

## IL MOTO DEI FLUIDI

Un fluido può essere pensato come costituito da un numero molto grande di molecole ( $N \approx 10^{23} \text{ mol/cm}^3$ ) interagenti tra loro mediante forze di natura elettrica.

La descrizione del *moto lagrangiano* del fluido equivale a considerare le  $3N$  equazioni accoppiate del moto per le particelle del fluido, che risolte darebbero, in base a  $6N$  condizioni iniziali ;  $\{\mathbf{r}_0, d\mathbf{r}_0/dt, 3N$  per le posizioni e  $3N$  per le velocità), l'andamento delle coordinate di ciascuna particella in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t) \\ y_i = y_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t) \\ z_i = z_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t) \end{cases} \quad (1)$$

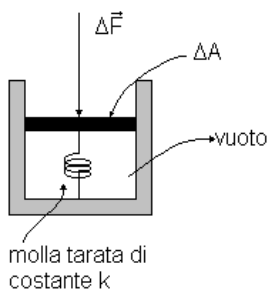
È chiaro che una tale descrizione è di difficile soluzione in quanto già definire le condizioni iniziali per  $10^{23}$  particelle è assolutamente impossibile. Nella descrizione *euleriana* dei fluidi vengono definite alcune grandezze che possono descriverne alcune proprietà macroscopiche (termodinamiche) come la pressione, la temperatura, la densità, la velocità di propagazione all'interno di tubi o condotti, non considerando affatto il problema del moto delle particelle microscopiche.

Se le grandezze termodinamiche macroscopiche descritte precedentemente sono indipendenti dal tempo (ma possono dipendere dalla posizione), le condizioni di moto del fluido si dicono stazionarie.

### La pressione

Per definire la *pressione* è necessario studiare l'effetto degli urti delle particelle che compongono il fluido con le pareti del contenitore.

Supponiamo per semplicità di immergere nel nostro fluido un misuratore di pressione. Questo, nella sua forma più semplice, è un pistone di area  $\Delta A$  libero di muoversi in un cilindretto, ma vincolato ad una molla:



Se la superficie  $\Delta A$  viene sottoposta ad una forza  $F$  si ha equilibrio quando:  
 $\vec{F} = k\Delta x$  dove  $\Delta x$  è la compressione della molla per effetto degli urti delle molecole

La taratura della molla ci permette di registrare la forza  $\Delta\vec{F}$  esercitata dalle particelle del fluido sulla superficie  $\Delta A$ .

Definiamo (tramite una misura di forza) la pressione (*grandezza scalare*), come:

$$(2) \quad p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{|\vec{F}|}{\Delta A}$$

La pratica mostra che, qualunque sia la posizione del nostro misuratore di forza all'interno del fluido, la pressione è sempre la stessa. Questa, in altri termini, è la dimostrazione sperimentale che il fluido è omogeneo ed isotropo.

La (2) implica che  $p$  è uno scalare, poiché non dipende dall'orientazione del vettore  $\Delta\vec{F}$  ma solo dalla sua intensità.

Nel S.I. la pressione si misura in Pascal (simbolo  $Pa$ ):  $Pa = 1 \frac{N}{m^2}$ .

Altre unità di misura della pressione sono per esempio il bar e l'atmosfera ( $atm$ ):

$$1bar \approx 1atm \approx 1.01 * 10^5 Pa$$

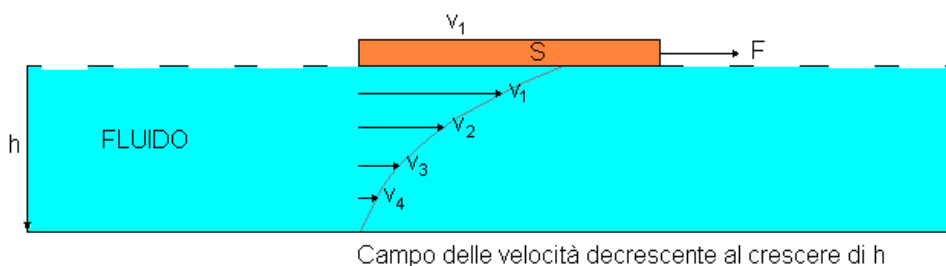
L' $atm$  è la pressione media esercitata dall'atmosfera terrestre al livello del mare.

Lasciando la descrizione della statica dei fluidi al corso di Fisica Generale, discutiamo brevemente il moto dei fluidi ideali e di quelli reali.

### Fluidi ideali

Definiamo fluido ideale un fluido incompressibile, ogni strato del quale scorre senza attrito rispetto agli altri.

