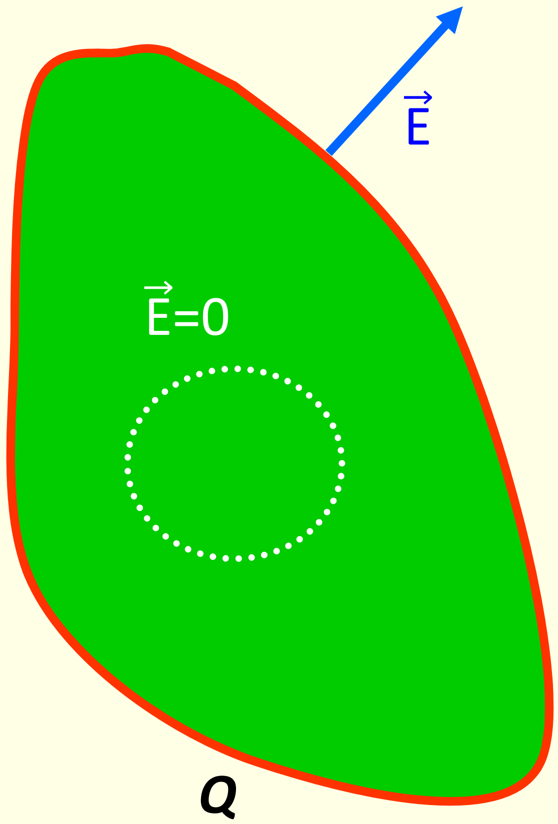
isolante



conduttore

# campo elettrico di un conduttore

- situazione statica (= cariche <u>ferme</u>);
- campo interno $\vec{E} = 0$ (se $\vec{E} \neq 0$, le cariche si muoverebbero);
- superficie generica interna al corpo "…" $\rightarrow$ teorema di Gauss $\rightarrow$ carica nulla all'interno del corpo $\rightarrow$ tutte le cariche (***Q***) si dispongono sulla superficie;
- il campo $\vec{E}$ sulla superficie del corpo è ortogonale alla superficie stessa (la componente parallela metterebbe in movimento le cariche).



# campi elettrostatici negli isolanti

- spiegazione microscopica (polarizzazione) : un isolante in un campo elettrico ha le molecole deformate ($\rightarrow$ piccoli dipoli) [oppure le molecole sono piccoli dipoli anche in assenza di campo elettrico, ex. acqua];
- i dipoli di allineano al campo elettrico, e in questo modo alterano la distribuzione di cariche;

$\rightarrow$ il campo totale è la risultante di tutti questi effetti;

- regola empirica : ogni materiale possiede una "*costante dielettrica*" $\varepsilon_r$, un numero puro > 1; le leggi dell'elettro-statica si modificano nei materiali isolanti : $\varepsilon_o \rightarrow \varepsilon_o \varepsilon_r$ ;

ex. legge di Coulomb : $|\vec{F}| = q_1 q_2 / (4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2)$ ;

capacità di un condensatore piano **[v. oltre]** : $C = \varepsilon_o\varepsilon_r S / d$.

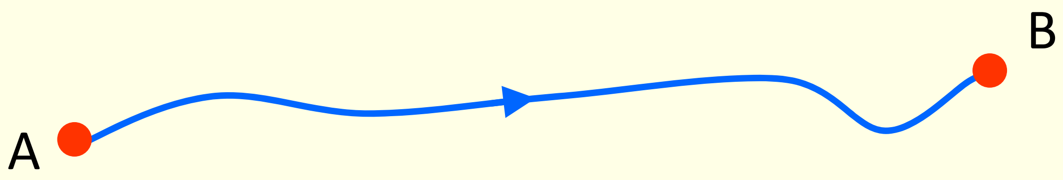
# potenziale elettrico [1]

- la forza elettrostatica (*e.s.*) è conservativa (cfr. forza gravitazionale, che ha la stessa forma geometrica);
- pertanto, esiste l'*energia potenziale e.s.* :

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -L_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} ;$$

- si definisce il "*potenziale e.s.*" $V$ ;
- $\Delta V_{AB}$ è il lavoro della forza e.s. per portare una carica $q_0$ dal punto A al punto B, diviso $q_0$ :

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \Delta U_{AB} / q_0 = -L_{AB} / q_0$$



# potenziale elettrico [2]

- $\Delta V_{AB}$ non dipende dal cammino della carica, ma solo dai punti iniziale e finale;
- $\Delta V_{AB}$ è l'integrale del campo elettrico tra A e B :

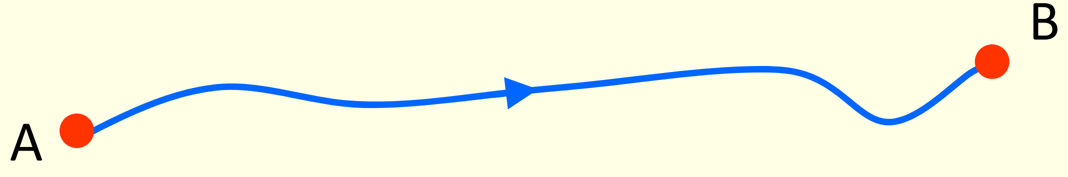
$$\Delta V_{AB} = - L_{AB} / q_0 = = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{x} \;\; / q_0 = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\,\vec{x} \;;$$

- nel caso di carica puntiforme *q* :

$$\Delta V_{AB,\ \mathrm{puntiforme}} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\,\vec{x} \; = \; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \;;$$

- usualmente si sceglie la "costante" di *V* in modo che il valore di $V(\infty)$ sia zero :

$$\Delta V_{\infty X} = V_X - V_\infty = V_X$$



# il volt

- unità di misura MKS del potenziale elettrico :

  1 Volt = 1 V = 1 Joule / 1 Coulomb

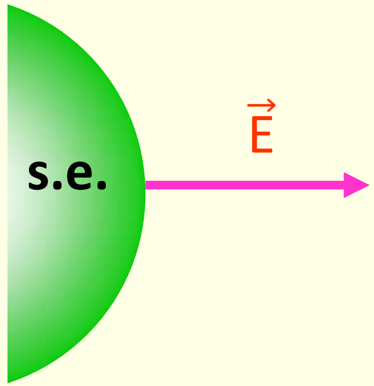
- utilizzando il Volt, il campo elettrico può essere misurato in :

  [campo] = [forza / carica] = N / C =

  = N × m / ( C × m ) = Volt / m

# superficie equipotenziale

- *"superficie equipotenziale"* (*s.e.*): luogo dei punti con lo stesso potenziale [dati due punti A e B su una s.e., $\Delta V_{AB}=0$];
- se il campo è generato da una carica puntiforme, le s.e. sono sfere centrate nella carica;
- [si potrebbe dimostrare che] $\vec{E}$ in un punto è ortogonale alla s.e. passante nel punto.



# capacità

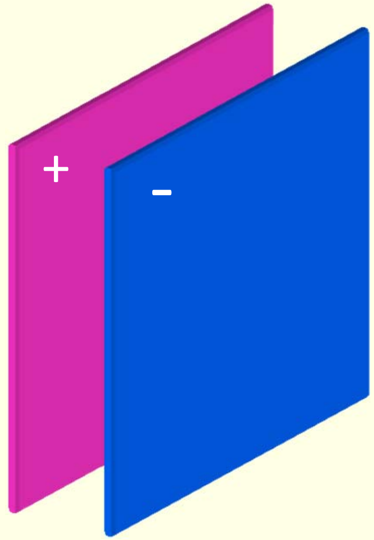
- si definisce "*capacità elettrica*" di un conduttore ($C$) il rapporto tra la carica portata sul conduttore e il corrispondente aumento di potenziale :

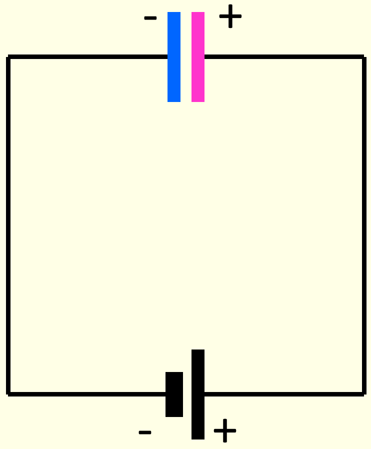
$$C = Q / \Delta V$$

- $C$ si misura in *Farad* ($F$) : 1 Farad = 1 $F = C / V$ ;
- per un conduttore isolato, $\Delta V \sim Q \rightarrow C$ non dipende da Q e da $\Delta V \rightarrow$ dipende solamente dalla geometria dei conduttori;
- si chiama "*induzione completa*" il caso in cui tutte le linee di campo che escono da un conduttore entrano in un secondo (ex. il doppio strato);
- un sistema di conduttori in situazione di i.c. costituisce un "*condensatore*".

# condensatori

- un condensatore è costituito da due "armature" (ex. piatti), una delle quali è caricata $+Q$ (ex. con una pila, vedi oltre);
- l'altra armatura, in condizioni di induzione completa, acquista una carica $-Q$ ;
- la carica totale del condensatore è $Q_{TOT} = +Q - Q = 0$;
- in elettrotecnica, un condensatore si disegna come due sbarrette affacciate [vedi a lato ⊣⊢ in alto, differente da batteria in basso] ;
- in commercio si trovano c. da $10^{-6} \div 10^{-12}$ F.

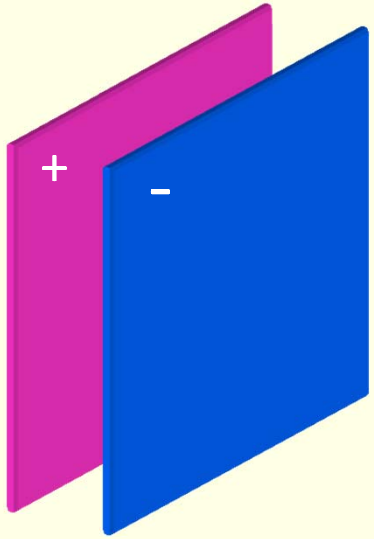


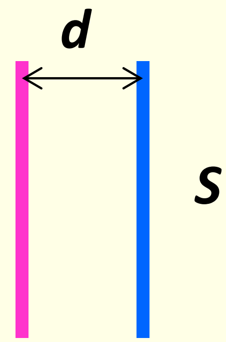



# condensatore piano

- campo tra le armature (doppio strato) $E = \sigma / \varepsilon_o$ ;
- d.d.p. $\Delta V = = \int_A^B \vec{E} \cdot d\,\vec{x} = E\,d$ ;
- carica $Q = \sigma \cdot S$ ;
- capacità C :

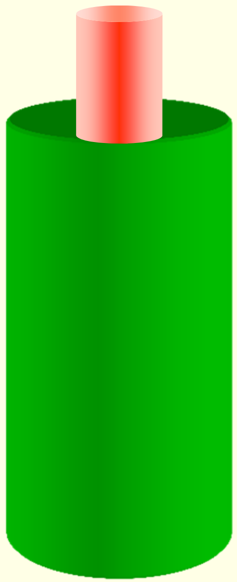
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} .$$



