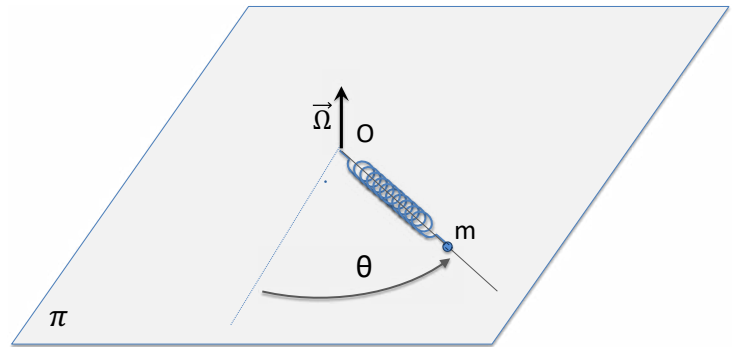


**Esercizio n. 1**

Una pallina di massa  $m$  è vincolata a muoversi su una guida rettilinea, di massa trascurabile che ruota con velocità angolare  $\Omega$  costante sul piano orizzontale  $\pi$  intorno al punto  $O$ .

La pallina è inoltre vincolata tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo pari a  $l_0$ , al punto  $O$  come indicato in figura.



Calcolare:

- 1) la posizione di equilibrio quando la pallina è ferma rispetto al sistema di riferimento in moto.
- 2) la reazione vincolare esercitata dalla guida sulla pallina nelle condizioni indicate al punto 1).

Supponendo infine che la pallina, mentre la sbarra ruota con velocità angolare costante  $\Omega$ , venga spostata, al tempo  $t=0$ , dalla posizione di equilibrio di una quantità  $A_0$  e lasciata libera di muoversi lungo la sbarra, calcolare:

- 3) il periodo delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.
- 4) la reazione vincolare (in modulo direzione e verso) quando la velocità della pallina nel sistema di riferimento mobile è massima.

Dati numerici:

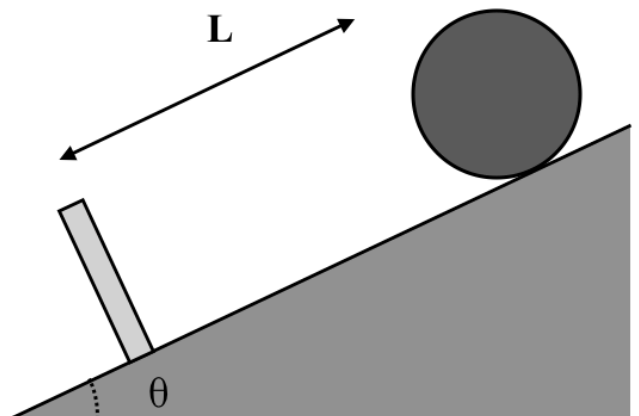
$m = 15,0\text{g}$  ;  $\Omega = 1,48\text{ rad/s}$  ;  $k = 1,05\text{ N/m}$  ;  $l_0 = 31,0\text{ cm}$  ;  $A_0 = 3,5\text{ cm}$ .

**Esercizio n. 2**

Una sfera, di raggio  $R$  e massa  $m$ , può rotolare e strisciare su un piano scabro e inclinato di un angolo  $\theta$ . Il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano è  $\mu_d$ . La sfera viene abbandonata sul piano a velocità nulla quando si trova ad una distanza  $L$  da un ostacolo perpendicolare al piano e vincolato ad esso (vedi figura). La sfera raggiunge l'ostacolo rotolando senza strisciare.

Calcolare

1. l'accelerazione che caratterizza il moto del centro di massa della sfera;
2. la velocità del centro di massa della sfera e la velocità angolare della sfera quando essa raggiunge l'ostacolo.



Quando la sfera si scontra con l'ostacolo fa un urto elastico. L'ostacolo, che dopo l'urto rimane fermo, è perfettamente liscio e quindi l'impulso trasmesso da esso alla sfera è perpendicolare all'ostacolo stesso. Calcolare:

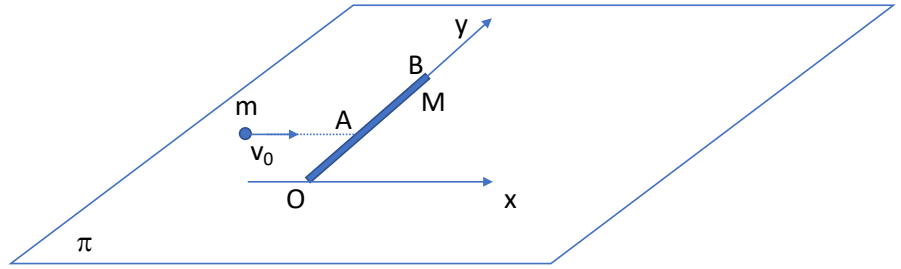
3. l'impulso trasmesso dall'ostacolo alla sfera durante l'urto e la velocità angolare della sfera dopo l'urto;
4. la quota massima, rispetto alla posizione del centro della sfera nell'istante dell'urto, raggiunta da centro della sfera dopo l'urto.