Per studiare le proprietà di un fluido ideale consideriamo il seguente esperimento:



Campo delle velocità decrescente al crescere di  $h$

Quando sollecitiamo il galleggiante con una forza costante  $\vec{F}$ , dopo un certo intervallo di tempo in cui si stabilisce l'equilibrio dinamico tra  $\vec{F}$  e la forza d'attrito tra il 1° strato di liquido e la superficie  $S$ , la lastra rimane in movimento con velocità costante  $v_1$ . Il primo strato di liquido si muoverà anch'esso con la stessa velocità, ma si nota sperimentalmente che al crescere di  $h$  (cioè muovendosi verso il fondo del canale) la velocità del fluido  $v(h)$  decresce fino a 0.

Il fatto che i vari strati del fluido abbiano velocità via via decrescenti stabilisce sperimentalmente l'esistenza di un attrito interno tra le particelle del fluido, che impedisce lo scorrimento perfetto e che implica la dissipazione del lavoro della forza  $\vec{F}$  esterna in calore, e di conseguenza l'aumento della temperatura del fluido.

In un fluido ideale, invece, le varie parti del fluido sono libere di scorrere tra loro senza attrito, per cui nel precedente esperimento tutti gli strati rimarrebbero fermi, ad eccezione del 1°, messo in moto direttamente dal galleggiante.

Per studiare le caratteristiche della dinamica di tale fluido elenchiamo le sue principali proprietà:

#### 1) Moto laminare

Dato un punto nel fluido, il fluido si dice in moto laminare, quando la velocità in questo punto non cambia nel tempo, né in direzione né in intensità. Per esempio il moto dell'acqua al centro di un canale è laminare. In particolare il flusso può essere descritto come il moto di tanti strati sottili che si muovono parallelamente tra loro. Si può dimostrare sperimentalmente l'esistenza di questi strati, che si dicono anche filetti fluidi, spargendo del colorante all'interno del liquido. Tale colorante si mette in movimento seguendo una linea retta senza miscelarsi in modo disordinato col resto del fluido. In altri termini la sua propagazione ordinata mostra come anche i vari strati del fluido si muovano senza intersecarsi con una propria velocità media.

Il moto non è laminare quando ci spostiamo dal centro del canale verso i bordi, oppure attorno ad un ostacolo dove il flusso diventa vorticoso (turbolento), ovvero i filetti fluidi si intersecano tra loro e la velocità cambia localmente in modo disordinato.

### 2) Densità costante

Si suppone che la densità del fluido ideale sia costante, cioè che esso sia incomprimibile: cambiamenti di pressione non provocano variazioni di volume.

### 3) Assenza di viscosità

Un fluido ideale non è viscoso, cioè i vari strati non interagiscono fra loro e si muovono liberamente l'uno sull'altro. In altri termini la viscosità (che abbiamo già discusso nell'esperienza del piano inclinato con la vela e del moto del volano con le palette) è una forma di attrito che si oppone allo scorrimento del fluido (al suo stato di moto) ed anche al moto di un corpo (per esempio una barca in un lago), nello stesso fluido.

Consideriamo ora un volumetto microscopico di liquido che si muova con velocità  $\vec{v}$ ; se ne seguiamo il moto, il vettore  $\vec{v}$  potrà cambiare sia in direzione che in modulo in ogni punto. La curva a cui è tangente in ogni punto il vettore  $\vec{v}$  è detta linea di flusso.

Le linee di flusso non si intersecano, perché, se ciò accadesse, una particella di flusso che arrivasse all'intersezione dovrebbe assumere contemporaneamente due velocità, cosa ovviamente impossibile.

Allora se tracciamo una linea chiusa  $\Gamma$  all'interno del fluido e consideriamo le linee di flusso che passano per  $\Gamma$ , l'insieme di queste linee definisce un tubo di flusso.

Un tubo di flusso è quindi una superficie geometrica (ideale) che permette di dividere il fluido in quello contenuto nel tubo di flusso ed in quello esterno.

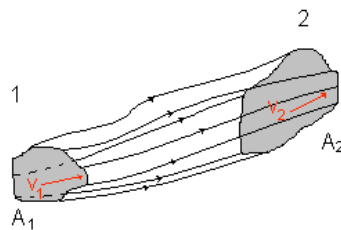
Tutto ciò permette allora di studiare l'influenza di tutto il resto del fluido su quello contenuto all'interno del tubo.

Un tubo di flusso è chiaramente l'idealizzazione dei tubi reali che contengono fluidi in movimento.