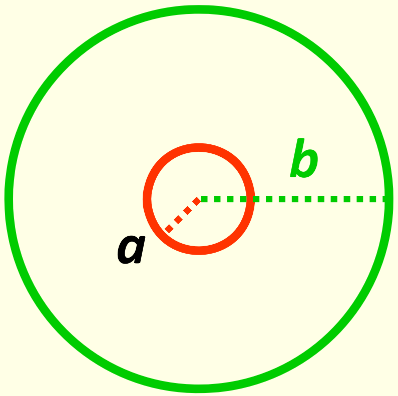
# condensatore cilindrico

- altezza del cilindro : h ;



- campo tra le armature (filo carico) :
  $E\ [= \lambda/(2\pi\varepsilon_o r)] = q / (2\pi\varepsilon_o rh)$ ;
- d.d.p. $\Delta V = \int E \cdot dr = \dfrac{q \ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_o h}$;
- carica $Q = q$ ;
- capacità:

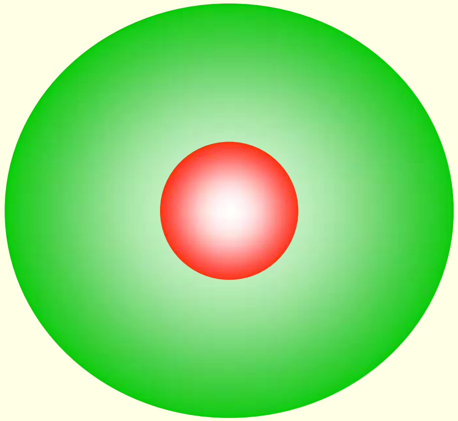
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{q\, 2\pi\varepsilon_o h}{q \ln(b/a)} = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{\ln(b/a)} .$$

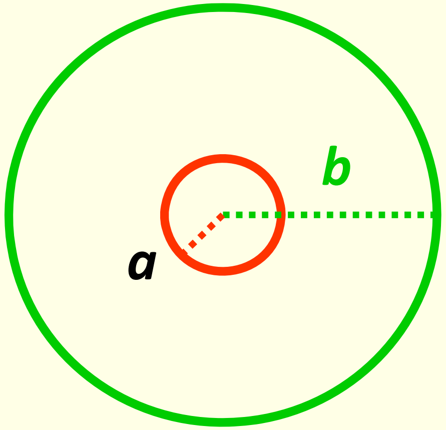


# condensatore sferico

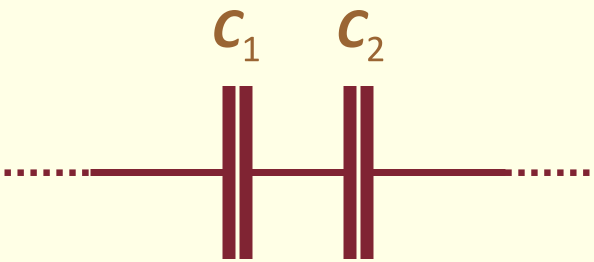
- campo tra le armature (guscio sferico): $E = q / (4\pi\varepsilon_o r^2)$ ;
- d.d.p. $\Delta V = \int E \cdot dr = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$;
- carica $Q = q$ ;
- capacità:

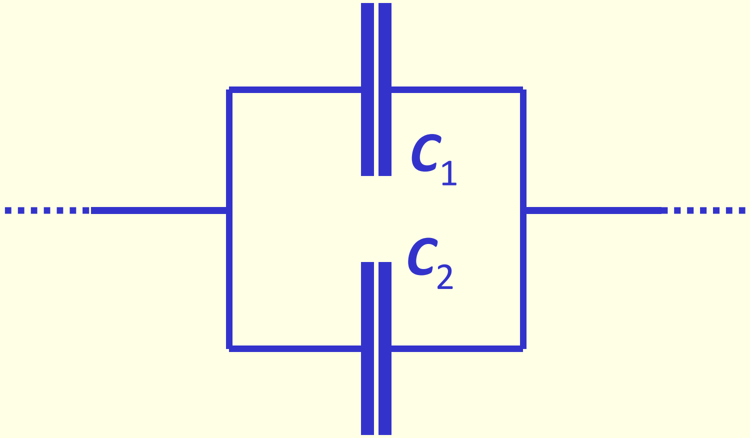
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{q\ 4\pi\varepsilon_o}{q\ (1/a - 1/b)} = \frac{4\pi\varepsilon_o\ ab}{b - a}\ .$$





# condensatori in serie / parallelo




- serie :

$$\Delta V_{TOT} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \;;$$

$$q_{1+} = q_{1-} = q_{2+} = q_{2-} \equiv q;$$

$$\Delta V_{TOT} = q/C_1 + q/C_2 = \\ = q\,(1/C_1 + 1/C_2\,);$$

$$\boxed{1/C_{TOT} = 1/C_1 + 1/C_2.}$$

- parallelo:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \equiv \Delta V\;;$$

$$q_1 \quad = C_1 \Delta V\;;\; q_2 = C_2 \Delta V;$$

$$q \quad = q_1 + q_2 = C_1\,\Delta V + C_2 \Delta V \\ = (C_1 + C_2\,)\Delta V\;;$$

$$\boxed{C_{TOT} \quad = C_1 + C_2.}$$

# Elettromagnetismo

a) elettrostatica;

b) correnti continue;

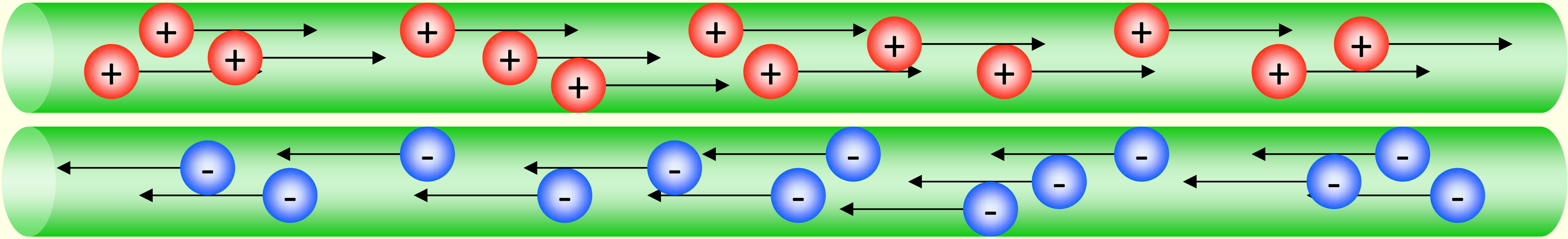
c) campi magnetici;

d) induzione elettromagnetica;

e) equazioni di Maxwell (cenni).

f) **onde e ottica [vedi].**

# la corrente elettrica



- le cariche sono libere di muoversi all’interno dei conduttori;
- una carica q che, nell'unità di tempo, attraversa una superficie ortogonale all’asse di un conduttore, definisce una **corrente elettrica** i:

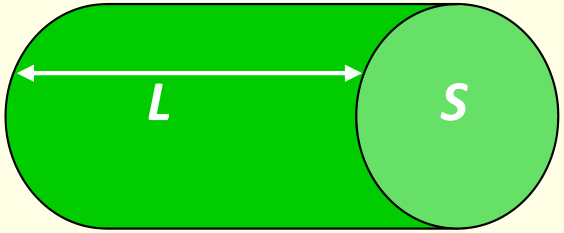
$$\boxed{i = dq / dt}$$

- unità di misura : 1 Ampère = 1 A = 1 C / s.

# densità di corrente

- il conduttore ha superficie S, normale al suo asse;
- si chiama "densità di corrente" $\vec{J}$ (vettore parallelo alla velocità delle cariche positive)[*] :

$$\left|\vec{J}\right| = J = i \,/\, S = 1/S \; dq/dt$$

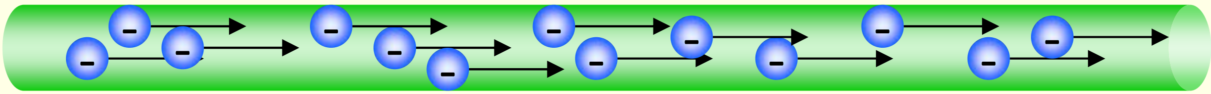



- detto n il numero di elettroni di conduzione per unità di volume, v la velocità media degli elettroni, e la loro carica [*] :

$$q = N_{el}\, e = n\, V\, e = (n\, S\, v\, \Delta t)\, e\, ;$$

$$i = dq/dt = n\, S\, v\, e\, ;$$

$$J = n\, v\, e\, .$$

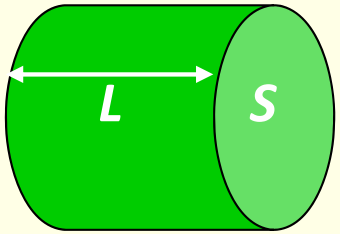


[*] attenzione al verso, l'elettrone ha carica negativa !!!

# leggi di Ohm

- per molti conduttori (conduttori “ohmici”, ex. metalli) :

$$\boxed{V / i = \text{costante} = R}$$



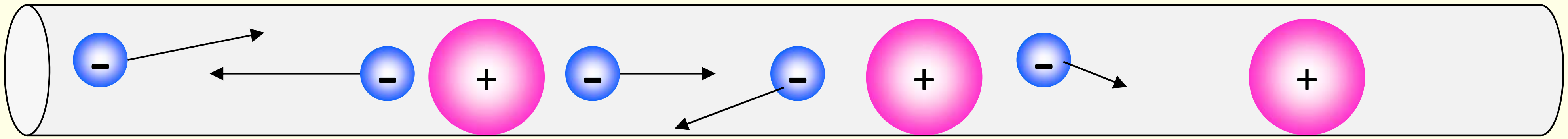

- $R\, i = R\, J\, S = V = E\, L \rightarrow E = R\, J\, S / L \equiv \rho\, J$

$$\boxed{R = \rho\, L / S}$$

- $R$ in Volt / Ampere = Ohm = $\Omega$ ;
- $\rho$ (resistività) dipende dal tipo di materiale e dalle sue condizioni (ex. temperatura);
- $\rho$ in $\Omega$ m; per i metalli $\rho = (1 \div 50) \times 10^{-8}\ \Omega$ cm.

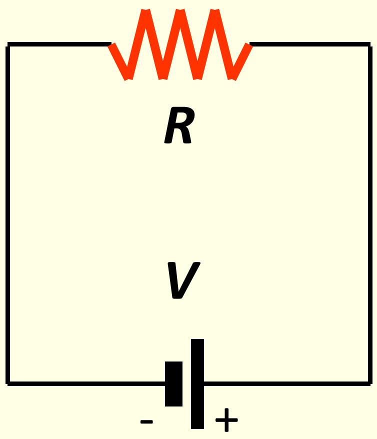
# elettroni nei metalli

- con campo elettrico nullo ["elettroni liberi", di massa *m* e carica *e* ] :
  - gli elettroni si muovono liberamente nel conduttore;
  - collidono con gli atomi del reticolo cristallino, in media dopo un tempo $\tau$ ;
  - la <u>velocità quadratica media</u> $\vec{v}_{q.m.}$ dipende da temperatura + effetti quantistici;
  - la <u>velocità media vettoriale</u> $\vec{v}_M$ è nulla ($|\vec{v}_{q.m.}| \sim 10^6$ m/s, $\vec{v}_M = 0$);
- un campo elettrico $\vec{E} \neq 0$ modifica la situazione ($v_M \rightarrow v'_M \neq 0$) :
  - $v'_M$ è data da $F = ma = eE \rightarrow v'_M = a\tau = eE\tau / m \rightarrow v'_M \sim 10^{-5}$ m/s;
  - ricaviamo $\rho$ : $v'_M = J / (ne) \rightarrow E = v'_M m / (e\tau) = Jm / (ne^2\tau)$ ;
    $E = \rho J \rightarrow \rho = m / (ne^2\tau)$ ;
- la legge di Ohm è valida, solo se <u>$\rho$ è costante</u> e <u>non dipende</u> da E
  $\rightarrow$ <u>$\tau$ non deve dipendere da E</u> (vero se $v'_M << v_{q.m.}$).