Dati numerici

[ $R = 10\text{ cm}$  ;  $m = 100\text{ g}$  ;  $L = 1,3\text{ m}$  ;  $\mu_d = 0,1$  ;  $\theta = 0,25\text{ rad}$ ]

**Esercizio n. 3**

Una sbarra, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , è poggiata, ferma, su un piano orizzontale privo di attrito.



La sbarra sia parallela all'asse  $y$ .

Un proiettile, di massa  $m$ , in moto sul piano orizzontale con velocità  $\vec{v}_0 \equiv (v_{0x}, 0, 0)$ , urta al tempo  $t=0$ , in modo totalmente anelastico la sbarra alla distanza  $\overline{OA}$  da un estremo.

Calcolare:

- 1) la legge oraria  $(x_{CM}(t), y_{CM}(t))$  del moto del centro di massa del sistema dopo l'urto
- 2) la velocità angolare del sistema sbarra+proiettile dopo l'urto
- 3) l'energia dissipata nell'urto

Dati numerici

$M = 1,75 \text{ kg}$  ;  $L = 80 \text{ cm}$  ;  $m = 250 \text{ g}$  ;  $\overline{OA} = 20 \text{ cm}$  ;  $v_{0x} = 4,5 \text{ ms}^{-1}$  .

**Esercizio n. 1 – Soluzione**

Per lo studio del moto usiamo un sistema di riferimento ruotante, con velocità angolare  $\Omega$  assieme alla sbarra con origine in O e con asse x parallelo alla sbarretta. In tale sistema di riferimento in moto sulla pallina, connessa alla molla, agisce la forza elastica  $(-k(x-l_0))$  e la

forza apparente  $(m\Omega^2x)$ : 
$$-k(\vec{x} - \vec{l}_0) + m\Omega^2\vec{x} = m\vec{a}$$

connessa alla molla costituisce un oscillatore forzato la cui equazione del moto

Proiettando tale relazione lungo la barretta (asse x) otteniamo: 
$$m\ddot{x} + (k - m\Omega^2)x = kl_0 .$$

1) La posizione di equilibrio (nel S.R. scelto) si ottiene imponendo  $\ddot{x} = 0$  e quindi

$$x_{eq} = \frac{kl_0}{(k-m\Omega^2)} = 0,32 \text{ m}$$

La soluzione di questa equazione differenziale del secondo ordine è quindi

$$x(t) = x_{eq} + A \sin(\omega t + \varphi) \text{ con } A \text{ e } \varphi \text{ da determinare conoscendo le condizioni del moto.}$$

Nella equazione dell'oscillatore la pulsazione è data da 
$$\omega = \sqrt{\frac{(k-m\Omega^2)}{m}} = 8,23 \text{ rad/s}$$

2) In assenza di attriti la reazione fa la sbarra e la pallina deve essere sempre ortogonale alla pallina. Se la pallina si muove con velocità  $\vec{v}$  nel S.R. in moto è soggetta alla forza di Coriolis  $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ , ortogonale all'asse x, pertanto la sbarra applica sulla pallina una reazione uguale e contraria alla Forza di Coriolis  $\vec{F}_{cor} + \vec{R} = 0$ . Essendo in questo caso la pallina ferma nella posizione  $x_{eq}$  si ha  $|\vec{F}_{cor}| = |\vec{R}| = 0 \text{ N}$ .

3) Se la pallina viene messa in moto lungo la sbarra il periodo delle oscillazioni è pari a

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,763 \text{ s}$$

4) Sappiamo ora che la pallina oscilla attorno alla posizione  $x_{eq}$  con ampiezza di oscillazione pari a  $A_0$  e che all'istante  $t=0$   $x(t=0) = x_{eq} + A_0 \sin(\varphi) = x_{eq}$ . Quindi:  $\varphi = 0$  e la legge del moto dell'oscillatore è data da  $x(t) = x_{eq} + A_0 \sin(\omega t)$ . Possiamo calcolare l'espressione della velocità del punto materiale in funzione del tempo

$$\dot{x}(t) = A_0\omega \cos(\omega t) \text{ che assume il valore massimo } \dot{x}_{max} = A_0\omega = 0,29 \text{ m/s quando}$$

$x(t) = x_{eq}$ . In queste condizioni la forza di Coriolis assume il valore

$$\vec{F}_{cor} = -2mA_0\omega\vec{\Omega} \times \hat{i} \text{ e pertanto la reazione che la sbarra applica sulla massa } \vec{R} = -\vec{F}_{cor}$$

avrà modulo  $R = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , direzione ortogonale alla sbarra, verso opposto al verso di rotazione se  $v > 0$ , verso concorde con il verso di rotazione se  $v < 0$ .