### **Equazione di continuità**

Supponiamo che il fluido sia stazionario, e cioè dato un punto il vettore velocità  $\vec{v}$  in questo punto non cambia col tempo.

Allora individuiamo, grazie ad un tubo di flusso chiuso da due superfici  $A_1$  ed  $A_2$ , una porzione di fluido. Siano  $\rho_1$  e  $\rho_2$  le densità del fluido nei punti 1 e 2 e  $v_1$  e  $v_2$  le velocità negli stessi punti.



Se il moto del fluido avviene da sinistra a destra la quantità di massa che passa nella sezione  $A_1$  nell'intervallo  $\Delta t$  (cioè quella che entra nel tubo) deve corrispondere a quella che esce dalla sezione  $A_2$  nello stesso intervallo  $\Delta t$ .

Poiché la massa si conserva (non c'è diminuzione di quantità di materia o aumento della stessa durante il moto nel tubo, si considera cioè l'assenza di afflussi o deflussi di massa all'interno del tubo) discende che:

$$\Delta m_1 = \Delta t A_1 \rho_1 v_1 = \Delta m_2 = \Delta t A_2 \rho_2 v_2$$

$$(3) \quad A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2$$

Questa espressione è detta equazione di continuità.

Se il fluido è incomprimibile (un liquido per esempio)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  ed allora:

$$(4) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

ed il prodotto costante  $Av$  è detto portata del tubo o portata volumetrica  $Q_v$  (dimensioni fisiche:  $\frac{\text{volume}}{\text{tempo}}$ ). Se moltiplichiamo la portata volumetrica per la densità si ottiene la portata di massa  $Q_m$

(dimensioni fisiche:  $\frac{\text{massa}}{\text{tempo}}$ ).

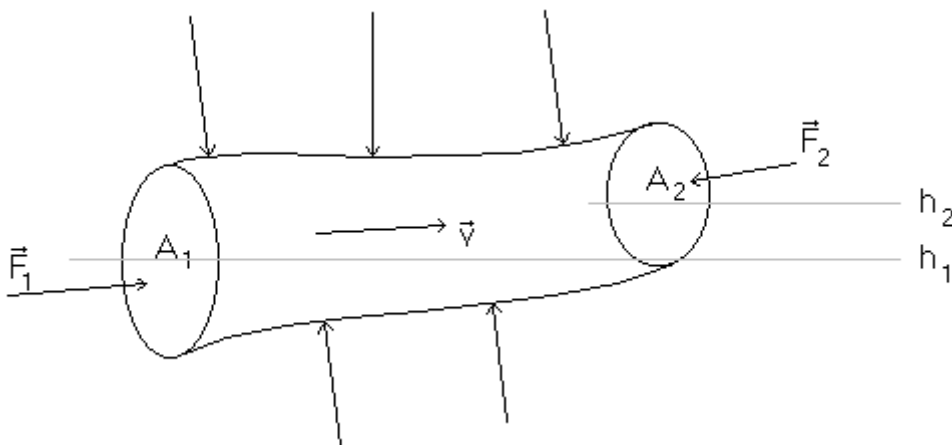
Un fenomeno fisico interessante, connesso alla (4) è quello relativo all'aumento della velocità (e quindi della gittata) dell'acqua che esce da un tubo di gomma che si usa per innaffiare il giardino. Quando si stringe la sezione  $A$  del tubo l'acqua fluisce dallo stesso con una velocità maggiore.

Infatti, poiché la massa si conserva:  $v_{fin} = \frac{A_{in}}{A_{fin}} v_{in}$ ; se  $A_{fin} < A_{in}$  allora  $v_{fin} > v_{in}$  (*legge di Leonardo da Vinci*)

### Teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli, che è valido solo per i fluidi non viscosi, rappresenta la legge di conservazione dell'energia meccanica nella fisica dei fluidi.

Consideriamo un tubo di flusso:



In assenza di viscosità, le forze applicate dagli strati esterni del fluido agli strati interni al tubo di flusso sono sempre ortogonali in ogni punto alla superficie del tubo, per cui quelle relative alla superficie laterale non fanno lavoro sul fluido contenuto nel tubo (*questo è vero solo per un fluido ideale*).

Le uniche forze agenti che fanno lavoro sono  $\vec{F}_1$  ed  $\vec{F}_2$  (supposte costanti su tutta la superficie  $A$ ), che possono essere espresse in termini delle pressioni  $P_1$  e  $P_2$  esercitate dal fluido esterno sulle due superfici  $A_1$  ed  $A_2$ :

$$|\vec{F}_1| = P_1 A_1; |\vec{F}_2| = P_2 A_2$$

In un tempo  $\Delta t$  il lavoro compiuto è:

$$(5) \quad L_p = P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t = (P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

Ricordiamo infatti che  $\Delta m = \rho A v \Delta t$ , costante lungo tutto il tubo di flusso.