# energia nei circuiti elettrici

- campo $\vec{E}$ : accelerazione costante degli elettroni;
- legge di Ohm : corrente costante ( $\rightarrow v_{elettroni}$ costante);
- la resistenza <u>dissipa energia</u> (potenza dissipata);
- calcoliamo gli effetti energetici della corrente :
  - $dU = V\,dq = V\,i\,dt$ ;
  - potenza $W = dU / dt = V\,i$ ;
  - $W = V\,i = i^2 R = V^2 / R$.




[se *R* aumenta, *W* aumenta ? diminuisce ? **<u>spiegare</u>** !!!]

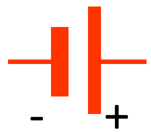
# forza elettro-motrice

- f.e.m. di un generatore : $\mathfrak{f} = dL / dq$ ;
- differenza di potenziale (d.d.p.) $\leftrightarrow$ (f.e.m.) ;
- $dL = \mathfrak{f}\ dq = \mathfrak{f}\ i\ dt = i^2 R\ dt \rightarrow \mathfrak{f} = i\ R$ [simile alla l. di.Ohm] ;
- definizione di "resistenza interna" di un generatore;
- la forza associata alla f.e.m. <u>NON è conservativa</u>.

# circuiti elettrici

alcuni elementi dei circuiti (attivi e passivi) :

- generatore di f.e.m. $\Delta V = f$

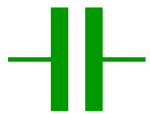



$\Delta V$

- resistenza $\Delta V = R\, i$

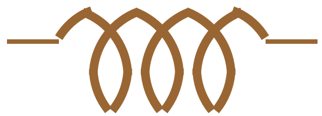
$R$

- condensatore $\Delta V = Q\,/\,C$



$C$

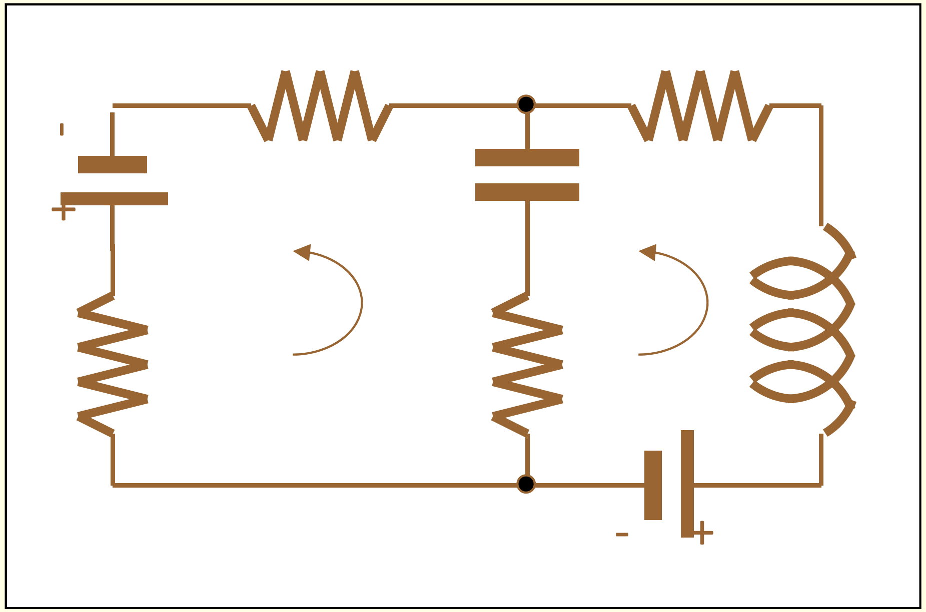
- induttanza $\Delta V = L\, di/dt$



$L$

# leggi dei circuiti

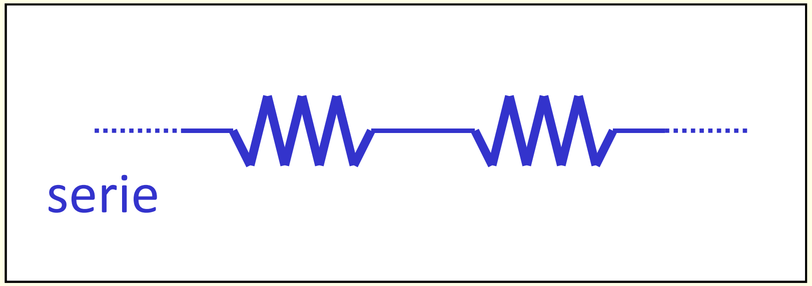
- definizione (v. testo) di
  - "generatore";
  - "resistenza interna";
  - "circuito";
  - "nodo";
  - "maglia".

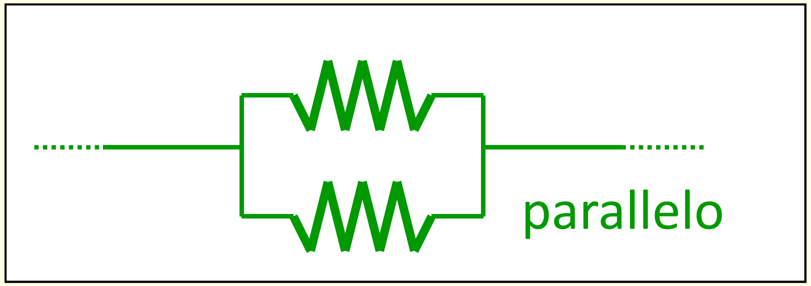



- leggi dei circuiti :
  - la somma algebrica delle d.d.p. in una maglia è nulla;
  - la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla;

# resistenze in serie e in parallelo

- serie : $i_1 = i_2 \equiv i$ ; $\Delta V_{TOT} = \Delta V_1 + \Delta V_2$ ;
  - $\Delta V_{TOT} = \mathrm{i}\ \mathrm{R}_1 + \mathrm{i}\ \mathrm{R}_2 = \mathrm{i}\ (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)$;
  - $R_{TOT} = R_1 + R_2$.
- parallelo: $\Delta V_1 = \Delta V_2 \equiv \Delta V$ ;
  - $i = i_1 + i_2 = \Delta V / R_1 + \Delta V / R_2 = \Delta V\ (1/R_1 + 1/R_2)$ ;
  - $1 / R_{TOT} = 1 / R_1 + 1 / R_2$. [$\rightarrow$ $\mathbf{R_{TOT} = R_1\ R_2 / (R_1 + R_2)}$]

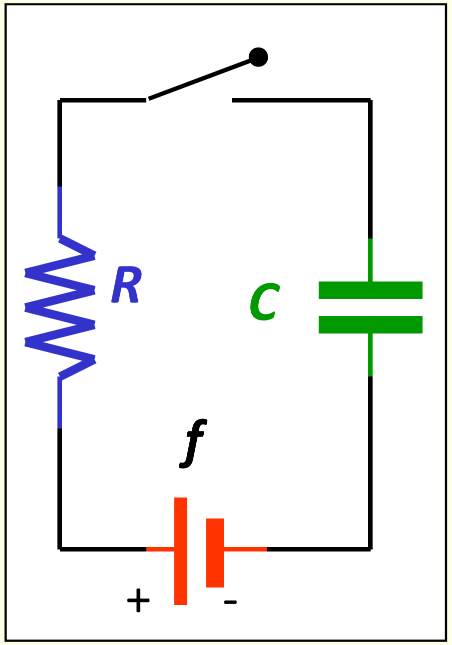


# circuito RC : carica [1]

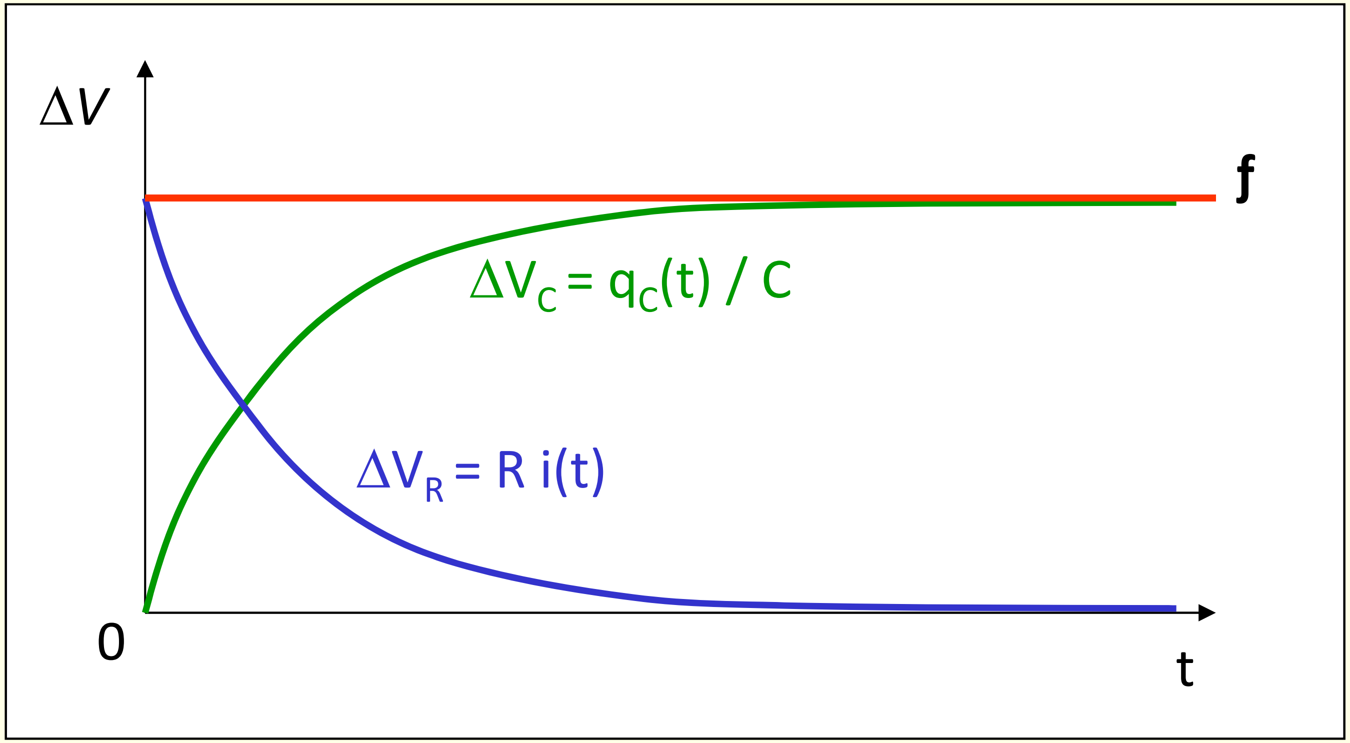
- legge dei circuiti : $f - i R - q / C = 0$;
- $f = i R + q / C$ ;          $q(t{=}0) = 0$;
- $f = R\, dq / dt + q / C$ ; **[equazione differenziale]**
- $q(t) = q_C(t) = Cf\,[1 - e^{-t/(RC)}]$ ;
- $i(t) = dq / dt = f\, e^{-t/(RC)} / R$ ;
- $\Delta V_C(t) = q_C(t) / C = f\,[1 - e^{-t/(RC)}]$ ;
- $\Delta V_R(t) = R\, i(t) = f\, e^{-t/(RC)}$ ;

