

Fisica Nucleare e Subnucleare II

Lezioni n. 13 e 14

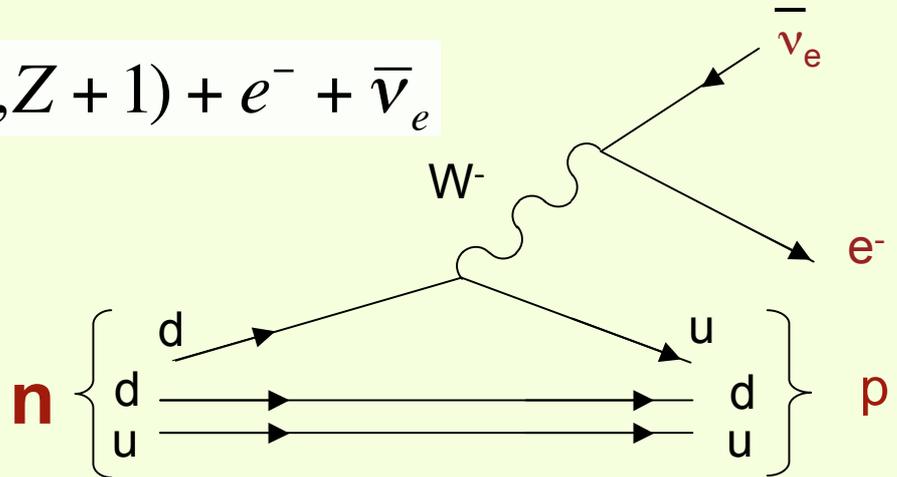
- Diverse manifestazioni dei decadimenti β ; decadimenti nei nuclei, effetto delle transizioni alla Fermi / Gamow-Teller sugli elementi delle matrici di transizione.
- Costanti d'accoppiamento c_V e c_A
- Il processo "inverso" del decadimento del neutrone, calcolo della sezione d'urto.
- Il decadimento dei pioni carichi
- Interazioni semi-leptoniche di neutrini
 - cinematica, sezione d'urto differenziale;

Tipi di decadimento β

Gran parte della nostra conoscenza delle Interazioni Deboli a basse energie proviene dallo studio dei decadimenti β

Decadimento β^-

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$



Decadimento β^+

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + e^+ + \nu_e$$

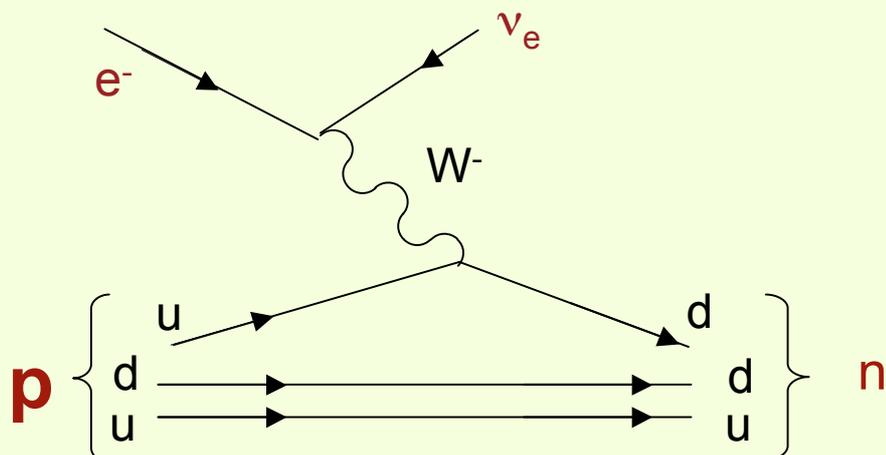
$$p \rightarrow n e^+ \nu_e \quad \text{ovvero} \quad u \rightarrow d e^+ \nu_e$$

Questo processo non può avvenire per un protone libero, può farlo in un nucleo

Cattura di un elettrone atomico nel nucleo (o da parte di un protone):

$$(A, Z) + e^- \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e$$

$$p e^- \rightarrow n \nu_e \quad \text{ovvero} \quad u e^- \rightarrow d \nu_e$$



Ancora sul decadimento β

Le transizioni nucleari che avvengono in occasione dei decadimenti β possono essere classificate per la variazione del momento angolare totale (di spin).

Ovviamente tale variazione è opposta a quella della coppia leptonica ($e^-, \bar{\nu}_e$ oppure e^+, ν_e).

Spin dei due leptoni variazione Spin Nucleare



paralleli

± 1



antiparalleli

0

La variazione dello Spin Nucleare contribuisce al valore dell'elemento della Matrice di Transizione $|M|^2$ che nella teoria di Fermi originale era = 1 (int. puntiformi). Per il decadimento in tre corpi del neutrone avevamo ricavato:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |M_{fi}|^2 \frac{dN}{dE_0} = \frac{1}{\tau} = G_F^2 |M_{fi}|^2 \frac{E_0^5}{60\pi^3 \hbar}$$

e quindi

$$G_F^2 |M_{fi}|^2 = \frac{60\pi^3 \hbar}{\tau E_0^5}$$

in generale l'elemento di matrice può essere collegato alla probabilità di interazione (quantità misurabile) tramite la