Questo lavoro deve essere sommato a quello fatto dalla forza gravitazionale se per esempio la massa  $\Delta m$  viene spostata all'interno di un tubo da un'altezza  $h_1$  ad una  $h_2$  (vedi figura precedente).

Questo lavoro è:

$$(6) \quad L_g = -\Delta U = -\Delta m g (h_2 - h_1)$$

Dal teorema dell'energia cinetica il lavoro totale ((5)+(6)) deve corrispondere alla variazione di energia cinetica della massa  $\Delta m$  tra i punti 1 e 2:  $\frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$

Si trova quindi che:  $\frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho} - \Delta m g (h_2 - h_1)$

e quindi

$$(7) \quad \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 = \text{cost}$$

Quindi il teorema di Bernoulli afferma che, lungo una linea di flusso, la quantità  $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g h$  è costante, che corrisponde alla conservazione dell'energia del fluido.

Dall'equazione di Bernoulli (7) si possono dedurre alcune conseguenze:

I) se il fluido si propaga in un tubo ad altezza costante, allora si trova dalla (7)

$$(8) \quad P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

e cioè ad un aumento di pressione corrisponde una riduzione di velocità del fluido e viceversa;

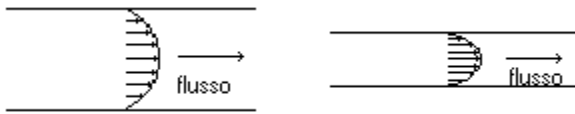
II) se il fluido è fermo allora  $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$  da cui discende la legge di Stevino. Se infatti  $P_0$  è la pressione esercitata dall'atmosfera sulla superficie libera di un fluido, la pressione  $P$  alla profondità  $h$  (misurata dal pelo del liquido), vale:

$$(9) \quad P = P_0 + \rho g h$$

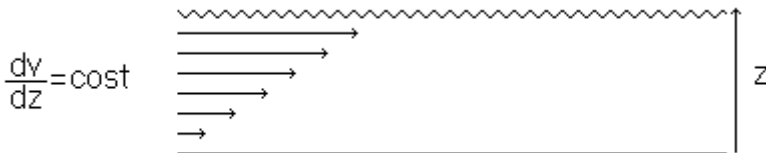
Come si è detto all'inizio di questo paragrafo, il teorema di Bernoulli rappresenta la legge di conservazione dell'energia meccanica applicata ai fluidi; si è quindi presupposto che non ci siano effetti di dissipazione dell'energia meccanica in calore all'interno del fluido.

Se consideriamo ad esempio il moto dell'acqua in un tubo di diametro costante in assenza di attriti, ciascun strato di fluido si muove con la stessa velocità. Questo vale sia per gli strati più vicini alla superficie interna del tubo che per quelli più lontani (che si trovano vicini al centro). La

distribuzione del vettore velocità è allora uniforme all'interno del tubo. Si nota invece che al variare del diametro del tubo (ed in particolare per piccoli diametri) gli strati più interni si muovono più velocemente, mentre la velocità tende a zero per gli strati vicini alla superficie interna del tubo.



Sperimentalmente si vede che l'acqua che scorre in un canale è ferma sul fondo mentre la sua velocità incrementa al crescere della quota  $z$  dal fondo. In generale



Allora uno strato all'altezza  $z+dz$  che si muove ad una velocità  $\vec{v} + d\vec{v}$  eserciterà una forza  $\vec{F}$  concorde con la velocità  $\vec{v}$  dello strato all'altezza  $z$ , mentre quello all'altezza  $z-dz$  tenderà a frenare lo strato superiore e quindi eserciterà una forza discorde.

Queste forze sono tangenziali alla superficie di separazione tra gli strati e si può scrivere che

$$(10) \quad \frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{dv}{dz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Notiamo che per un fluido } \underline{\text{non}} \text{ viscoso } \vec{F}_t = 0 \end{array} \right.$$

dove  $\eta$  è caratteristico del fluido ed è detto viscosità dinamica, e  $\frac{dF_t}{dS}$  è la forza per unità di superficie (sforzo di taglio).