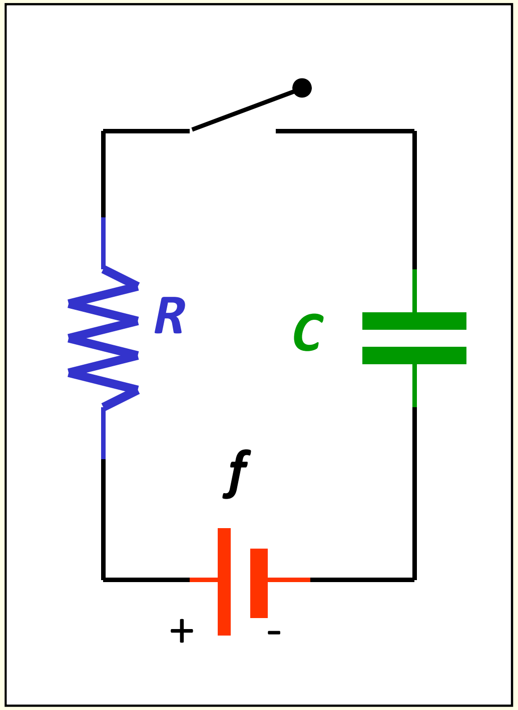
NB : $\Delta V_C(t) + \Delta V_R(t) = [f - fe^{-t/(RC)}] + [fe^{-t/(RC)}] = f$.   **[QED]**



# circuito RC : carica [2]

- $\Delta V_C(t) = q_C(t) / C = f\,[1 - e^{-t/(RC)}]$ ;
- $\Delta V_R(t) = R\,i(t) = f\,e^{-t/(RC)}$ ;
- $f = \Delta V_C(t) + \Delta V_R(t) = \text{cost.}$



# circuito RC : scarica

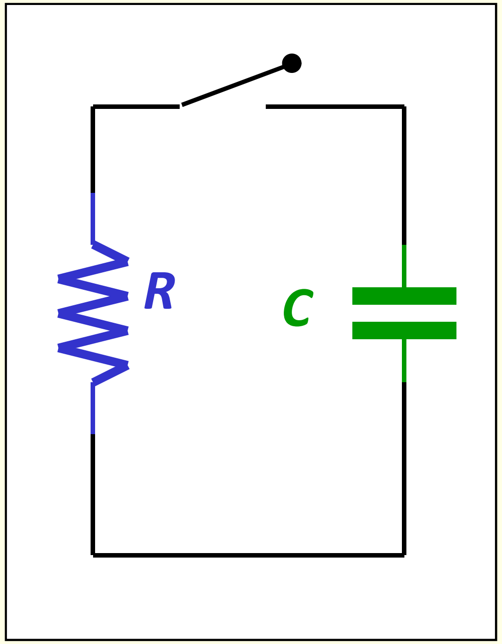
- non c'è più il generatore f ; $q(t=0) = q_0$ ;
- $R\, dq / dt + q / C = 0$; [equazione differenziale]
- $q(t) = q_C(t) = q_0\, e^{-t/(RC)} = V_0\, C\, e^{-t/(RC)}$ ;
- $i(t) = dq / dt = -V_0\, e^{-t/(RC)} / R$ . [ NB : "-" ]

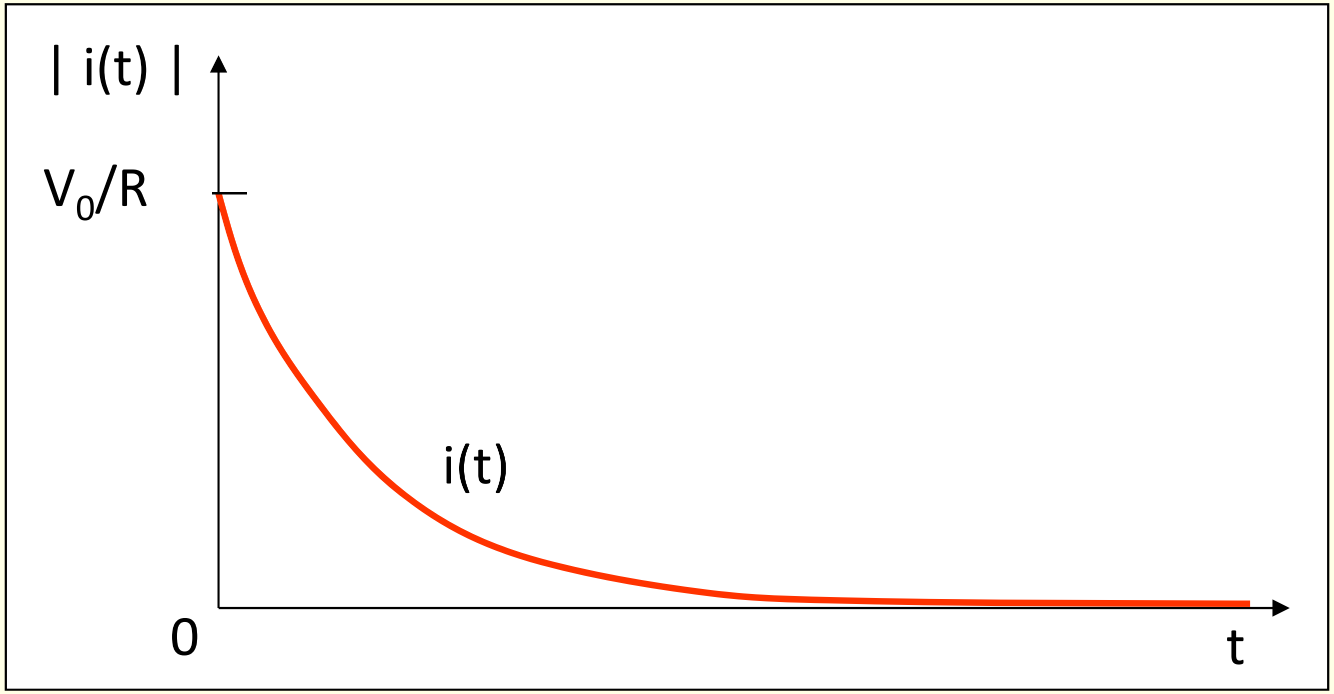
$R\, dq/dt + q/C = 0$

$dq/q = -dt / (RC)$

$\ln(q/q_0) = -t / (RC)$

$q = q_0 e^{-t/(RC)}$.



# energia di un condensatore

- dall'eq. precedente [ $i(t) = dq / dt = - V_0 \, e^{-t/(RC)} / R$ ] :
- $W = V^2 / R = i^2 R = V_0^2 \, e^{-2t/(RC)} / R$ ;
- $L = \int W \, dt = V_0^2 / R \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-2t/(RC)} \, dt = ½ \, C \, V_0^2$ ;
- altro metodo [portiamo una carica *dq* attraverso la ddp *V* ] :
- $dL = V \, dq = q \, dq / C$ ;
- $L = \int dL = \int_{t=0}^{t=\infty} q(t)/C \, dq = ½ \, q_0^2 / C = ½ \, C \, V_0^2$ .

# Elettromagnetismo

a) elettrostatica;

b) correnti continue;

c) campi magnetici;

d) induzione elettromagnetica;

e) equazioni di Maxwell (cenni).

f) **onde e ottica [vedi].**

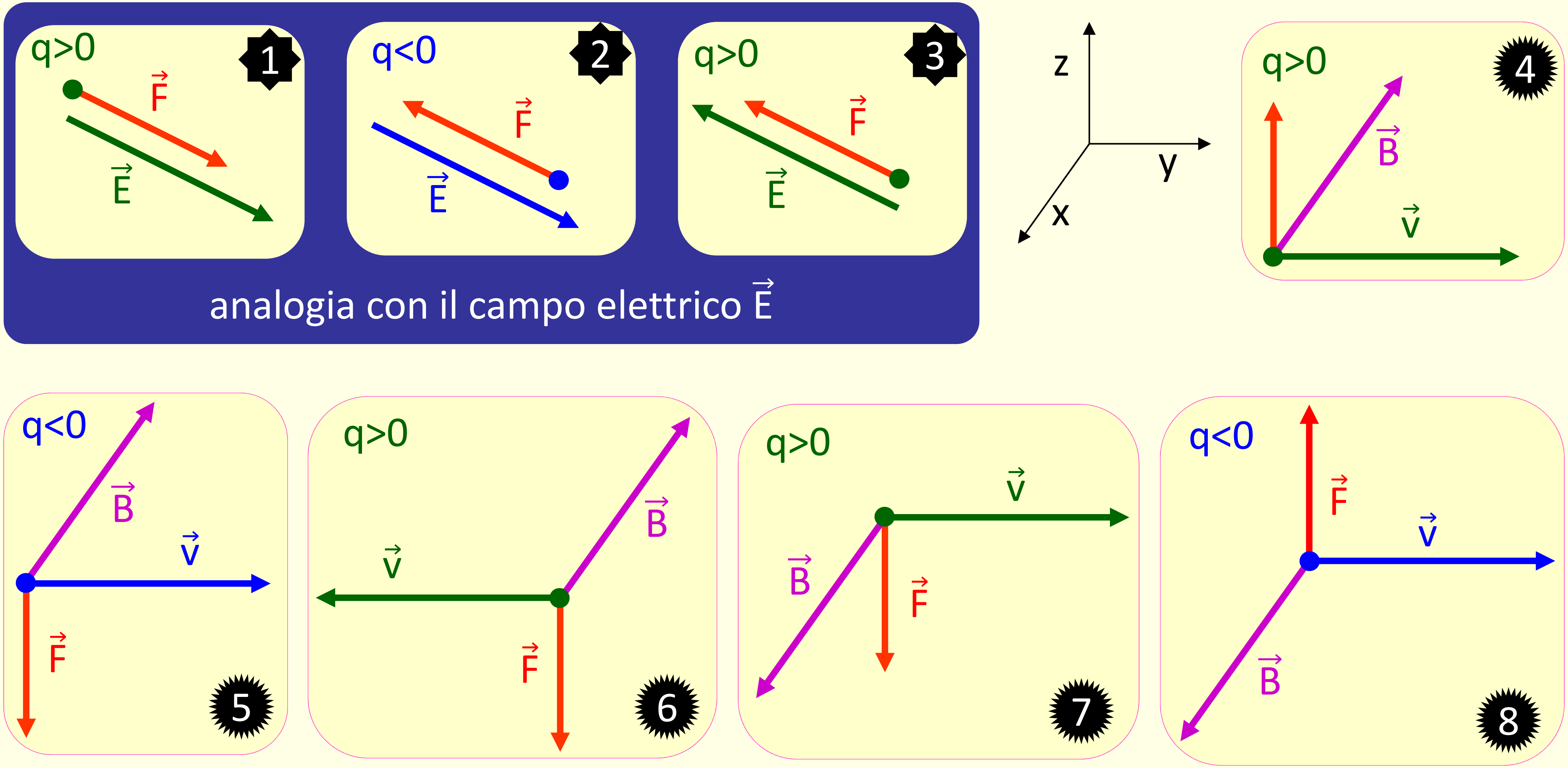
# il campo magnetico $\vec{B}$

- fenomeni magnetici in natura (calamita, elettrocalamita, etc.);
- analogia : il campo elettrico $\vec{E}$ è definito dalla forza su una carica q <u>ferma</u>, il campo magnetico $\vec{B}$ dalla forza su una carica q <u>in movimento</u> con velocità $\vec{v}$ :

$$\vec{F}_E = q\,\vec{E} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\vec{F}_M = q\,\vec{v} \times \vec{B} \quad \textbf{[ forza di Lorentz ]}}$$

- B si misura in “Tesla” (T) : T = N / (C m / s ) = N / (A m) [in CGS anche Gauss (G) : 1 Gauss = $10^{-4}$ T ] .