**Esercizio n. 2 - Soluzione**

1) Risolviamo proiettando il secondo principio della dinamica lungo l'asse parallelo al piano e quello perpendicolare ad esso. Usiamo anche la seconda equazione cardinale della dinamica (polo nel centro di massa)

$$\text{asse } x: mg\sin\theta - f_a = ma$$

$$\text{asse } y: mg\cos\theta - N = 0$$

$$f_a R = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

dove  $f_a$  è la forza di attrito statico che permette il rotolamento perfetto. Dalla prima otteniamo:

$$N = mg\cos\theta$$

Combinando la seconda e la terza equazione, imponendo il rotolamento perfetto  $\alpha R = a$ , si ottiene

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta = 1.73 \text{ m/s}^2$$

2) La sfera compie un moto uniformemente accelerato sia per la traslazione che per la rotazione. La velocità e la posizione seguono le leggi

$$v_1 = at \quad e \quad L = \frac{1}{2}at^2$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{2aL} = 2.12 \text{ m/s}$$

Nel caso di rotolamento perfetto la velocità angolare è legata a quella di traslazione. Dunque

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = 21.2 \text{ rad/s}$$

3) L'urto non fa altro che invertire la velocità della sfera, lasciando invariata la velocità angolare (poiché la forza esercitata dall'ostacolo fa momento nullo). Quindi

$$v_2 = -v_1$$

$$\omega_2 = \omega_1$$

e l'impulso vale:

$$I = mv_2 - mv_1 = -2mv_1 = -0.425 \text{ Ns}$$

4) Dopo l'urto la sfera striscia e vi è attrito dinamico al posto di quello statico. Le equazioni per la traslazione lungo il piano e per la rotazione diventano

$$mg\sin\theta + f_a = mg\sin\theta + \mu_d mg\cos\theta = ma$$

$$-f_d R = -\mu_d mg\cos\theta R = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

Da cui si ottiene

$$a' = g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta) = 3.38 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha' = -\frac{5\mu_d g \cos\theta}{2R} = -23.8 \text{ rad/s}^2$$

Si tratta di nuovo di due moti uniformemente accelerati. Dobbiamo prima verificare se si annulla prima la velocità di traslazione oppure quella di rotazione. Abbiamo

$$0 = v_2 + a't_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{v_2}{a'} = 0.629 \text{ s}$$

$$0 = \omega_2 + \alpha't_2 \Rightarrow t_2 = -\frac{\omega_2}{\alpha'} = 0.893 \text{ s}$$

Quindi si annulla prima la velocità di traslazione. Perciò sarà sufficiente ricavare la distanza dalla relazione

$$v_2 = \sqrt{2a'L'} \Rightarrow L' = \frac{v_2^2}{2a'} = 0.667 \text{ m}$$

Pertanto la massima quota raggiunta dal centro della sfera rispetto alla sua posizione al momento dell'urto è  $\Delta h = L' \sin\theta = 0,165 \text{ m}$

### Esercizio n. 3 - Soluzione

Nell'urto, in assenza di forze impulsive, si conserva la quantità di moto totale:  $\vec{Q} \equiv (mv_{0x}, 0)$

pertanto il centro di massa continuerà a muoversi con la velocità  $\vec{v}_{CM} \equiv \left(\frac{m}{m+M}v_{0x}, 0\right)$  e

La legge oraria del moto è data da:

$$1) \quad x_{CM}(t) = \frac{m}{m+M}v_{0x}t = 56.3 \cdot 10^{-2}t \text{ m}; \quad y_{CM}(t) = \frac{m\overline{OA} + ML/2}{m+M} = 37.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

2) In assenza di momenti di forze impulsive si conserva anche il momento della quantità di moto attorno al centro di massa. Usando come polo il centro di massa il momento della quantità di moto iniziale vale  $\vec{P}_i = (y_{CM} - \overline{OA})m v_{0x} \hat{k}$ .

Dopo l'urto il momento d'inerzia del sistema asta+proiettile, rispetto al centro di massa, è

dato da  $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2} - y_{CM}\right)^2 + m(y_{CM} - \overline{OA})^2$  e quindi il momento

della quantità di moto sarà espresso con  $\vec{P}_f = I_{CM} \omega_f \hat{k}$ . Cio' ci permette di calcolare

$$\omega_f = \frac{(y_{CM-\overline{OA}}) m v_{0x}}{I_{CM}} = 1,93 \text{ rad s}^{-1}$$

- 3) Dopo l'urto l'energia cinetica è espressa da  $K_f = \frac{1}{2}(m + M)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_f^2 = 0,51 \text{ J}$  mentre l'energia cinetica iniziale è data da  $K_i = \frac{1}{2}mv_o^2 = 2,53 \text{ J}$ , l'energia dissipata nell'urto anelastico è data da  $\Delta K = K_i - K_f = 2,03 \text{ J}$