Le dimensioni fisiche di  $\eta$  sono:

$$[\eta] = \frac{[F][z]}{[S][v]} = \frac{m \frac{l}{t^2} l}{l^2 \frac{l}{t}} = \frac{m}{l * t}$$

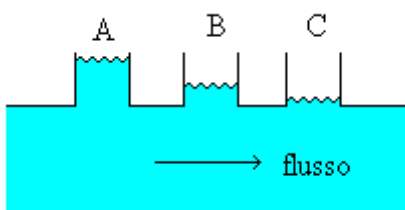
Nel C.G.S.  $\eta$  si misura in poise  $\equiv 1 \frac{g}{cm * s}$

Nella tabella 2 sono rappresentati alcuni valori di viscosità.

In generale  $\eta$  è una funzione decrescente della temperatura, per esempio per l'acqua distillata:

T(°C)	$\eta$ (poise)
0	$1.8 * 10^{-2}$
20	$10^{-2}$
100	$3 * 10^{-3}$

Nei casi reali di interesse, per esempio nel problema del trasporto di un fluido attraverso una condotta, la presenza della viscosità determina una caduta di pressione lungo il tubo, che deve essere ripristinata mediante l'uso di una pompa.



La diminuzione delle altezze lungo i tre misuratori A, B e C indica che la pressione va decrescendo lungo la condotta anche se questa è a sezione costante e se il liquido è incompressibile.

Se  $L$  è la distanza tra il punto C e quello A nel grafico precedente e  $\Delta P$  la caduta di pressione tra i medesimi punti, si definisce caduta di pressione lineare (o caduta di carico) il rapporto  $\Delta P/L$ .

### Misura del coefficiente di viscosità

I metodi di misura di  $\eta$  si basano sulla misura del tempo di efflusso di un volume (o di una massa) noto di fluido da un tubo capillare di diametro conosciuto.

Se infatti il tubo è capillare (diametro micrometrico) i tempi di efflusso sono molto lenti (~ qualche minuto) ed il moto del fluido sottoposto alla forza di gravità è dominato dalla viscosità.

La quantità di massa che esce dal tubo nel tempo  $dt$  è:

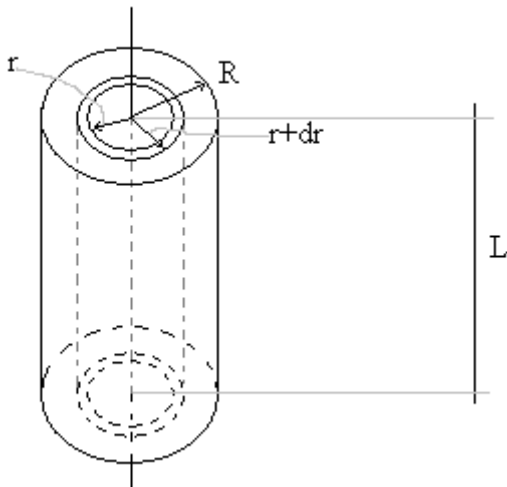
$$(11) \quad dm = \rho v dS dt$$

Dalla legge (10) ci si può aspettare che  $v$  sia una funzione di  $S$ , ovvero cambi all'interno del tubo in funzione di  $r$  coordinata radiale del tubo.

$$(12) \quad Q = \frac{dm}{dt} = \text{portata di massa} = \int_S \rho v dS$$

Quindi dobbiamo determinare  $v$  in funzione di  $r$  del capillare.

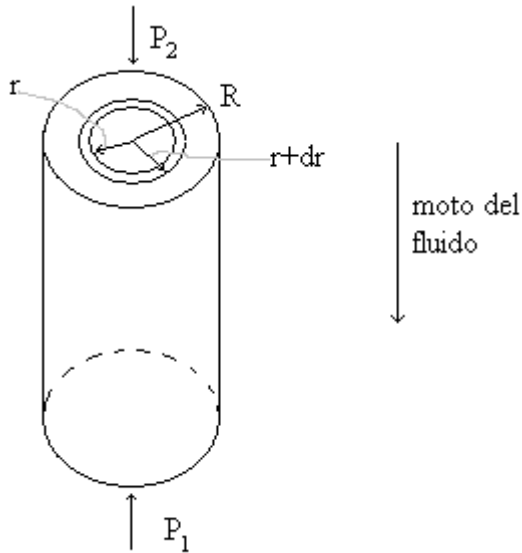
Consideriamo un capillare di raggio  $R$  e dividiamolo in corone circolari di raggio  $r \leq R$  aventi come asse quello del capillare:



Una corona di fluido è soggetta a 3 forze:

- 1- la risultante delle forze di pressione esercitate sulle facce di base del capillare (vedi discussione a proposito della pressione);
- 2- una forza tangenziale, determinata dalla viscosità (eq.(10)), applicata alla superficie esterna (raggio= $r+dr$ ) e interna (raggio= $r$ ) della corona circolare;
- 3- se il capillare è verticale (come nel caso dell'esperimento pratico), la forza peso.