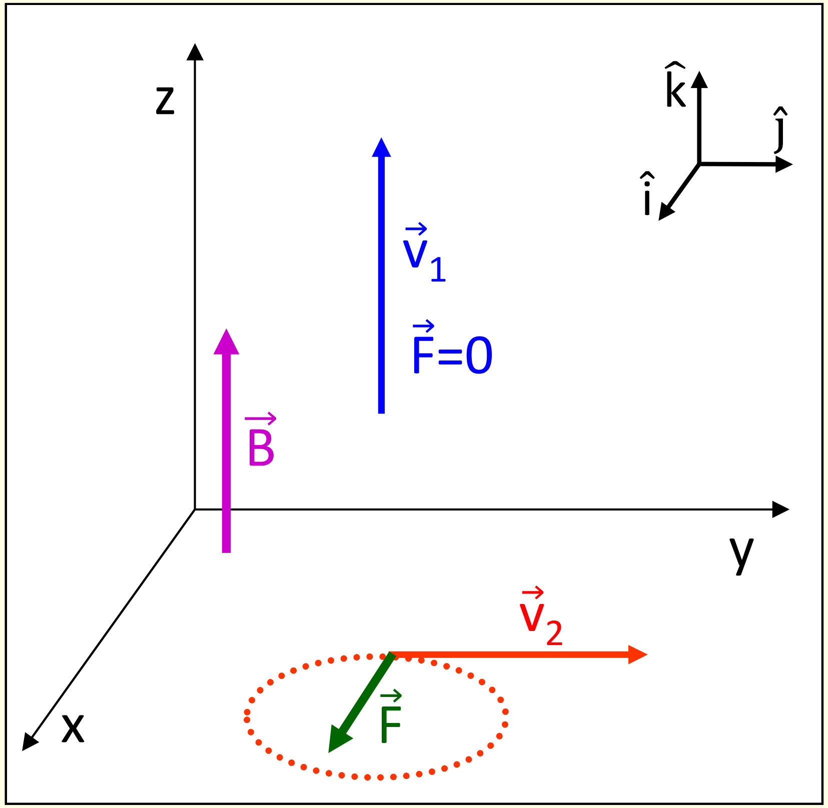
# direzione e verso di $\vec{B}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ (esempi)



# forza di Lorentz : esempi

campo $\vec{B}$ costante lungo z : $\vec{B} = B\,\hat{k}$ ;

- $\vec{v}_1$ lungo z : $\vec{v}_1 = v_1\,\hat{k}$ :
  - $\vec{B} \times \vec{v}_1 = 0 \;\rightarrow \vec{F}_M = 0$;
  - traiettoria rettilinea.
- $\vec{v}_2$ lungo y : $\vec{v}_2 = v_2\,\hat{j}$ :
  - $|\vec{F}_M| = q\, v_2\, B$ ;
  - forza costante in modulo, sempre ortogonale a $\vec{v}_2$ ;
  - traiettoria : moto circolare uniforme;
  - $q\, v_2\, B = m\, v_2^2 / r \rightarrow r = m\, v_2\ / ( q\, B )$.
- v qualsiasi : traiettoria ad <u>elica</u> .



# forza su un filo percorso da corrente

- $i \perp B$ :
  - su un elettrone nel filo {m, e, v} :

$$F_1 = e\,v\,B\ ;$$

  - su un tratto del filo {lunghezza L, sezione S, (elettroni / Volume) n } :

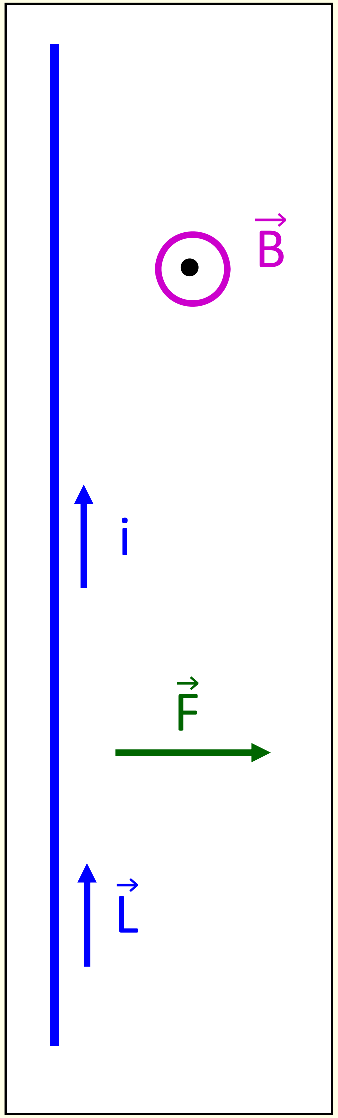
$$F = N_{el.}\,e\,v\,B = \underline{n}\ L\ \underline{S\ e\ v}\ B = \underline{i}\ L\ B\ ;$$

- angolo i/B qualsiasi (vettore $\vec{L}$ / / filo) :

$$\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B}\ ;$$

- filo non rettilineo (o $\vec{B}$ non costante) :

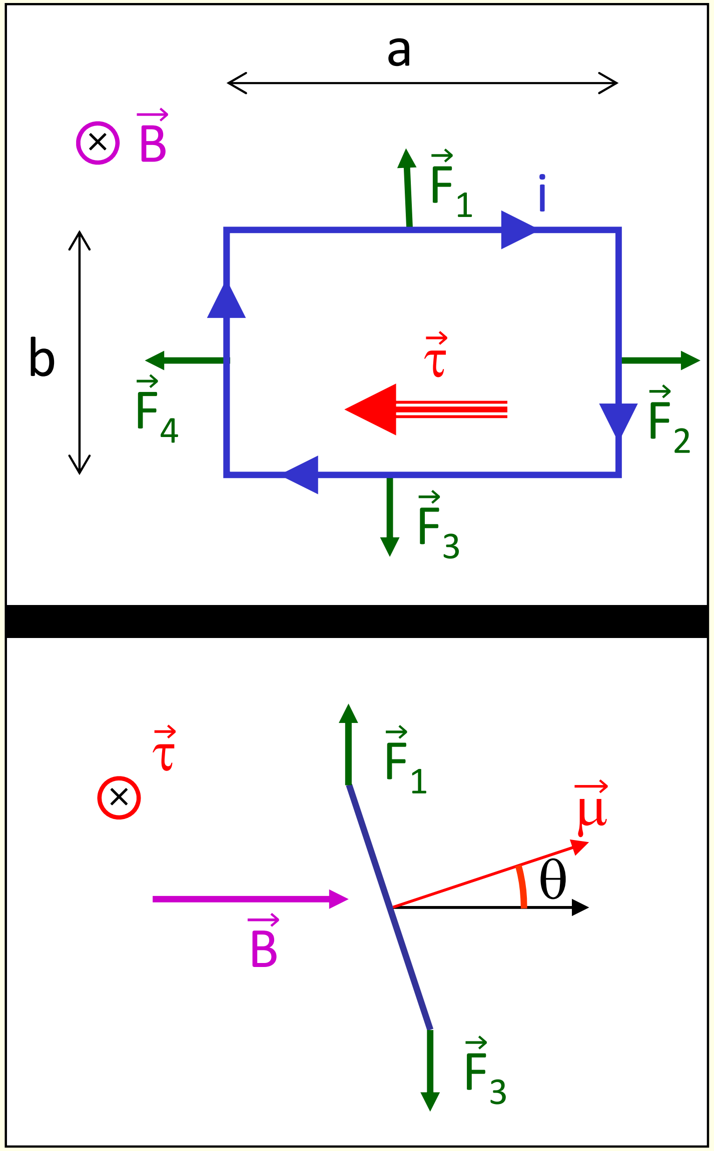
$$\vec{F} = \int i\,d\vec{L} \times \vec{B}\ .$$



# spira percorsa da corrente in campo $\vec{B}$

- corrente i, lati a×b, angolo θ rispetto a £ $\vec{B}$ B;
- forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$;
- $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = iaB$; $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = ibB \sin(90°-\theta)$;
- $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$; $\vec{F}_4 = -\vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$;
- momento $\vec{\tau}$ rispetto al centro della spira;
- per $\vec{\tau}$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ si cancellano, non $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$;
- $|\vec{\tau}| = |½F_1 \, b \sin\theta| + |½F_3 \, b \sin\theta| = iabB \sin\theta$;
- la spira è in equilibrio (stabile) solo se θ=0;
- si definisce il momento di dipolo magnetico

  $|\vec{\mu}| = iab = iS$, $\vec{\mu} \perp (a,b)$, $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.



