

Studio della legge di svuotamento di un tubo attraverso dei capillari.

1) Introduzione.

L'apparato è formato da un tubo T verticale di sezione S , al termine del quale sono collegabili attraverso un rubinetto, dei capillari T' di sezioni S' (raggio della sezione r) e lunghezze Δl diverse. Riempito d'acqua il tubo T e aperto il rubinetto, l'acqua inizia ad uscire da T fluendo attraverso il capillare e finendo in un recipiente disposto in prossimità dell'estremità aperta del capillare T'. La legge di svuotamento del tubo T, cioè la funzione $h(t)$ altezza del pelo dell'acqua in funzione del tempo, può essere ottenuta indirettamente misurando la quantità di acqua che si trova nel recipiente in funzione del tempo $m(t)$ durante il flusso. Quest'ultima è facilmente misurabile ponendo il recipiente sopra una bilancia. La relazione tra $h(t)$ ed $m(t)$ è data da:

$$h(t) = \frac{m_\infty - m(t)}{\rho S}$$

in cui con m_∞ abbiamo indicato la massa totale contenuta nel recipiente a tubo svuotato e con ρ la densità dell'acqua supposta nota.

Mentre il moto di discesa dell'acqua nel tubo T avviene in buona approssimazione secondo il teorema di Bernoulli (essendo la sezione grande e la velocità molto limitata), il moto del fluido nel capillare potrà avvenire o secondo la modalità del moto laminare o secondo la modalità del moto turbolento a seconda delle caratteristiche del capillare (sezione e lunghezza).

In condizioni rispettivamente di moto laminare e turbolento, le leggi $m(t)$ attese sono date da:

$$m(t) = m_\infty (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\sqrt{\frac{m_\infty - m(t)}{\rho S}} = \sqrt{\frac{m_\infty}{\rho S}} - \frac{k}{2} t$$

Nella prima formula la costante di tempo τ che determina lo svuotamento in regime laminare è legata ai parametri dell'apparato da:

$$\tau = \frac{8\eta\Delta l}{\rho g r^2} \frac{S}{S'}$$

dove oltre alle grandezze già definite, η è la viscosità dell'acqua e g è l'accelerazione di gravità.

Nella seconda, la costante k che determina invece lo svuotamento in regime turbolento è definita da:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2g} \left(\frac{S}{S'} \right)^2 \left[1 + \frac{\Delta l}{\rho r} \lambda \right]$$

in cui λ (avente le dimensioni di una densità), è legato al numero di Reynolds R_e dalla relazione:

$$\lambda = 0.16 \rho R_e^{-1/4}$$

Si noti inoltre che la derivata della funzione $m(t)$ può essere utilizzata per stimare in ogni istante del moto del liquido, il valore del numero di Reynolds. Infatti si ha, indipendentemente dal regime di svuotamento:

$$R_e = -\pi \eta r \frac{dm}{dt}$$

2) Strumentazione a disposizione.

Si dispone dei seguenti capillari distinguibili per il colore dell'etichetta:

colore	diametro (mm)	lunghezza (mm)
bianco	1.00	200
		100
		85
marrone	1.40	80
bianco/marrone	1.80	75
rosso	2.15	99
grigio	3.00	95

La bilancia che permette di misurare $m(t)$ è interfacciata con il computer e può essere acquisita utilizzando il programma DataStudio. Si seleziona l'opzione *strumenti* e si sceglie la bilancia nell'elenco.

Si dispone inoltre di un calibro per la misura della sezione del tubo T e delle lunghezze Δl dei capillari (per le sezioni dei capillari ci si deve "fidare" dei valori sopra riportati, noti con un'incertezza di 10^{-2} mm).

Per la densità dell'acqua ρ e per l'accelerazione di gravità g , si suggerisce di usare i valori noti.

3) Sequenza di operazioni in laboratorio.

In primo luogo si suggerisce di fare una curva di svuotamento in assenza di capillare, e di discutere il risultato ottenuto sulla base del teorema di Bernoulli. Poi si procede inserendo ad uno ad uno i capillari in dotazione e misurando la curva di svuotamento per ciascuno di essi. Per ogni misura occorre inserire un capillare tramite il tappo di gomma posto in prossimità dell'apertura inferiore del tubo T, riempire con dell'acqua presa dal lavandino il tubo T stesso (non è necessario riempirlo fino alla massima quota), aprire il rubinetto e fare attenzione a che il getto d'acqua sia contenuto nel recipiente posto sul piatto della bilancia. Aperto il rubinetto si mette il sistema in acquisizione e si attende fino a che tutta l'acqua sia fluita nel contenitore.

Si suggerisce di prendere un certo numero di acquisizioni per ciascun capillare e di salvare i dati sotto forma di tabella in modo da poterli utilizzare per analisi successive. Per ogni misura in primo luogo si determini graficamente il valore di m_∞ . Quindi si riportano i risultati in tre diversi grafici:

- (1) grafico della derivata della curva $m(t)$ in funzione del tempo;
- (2) grafico in carta semilogaritmica della quantità $(m_\infty - m(t))/m_\infty$ in funzione del tempo;
- (3) grafico in carta lineare della quantità $\sqrt{(m_\infty - m(t))/\rho S}$ pure in funzione del tempo.

Dal grafico (1) si può stimare il valore del numero di Reynolds nelle varie fasi dello svuotamento. Il valore del numero di Reynolds permette di stimare il tipo di moto e di decidere quale tra il grafico (2) e (3) e in quale intervallo di tempo va preso in considerazione.

In caso di moto laminare, dal grafico (2) si ricavi la viscosità η dalla misura di τ , nel caso di moto turbolento, dal grafico (3) si ricavi il parametro λ dal coefficiente k e da λ si ottenga una stima del numero di Reynolds R_e da confrontare con quello ottenuto dalla misura diretta (1).