Affinchè il moto sia stazionario è necessario che le forze si annullino a vicenda; si trova allora:



- 1-  $2\pi r dr P_1 - 2\pi r dr P_2$  (differenza delle forze di pressione)
- 2- Per quanto riguarda le forze viscosive, la velocità all'interno del tubo va aumentando con la distanza dalla parete, per cui lo strato interno (quello di raggio  $r$ ) subisce (dallo strato ad  $r-dr$ ) una forza acceleratrice  $-2\pi r L \frac{dv}{dr} \eta$ ,  $\frac{dv}{dr} < 0$

mentre quello a  $r+dr$  una forza ritardatrice  $2\pi(r+dr)L\eta\left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2}dr\right)$

Sommando queste due forze, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si ottiene:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi dr L \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi r L \eta \frac{d^2v}{dr^2} \rightarrow 2\pi L \eta dr \left( \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} r \right)$$

- 3- La forza peso a cui è sottoposta la corona circolare tra  $r$  e  $r+dr$  è:  
 $\rho g L 2\pi r dr$

Dalla condizione di stazionarietà  $\sum \vec{F}_i = 0$  deriva

$$\rho g L 2\pi r dr + 2\pi r dr (P_1 - P_2) + 2\pi L \eta dr \left( \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} r \right) = 0$$

$$\rho g L r + r(P_1 - P_2) + L \eta \left( \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right) = 0 \rightarrow r(P_1 - P_2) + \rho g L r + L \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per  $dr$  si ha:

$$(P_1 - P_2) r^2 dr + \rho g L r^2 dr + r L \eta d \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

Integrando in  $dr$  (si hanno tutti differenziali esatti) si ottiene:

$$(P_1 - P_2) \frac{r^2}{2} + \rho g L \frac{r^2}{2} + L \eta r \frac{dv}{dr} = 0$$

e quindi:



$$(13) \quad r(P_1 - P_2) + \rho g L r + 2L\eta \frac{dv}{dr} = 0$$

Se lo scopo è quello di determinare la variazione della velocità  $v$  in funzione di  $r$ , separando le variabili abbiamo:

$$dv(r) = \frac{-1}{2\eta L} [(P_1 - P_2) + \rho L g] r dr$$

ed integrando quest'ultima si trova:

$$(14) \quad v(r) = \frac{1}{4L\eta} [(P_1 - P_2) + \rho L g] (R^2 - r^2)$$

dove è chiaro che abbiamo imposto la condizione al contorno per cui  $v(R)=0$ .

Dalla (14) notiamo allora che la velocità è massima al centro del tubo e decresce verso la parete. Se siamo interessati alla portata del tubo, e cioè alla quantità di massa che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo, dobbiamo sostituire la funzione  $v(r)$  (detta *distribuzione delle velocità*) nell'espressione (12):

$$Q = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho}{4\eta L} [(P_1 - P_2) + \rho L g] \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

dove abbiamo usato la definizione dell'unità di superficie di base per un cilindro:  $dS=2\pi r dr$

Poiché  $dm=\rho dV$  si ha infine:

$$(15) \quad Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} [(P_1 - P_2) + \rho g L]$$

$Q$  è la portata volumetrica ed è proporzionale alla quarta potenza del raggio del tubo ed inversamente proporzionale alla viscosità.

È chiaro quindi che la viscosità influenza maggiormente il deflusso di un liquido in una condotta di piccolo raggio e viceversa a parità di raggio la portata  $Q$  decresce al crescere di  $\eta$ .

La (15) è detta legge di Poiseuille.

Da essa è evidente che, facendo fluire un liquido in un capillare di dimensione (raggio) noto sotto una depressione data, dalla misura della portata si ottiene una determinazione della viscosità  $\eta$ .

### **Regime turbolento, numero di Reynolds e modifiche della legge di Poiseuille**

Quando inseriamo una soluzione colorata in un capillare in cui l'acqua si muova con velocità  $v$ , se il moto è laminare, come detto prima, il filetto colorato si muove rettilineamente all'interno del capillare conservando la sua velocità e la sua forma. Se aumentiamo la velocità il moto laminare si mantiene fino ad una certa velocità limite sopra la quale il filetto fluido si disfa ed il colore si sparpaglia all'interno del capillare stesso. Al di sopra di questa velocità il moto diventa turbolento la portata del capillare decresce, ovvero a parità di differenza di pressione tra inizio e fine del capillare la portata è più bassa di quella calcolabile a partire dalla legge di Poiseuille.