# legge di Biot-Savart

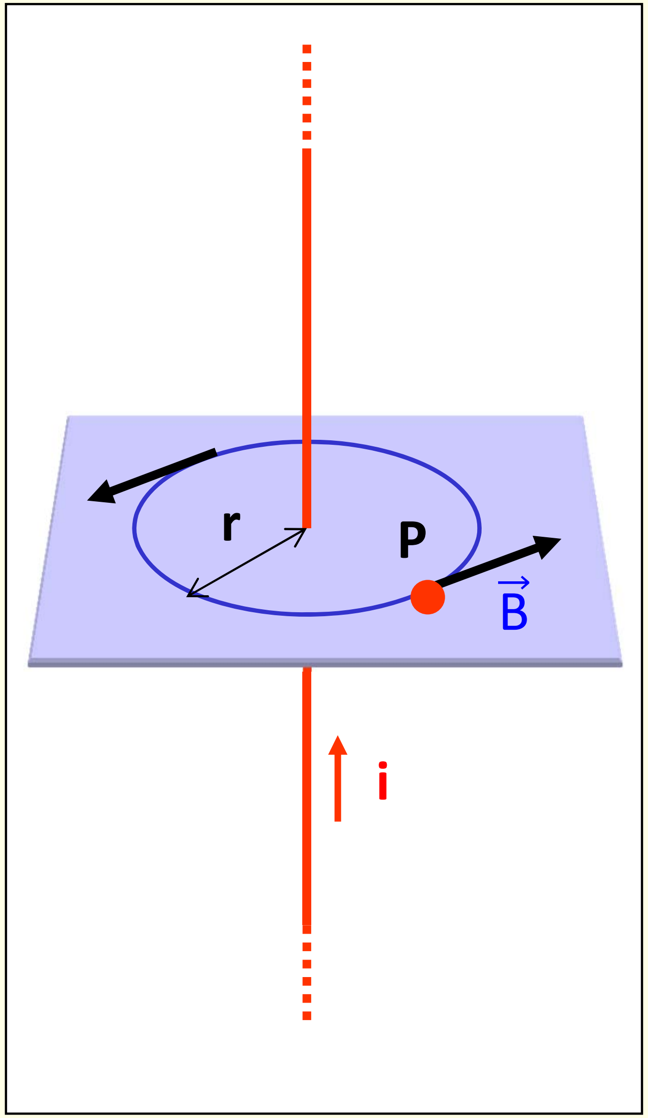
un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente *i* genera in tutto lo spazio un campo magnetico $\vec{B}$, che in un punto *P* distante *r* dal filo vale :

- il modulo $|\vec{B}|$ :

  $\boxed{|\vec{B}| = \mu_0 i / (2\pi r);}$ $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ T m / A;

- la direzione di $\vec{B}$ è tangente alla circonferenza, passante per il punto *P*, giacente sul piano ortogonale al filo e centrata nel filo;

- il verso di $\vec{B}$ segue la "regola della mano destra" (vedi figura);



# correnti → campi magnetici

analogia $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ :

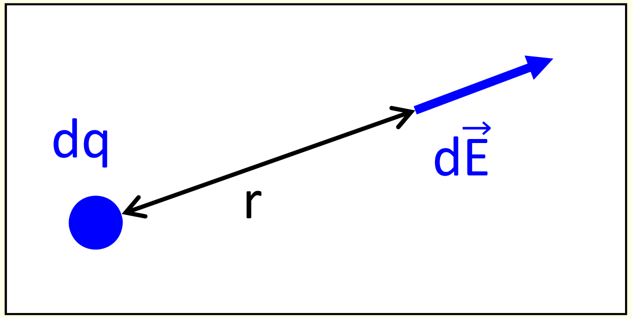
- una carica elementare dq genera un campo elettrico :

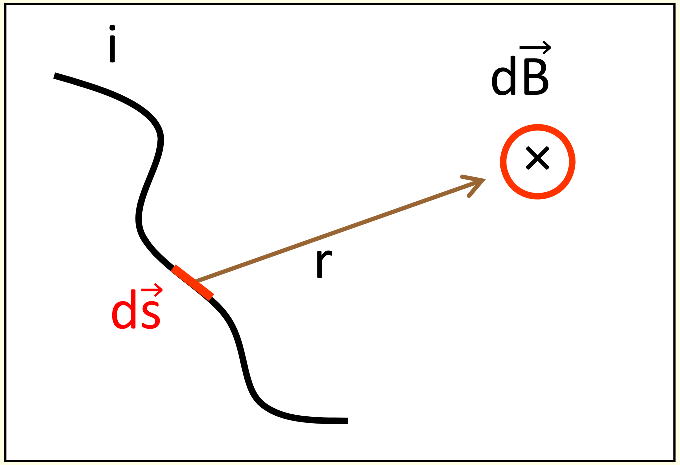
  $d\vec{E} = \vec{r}\, dq \,/\, (4\pi\varepsilon_o\, r^3)$ ;

  $\vec{r}/r^3$ : modulo = $1/r^2$; direzione e verso di $\vec{r}$.

- un pezzetto elementare di filo ds percorso da corrente i genera un campo magnetico :

  $d\vec{B} = \mu_o\, i\, d\vec{s} \times \vec{r} \,/\, (4\pi r^3)$ .



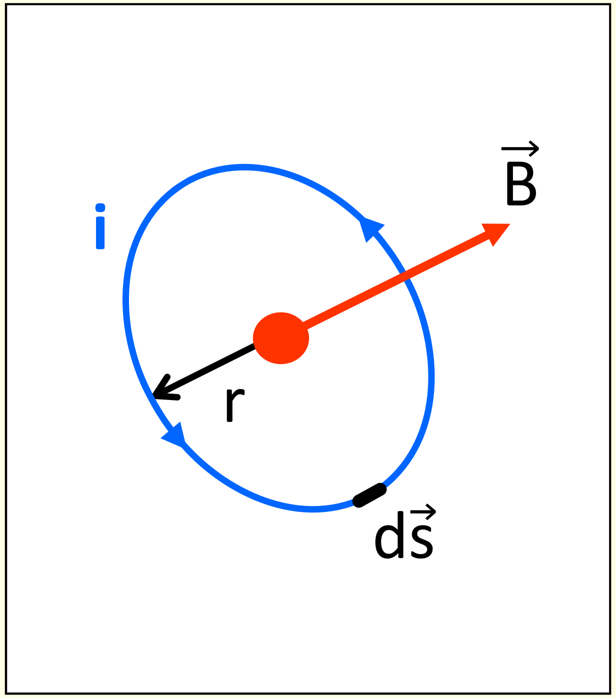
# spira percorsa da corrente

spira circolare di raggio r,
percorsa da corrente i :

- $d\vec{B} = \mu_0 i \, d\vec{s} \times \vec{r} \, / \, (4\pi r^3)$ ;
- $\vec{s} \perp \vec{r} \rightarrow d\vec{s} \times \vec{r} \, / \, r^3 = ds \, / \, r^2$ ;
- $|\vec{B}_{\text{centro spira}}| = \mu_0 \, i \int ds/(4\pi r^2) =$

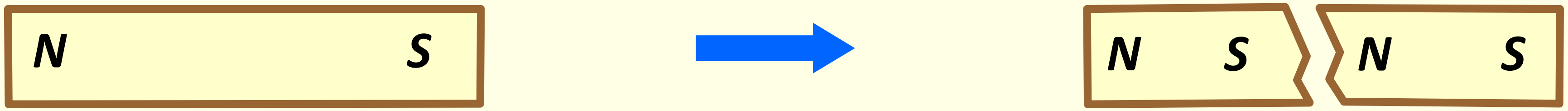
$$= \mu_0 i \times 2\pi r/(4\pi r^2) =$$

$$= \mu_0 \, i \, / \, (2r).$$



# proprietà del campo magnetico

- esperienza della "calamita spezzata";
- in natura, non esistono "monopoli magnetici", l'analogo delle cariche elettriche per il campo magnetico;
- dal punto di vista dei campi vettoriali, il campo magnetico non ha "sorgenti" né "pozzi", le sue linee di campo sono tutte linee chiuse;
- "teorema di Gauss" del campo magnetico : il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo;
- modellino microscopico : la materia come un insieme di molte piccole spire (elettroni) allineate → campo magnetico dei magneti permanenti [teoria ingenua, ma corretta].

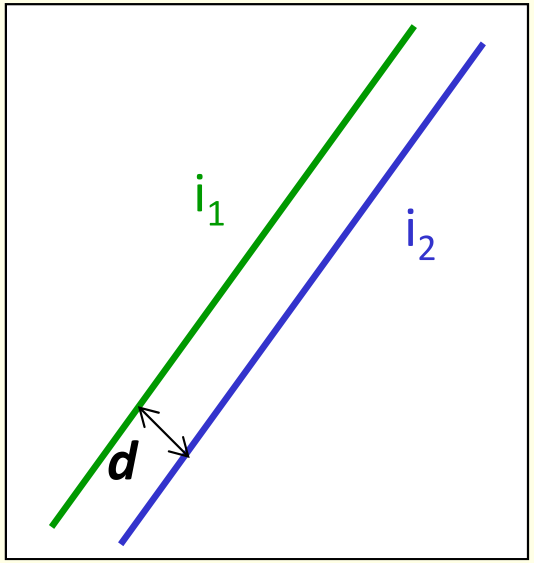


# due conduttori paralleli

- la corrente $i_1$ genera un campo magnetico che esercita una forza sul filo 2 [$\vec{f}_{12}$] ;
- la corrente $i_2$ genera un campo magnetico che esercita una forza sul filo 1 [$\vec{f}_{21}$] ;
- $|\vec{f}_{12}| = i_2 L B_1 = \mu_0 L i_1 i_2 / (2\pi d) = i_1 L B_2 = |\vec{f}_{21}|$ ;

- correnti concordi $\rightarrow$ forze attrattive;
- correnti discordi $\rightarrow$ forze repulsive.

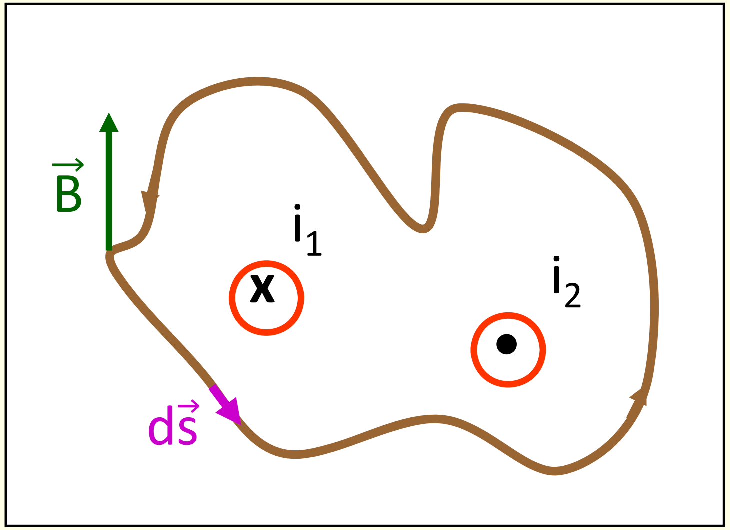
questo metodo è quello realmente usato per misurare con precisione le correnti ($\rightarrow$ definizione dell' Ampère)



# la legge di Ampère

il valore di $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (prodotto scalare tra il campo magnetico e l'elemento di linea), calcolato per una <u>linea chiusa</u> è uguale alla somma <u>algebrica</u> delle correnti <u>concatenate</u> con la linea chiusa, moltiplicato per $\mu_0$ :

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \sum_{\text{conc.}} (\pm i)}$$



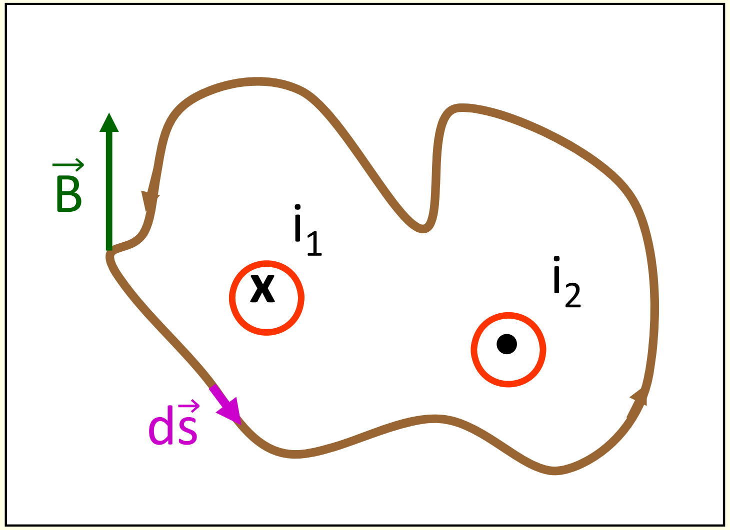
# la legge di Ampère : commenti

- c'è parallelismo tra elettrostatica e magnetismo :

carica ↔ legge di Coulomb ↔ legge di Gauss ;

corrente ↔ legge di Biot-Savart ↔ legge di Ampère.