Infatti nel moto turbolento cominciano a formarsi dei vortici all'interno del liquido che si muovono (dopo essersi formati) come un tutto all'interno del liquido. L'energia fornita dalle forze di pressione (quelle che mettono in movimento il fluido) si divide in energia cinetica traslazionale del fluido ed in energia cinetica rotazionale. Tale energia, nel momento in cui i vortici di distruggono,

va in energia cinetica disordinata nel fluido. Questo quindi implica che a parità di lavoro delle forze di pressione la portata nel regime turbolento è più bassa di quella nel regime laminare.

Si può dimostrare che nel regime laminare le forze di attrito (quelle che dipendono dalla viscosità), sono più intense di quelle di inerzia del fluido mentre avviene il contrario nel regime turbolento.

Il rapporto tra forze di inerzia e forze di attrito definisce un numero puro detto di Reynolds che viene normalmente usato per studiare il passaggio tra il regime laminare e quello turbolento. Tale numero  $R$  deve dipendere dalla velocità media del fluido, dal suo diametro  $d$ , dalla viscosità e dalla densità  $Re=Re(\rho,\eta,d,v)$ . Per ricavare  $Re$  si può ricorrere ad argomenti dimensionali (la stessa cosa può essere fatta per ricavare il periodo di oscillazione di un pendolo), infatti se scriviamo:

$$[Re]=[d^\alpha \rho^\beta v^\gamma \eta^\delta]$$

passando alle grandezze fondamentali  $t, m, l$  si ha:

$$[Re]=[l^\alpha m^\beta l^{-3\beta} l^{-\gamma} t^\gamma \eta^\delta l^{-\delta} m^\delta d^\delta]$$

poiché  $Re$  è un numero puro si deve avere:

$$\alpha - 3\beta + \gamma - \delta = 0 \qquad \beta + \delta = 0 \qquad \gamma + \delta = 0$$

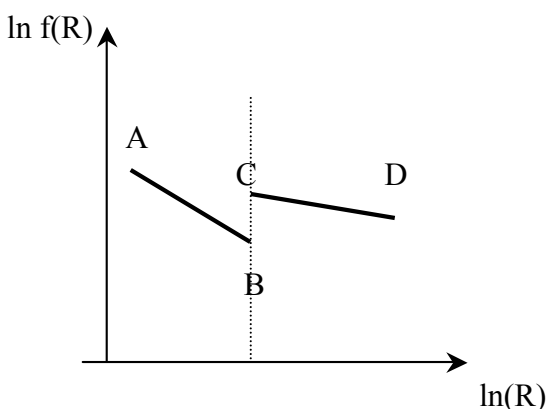
e cioè:

$$\beta/\delta = -1, \qquad \gamma/\delta = -1, \qquad \alpha/\delta = -1$$

e cioè:

$$Re = \rho d v / \eta$$

La perdita di carico lineare si può esprimere come:  $\Delta P/L = [\rho v^2 / 2d] f(Re)$ , dove  $f(Re)$  è una funzione da determinare sperimentalmente del numero di Reynolds. Questa è stata studiata da Reynolds ed assume la forma seguente:



La funzione  $f$  è composta da due parti  $AB$  e  $CD$  approssimativamente rettilinee con pendenze diverse. La pendenza della zona  $AB$  è  $-1$ , quella della zona  $CD$   $-1/4$ . Il passaggio dalla zona  $AB$  a quella  $CD$  avviene bruscamente per un certo valore  $R_0$ , per  $Re < R_0$  si ha il regime laminare, per  $Re > R_0$  si passa al regime turbolento. Tale valore dipende dai parametri del capillare e dalla velocità del fluido ma anche dal grado di lavorazione del capillare stesso, ovvero dall'attrito tra le

pareti del capillare ed il liquido. Normalmente per valori del parametro  $R$  inferiori a 2000 si ha regime laminare, per valori superiori a 3000 il regime turbolento. Valori di  $Re$  tra 2000 e 3000 individuano una zona di transizione fra i due moti del fluido.

Si può dimostrare che nella zona turbolenta  $f = 0.32/Re^{1/4}$  per cui la perdita di carico si scrive come:

$$\Delta P/L = [\rho v^2/2d] 0.32/Re^{1/4} = 0.16[\eta\rho^3 v^7/d^5]^{1/4}$$

Tenendo conto che  $Q = Av = \pi R^2 v$ , si può esprimere la precedente espressione in termini di  $Q$  funzione di  $R$  e paragonarla alla legge di Poiseuille.