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \sum_{\text{conc.}} (\pm i)}$$



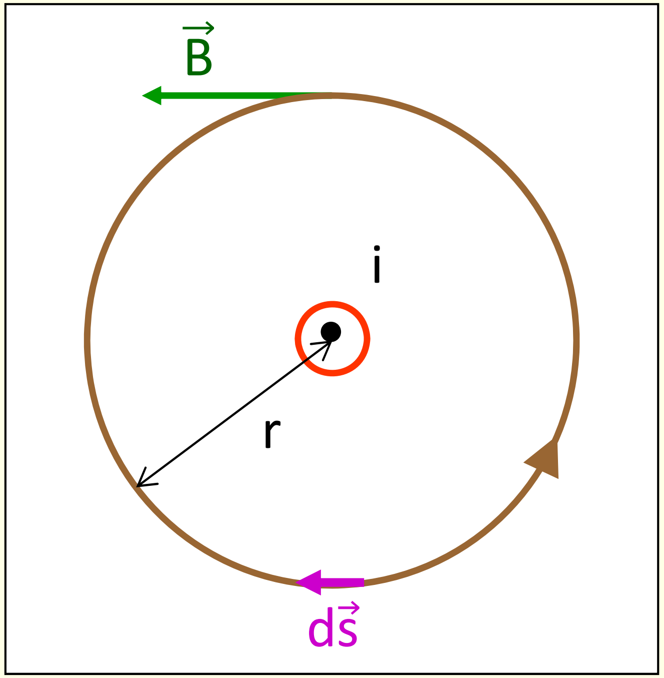
# la legge di Ampère : filo indefinito

- [si ritrova il valore della legge di Biot-Savart]

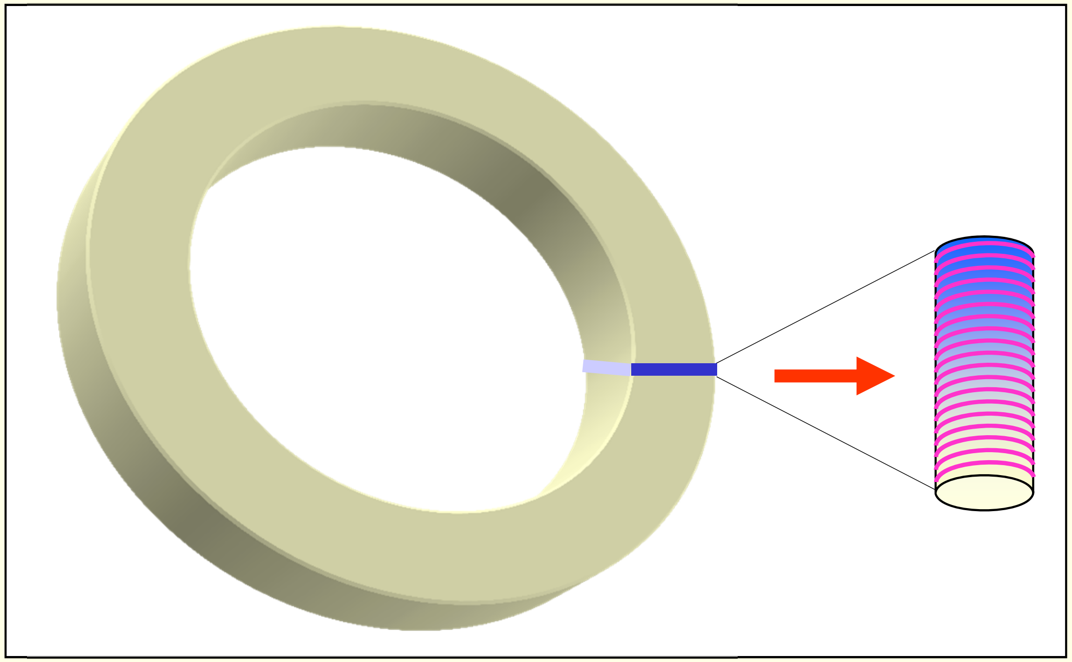
- $\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi \, r \, B = \mu_0 \, i \rightarrow$

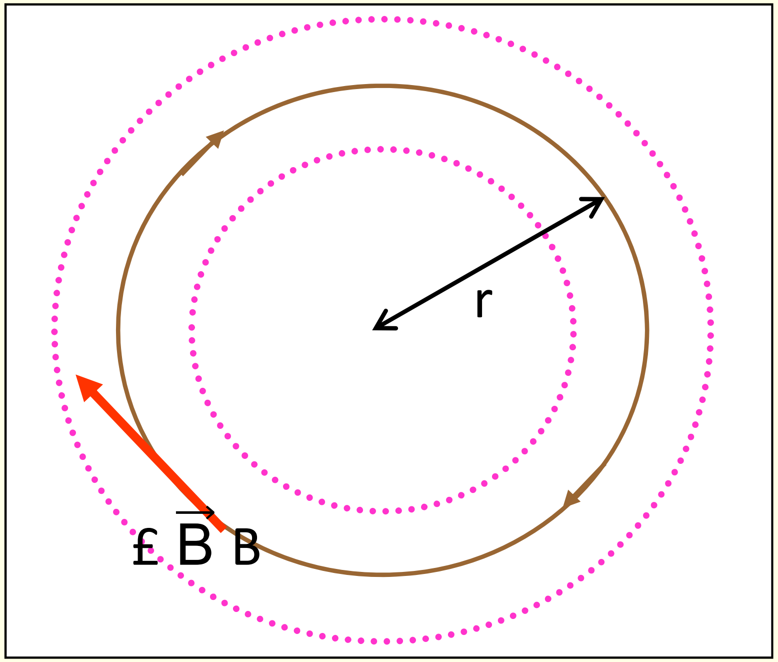
$\rightarrow B = \mu_0 \, i \, / \, (2\pi \, r)$.

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \sum_{\text{conc.}} (\pm i)}$$



# la legge di Ampère : toroide






$R_{int} < r < R_{ext}$ :

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = B\ 2\pi\ r = \mu_0\ i_{TOT} = \mu_0\ i\ N$$

$\rightarrow B = \mu_0\ i\ N\ /\ (2\pi\ r\ );$

$r < R_{int}$ $\vec{B} = 0;$

$r > R_{ext}$ $\vec{B} = 0.$

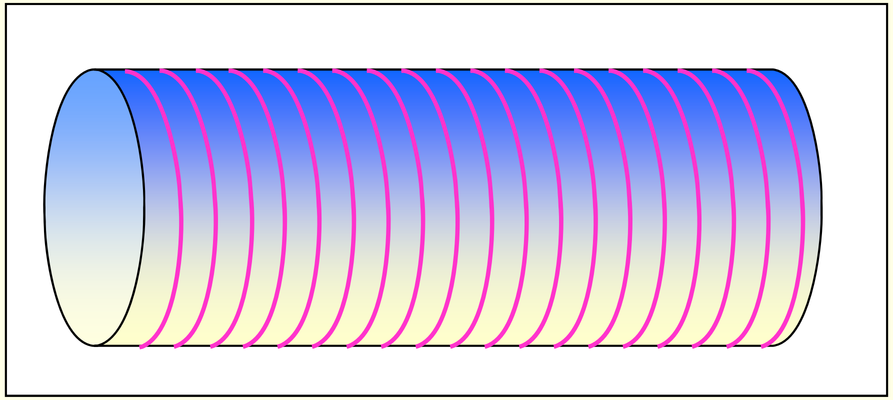
# la legge di Ampère : solenoide

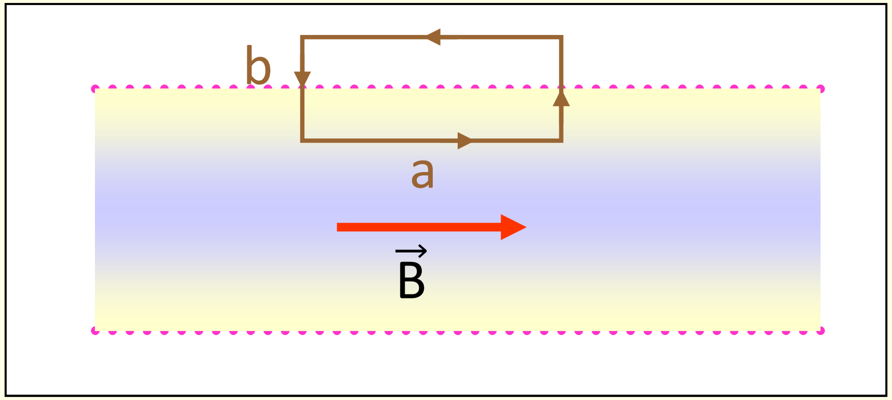
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{a,int} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \cancel{\int_{b} \vec{B}\cdot d\vec{s}} + \cancel{\int_{a,ext} \vec{B}\cdot d\vec{s}} + \cancel{\int_{b} \vec{B}\cdot d\vec{s}} =$$

$$= \int_{a,int} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\,a = \mu_0\, i_{TOT} = \mu_0\, i\, N = \mu_0\, i\, n\, a \rightarrow$$

$$\rightarrow B = \mu_0\, i\, n.$$

$n = N/a$ = "numero di spire per unità di lunghezza"





# Elettromagnetismo

a) elettrostatica;

b) correnti continue;

c) campi magnetici;

d) induzione elettromagnetica;

e) equazioni di Maxwell (cenni).

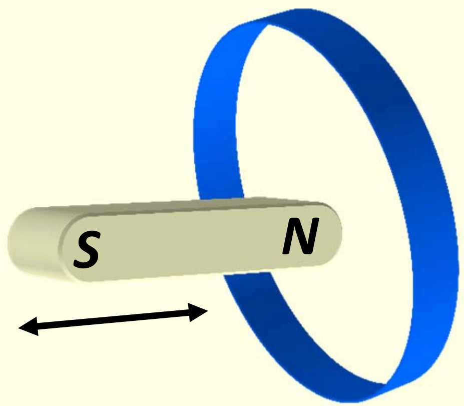
**f) onde e ottica [vedi].**

# legge di Faraday-Neumann-Lenz

- $\Phi_{\vec{B}}(A) = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$;
- 1 Weber = 1 Tesla × 1 $m^2$;
- $\Phi_{\vec{B}}(A)$ non dipende dalla scelta della superficie A, è lo stesso per tutte le superfici delimitate dalla stessa linea;
- legge di F.-N.-L. : quando il flusso concatenato con una spira varia nel tempo, si induce nella spira una f.e.m.

$$\boxed{f = - d\,\Phi_{\vec{B}}(A) / d\,t.}$$

il vettore $\vec{A}$ ha modulo = superficie della spira e direzione ortogonale alla spira stessa.