Si ottiene:

$$Q = \left( \frac{32B}{\eta\rho^3} \right)^{1/7} \pi R^{19/7}$$

Dove  $B = \left( \frac{\rho g(h+L)}{0.16L} \right)^4$

Questa legge è detta di Darcy-Weisbach.

Quindi in definitiva la portata in regime turbolento ha una dipendenza dal raggio del capillare  $R$  con una potenza inferiore a quella che presenterebbe in regime laminare.

Nel caso della nostra esperienza, possiamo stimare il numero di Reynolds a posteriori dai valori di portata. Si può vedere in particolare che:

$$Re = \left( \frac{4\rho}{\eta\pi} \right) \frac{Q}{2R}$$

Per cui, per valori di  $R$  superiori a 1.5 mm, si nota che si ha già regime turbolento e di conseguenza i dati dovrebbero essere descritti tramite la legge di Darcy piuttosto che quella di Poiseuille.

### Viscosimetro di Ubbelohede

Il viscosimetro di Ubbelohede è rappresentato nella figura seguente:

- In condizioni di equilibrio con l'atmosfera (tubi 1,2,3 aperti), introducendo il liquido nel ramo 2 questo si trasferisce in parte nel ramo 1 fino a che i due menischi  $F1$  ed  $F2$  sono all'equilibrio.
- Chiudendo il ramo 3 e applicando una depressione in quello 1 il liquido sale per il capillare  $C$  fino a raggiungere una certa quota  $D$  in 1.

- Aprendo il ramo 3 si ristabiliscono le condizioni iniziali ed il liquido fluisce verso il basso in  $I$ , sottoposto alla forza di gravità.
- È allora possibile misurare il tempo che intercorre affinché il pelo libero del liquido fluisca tra il traguardo  $A_1$  e quello  $A_2$ , separati da un'altezza  $h_0$ .

La quota  $h(t)$  nel ramo  $I$  raggiunta dal liquido al tempo  $t$  può essere scritta, attraverso la legge di Poiseuille, in termini della portata e quindi della viscosità.

Nel momento in cui il liquido fluisce verso il basso i due peli liberi del liquido sono sottoposti a forze diverse.

Quello del ramo 2 è sottoposto alla forza di pressione atmosferica  $p_0$ , quello del ramo  $I$  a  $p_0 + \rho gh = p_0 + \rho g(h(t) + L)$ , pensando  $h(t)$  la distanza tra i due traguardi ed  $L$  la distanza rimanente.

Di conseguenza (tenendo conto dell'espressione generale (9)), la pressione risultante (dovuta al peso del liquido) è:

$$\rho g(L + h(t))$$

Sostituendo quest'espressione nella legge di Poiseuille ed integrando sul tempo si ha:

$$\int_0^t dt' = \frac{8\eta L}{\pi R^4 \rho g} \int_{h_0}^0 \frac{dV}{h + L} = \frac{8\eta L}{\pi R^4 \rho g} \int_{h_0}^0 \frac{s(h) dh}{h + L}$$

dove  $s(h)$  è la sezione del recipiente alla quota  $h$  e  $dV = s(h) dh$ .

L'integrale  $\frac{L}{\pi R^4 g} \int_{h_0}^0 \frac{s(h) dh}{h + L} = \frac{1}{k}$  dipende dal viscosimetro ed è tabulato in termini della costante

del viscosimetro  $k$ .

In totale si ottiene:

$$(16) \quad \eta = \rho k t$$

che permette di misurare  $\eta$  alla temperatura  $T$  fissata ( $\eta$  e  $\rho$  dipendono da  $T$ ) misurando il tempo di deflusso  $t$  tra i due traguardi  $A_1$  ed  $A_2$  distanti  $h_0$ .

$k$  ha dimensioni  $[k] = \frac{cm^2}{s^2}$ .

Se non fossimo in condizioni stazionarie, ovvero se nel deflusso del liquido si determina una variazione di velocità tra il traguardo  $A_1$  e quello  $A_2$ , l'espressione (16) viene modificata e si può dimostrare che l'espressione corretta è quella dovuta a Hagenbuch, che dipende anch'essa dal viscosimetro e dal tempo di deflusso. Quest'espressione è:

$$(17) \quad \eta = \rho k [t - c(t)]$$

dove  $c(t)$  è la costante di Hagenbuch che verrà data per il dato capillare usato nell'esperienza.