# legge di Lenz

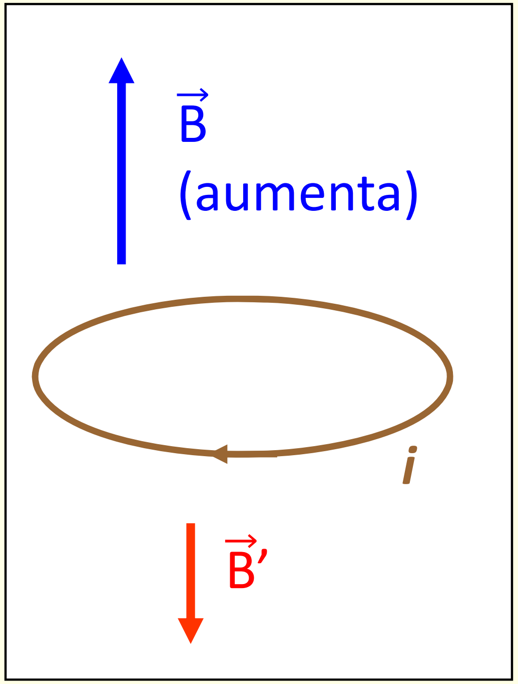
- se la spira è conduttrice, con resistenza R, si genera una corrente :

$$i = f / R = - 1/R \, [d\Phi_{\vec{B}}(A) / d t] \, ;$$

- la corrente i, a sua volta, genera un campo magnetico ($\vec{B}'$), il cui flusso <u>si oppone alla variazione</u> di flusso che lo ha generato (significato del “-”) :

$$\vec{B} \rightarrow \Phi_{\vec{B}}(A) \rightarrow d\Phi_{\vec{B}}(A) / dt \rightarrow f \rightarrow i \rightarrow \vec{B}'$$

$\rightarrow \Phi_{\vec{B}'}(A)$ opposto a <u>variazione</u> di $\Phi_{\vec{B}}(A)$.



# correnti indotte (esempi)

a) $\vec{B} \perp \vec{A}$ ; $\vec{A}$ costante ; $|\vec{B}|$ varia :

$f = - d\Phi/dt = - d(BA) / dt = -A\, dB/dt;$

$i = A/R\, dB/dt.$

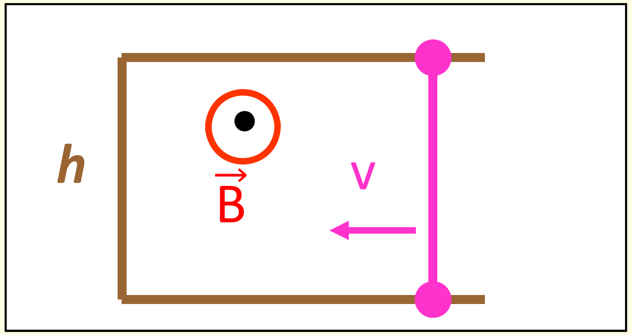
b) $\vec{B} \perp \vec{A}$ ; $\vec{B}$ costante ; $|\vec{A}|$ varia (ex. si stringe, v. figura) :

$f = - d\Phi/dt = - d(BA) / dt = -B\, d(bh)/dt = Bhv;$

$i = Bhv / R;$

$F = ihB = B^2h^2v / R;$

$W = B^2h^2v^2 / R.$



# correnti alternate

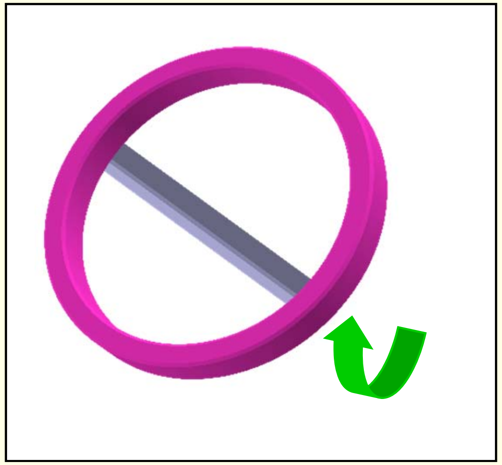
- in una spira rotante in un campo magnetico costante si induce una corrente "alternata", di periodo pari a quello della rotazione della spira;
- $\vec{B}$ = costante; $|\vec{A}|$ = costante;

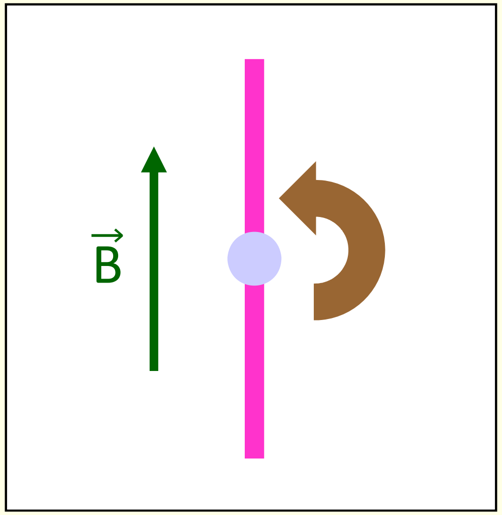
  $\theta$ = angolo($\vec{B}$, $\vec{A}$) = $\omega t$ ;

  $$ƒ = - d\Phi / dt = -BA\, d(\cos\theta) / dt$$

  $$= BA\, \omega \sin(\omega t);$$

  $$i = BA\, \omega \sin(\omega t) / R.$$

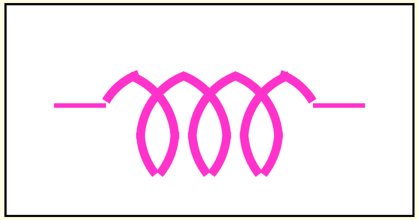




# induttanza

- [analogia con la capacità in corrente continua];
- dato un circuito elettrico di N spire, attraversato da una corrente $i$, che induce un campo magnetico $\vec{B}$, il cui flusso concatenato è $\Phi_{\vec{B}}(A)$, si definisce "induttanza" del circuito il valore

$$L \equiv N\,\Phi_{\vec{B}}(A) \,/\, i$$



- ex. solenoide di lunghezza d, area A, N spire :

$$B = \mu_0 i n \rightarrow N\Phi_{\vec{B}}(A) = (\,n\,d\,)(\,B\,A\,) = \mu_0\, i\, n^2\, d\, A \rightarrow$$

$$L = \mu_0\, n^2\, d\, A$$ **[ L <u>non</u> è funzione della corrente i ].**

# autoinduzione

- in una bobina di induttanza L passa una corrente i, variabile nel tempo :

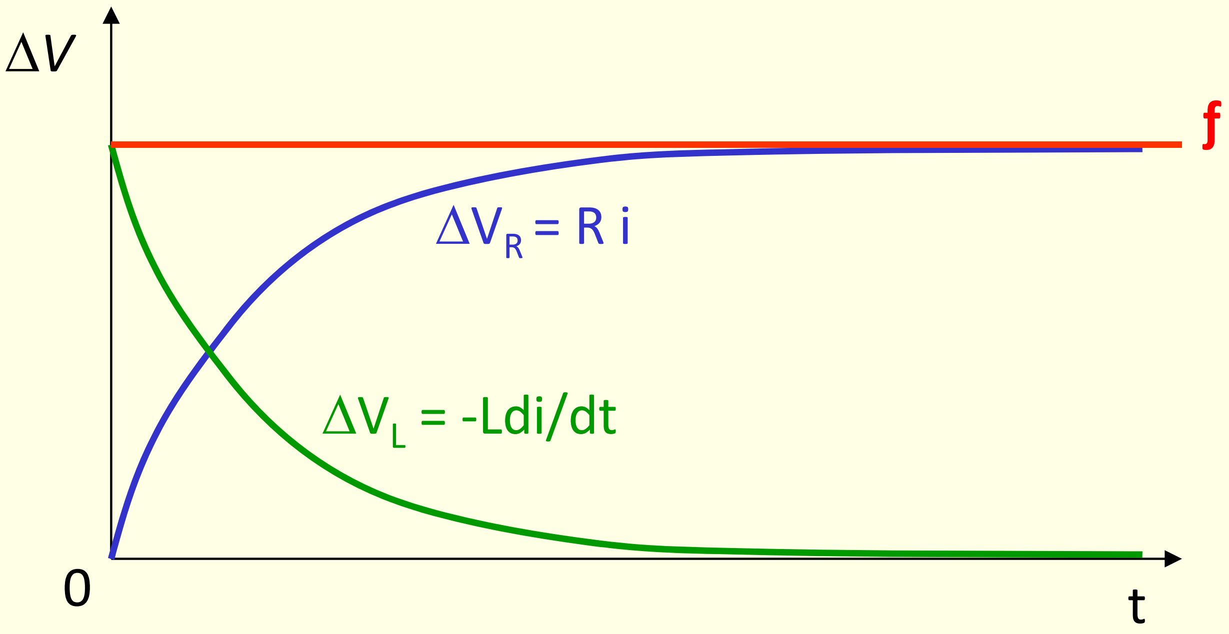
$$f = - d\Phi /dt = - d [ iL ]/dt = - L \, d i /dt$$

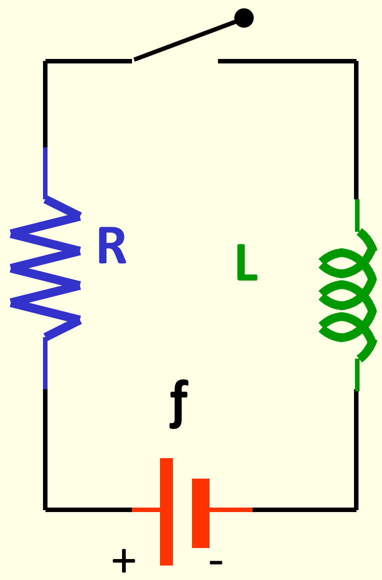
- L si misura in henry :

1 henry = 1H = 1 T · 1 $m^2$ / 1 A.

# circuito RL (cenni)

- $-iR - L di/dt + f = 0;$
- $f = iR + L di/dt\ ;$
- $i = f / R\ [1 - e^{-tR/L}\ ];$



# Elettromagnetismo

a) elettrostatica;

b) correnti continue;

c) campi magnetici;

d) induzione elettromagnetica;

e) equazioni di Maxwell (cenni).

f) **onde e ottica [vedi].**

# equazioni di Maxwell (cenni)

tutto l'elettromagnetismo in quattro equazioni :

A. legge di Gauss del campo elettrico (→ legge di Coulomb) :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_{\vec{E}}(S) = q \,/\, \varepsilon_0 \,;$$

B. legge di Gauss del campo magnetico (→ calamita spezzata) :

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0;$$

C. legge dell'induzione di Faraday :

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\, \Phi_{\vec{B}}(A) \,/d\, t\,;$$

D. legge di Ampère (+ correzione di Maxwell) :

$$\int_L \vec{B} \cdot ds = \mu_o\, \varepsilon_o\, d\Phi_{\vec{E}}(A) \,/d\, t + \mu_0\, i.$$

# *Fine parte 4*