$$G_F^2 |M_{fi}|^2 \sim \cos t \frac{1}{\tau} \frac{1}{E_0^5}$$

decadimento	transizione	τ s	E_0 MeV	$f\tau$	$G_F^2 M_{fi} ^2$ $MeV^2 fm^6$
${}^{14}_8O \rightarrow {}^{14}_7N^* e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	102	2.26	4.51×10^3	1.52×10^{-8}
${}^{34}_{17}Cl \rightarrow {}^{34}_{16}S e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	2.21	4.94	4.54×10^3	1.51×10^{-8}
${}^6_2He \rightarrow {}^6_3Li e^- \bar{\nu}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	1.15	3.99	1.17×10^3	5.85×10^{-8}
${}^{13}_5B \rightarrow {}^{13}_6C e^- \bar{\nu}$	$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$	2.51×10^{-3}	13.4	1.11×10^3	6.17×10^{-8}
$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	890	1.18	1.61×10^3	4.25×10^{-8}
${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	5.6×10^8	0.14	1.63×10^3	4.20×10^{-8}

Ancora sul decadimento β

Confrontando quindi valori sperimentali per transizioni caratterizzate da valori di τ ed E_0 anche molto differenti fra loro

$$G_F^2 |M_{fi}|^2 = \cos t \frac{1}{\tau} \frac{1}{f}$$

dove $f \sim E_0^5$

decadimento	transizione	τ s	E_0 MeV	$f\tau$	$G_F^2 M_{fi} ^2$ $MeV^2 fm^6$
${}^{14}_8O \rightarrow {}^{14}_7N^* e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	102	2.26	4.51×10^3	1.52×10^{-8}
${}^{34}_{17}Cl \rightarrow {}^{34}_{16}S e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	2.21	4.94	4.54×10^3	1.51×10^{-8}
${}^6_2He \rightarrow {}^6_3Li e^- \bar{\nu}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	1.15	3.99	1.17×10^3	5.85×10^{-8}
${}^{13}_5B \rightarrow {}^{13}_6C e^- \bar{\nu}$	$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$	2.51×10^{-3}	13.4	1.11×10^3	6.17×10^{-8}
$n \rightarrow pe^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	890	1.18	1.61×10^3	4.25×10^{-8}
${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	5.6×10^8	0.14	1.63×10^3	4.20×10^{-8}

F

GT

F>

dove con **F**, **GT**, **F>** sono indicate i diversi casi:

- **F**: transizioni alla Fermi, nessuna variazione dello spin nucleare ($\Delta J_{\text{spin nucleare}}=0$, stato leptonic di singoletto di spin $\uparrow\downarrow$). In tal caso si ha $|M|^2=|M_F|^2=1$
- **GT**: transizioni alla Gamow-Teller, $\Delta J_{\text{spin nucleare}}=\pm 1$, stato leptonic di tripletto di spin $\uparrow\uparrow$. Per tali transizioni si può calcolare $|M|^2=|M_{GT}|^2 \sim 6$
- **F>**: sono transizioni "miste" di Fermi e di Gamow-Teller per le quali si può avere $\Delta J_{\text{spin nucleare}}=0, \pm 1$ (cioè non cambia il valore dello spin ma può cambiare la sua orientazione). E' il caso del decadimento del neutrone ! Nel caso di "transizioni miste" si ha: $|M_F|^2 \sim 1, |M_{GT}|^2 \sim 3$ ed assumendo che non ci sia interferenza tra le ampiezze delle due interazioni nella espressione della probabilità di decadimento possiamo scrivere:

$$G_F^2 |M_{fi}|^2 = G_F^2 \left(c_V^2 |M_F|^2 + c_A^2 |M_{GT}|^2 \right)$$

dove c_V e c_A rappresentano i "pesi relativi" delle due modalità di interazione. Con i dati in tabella si avrebbe

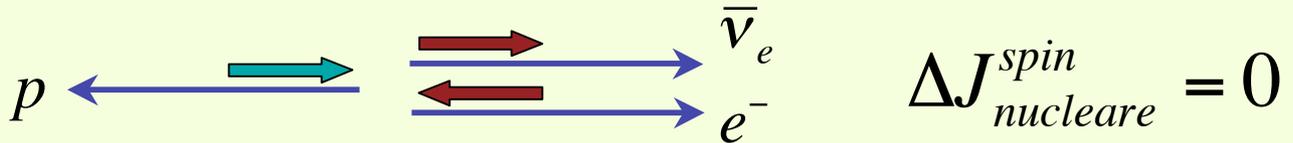
$$c_V = 1 \quad ; \quad |c_A|/|c_V| = 1.25 \pm 0.01$$

Transizione "mista" Fermi/Gamow-Teller

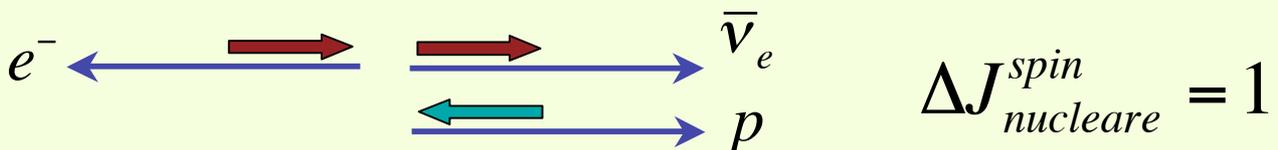
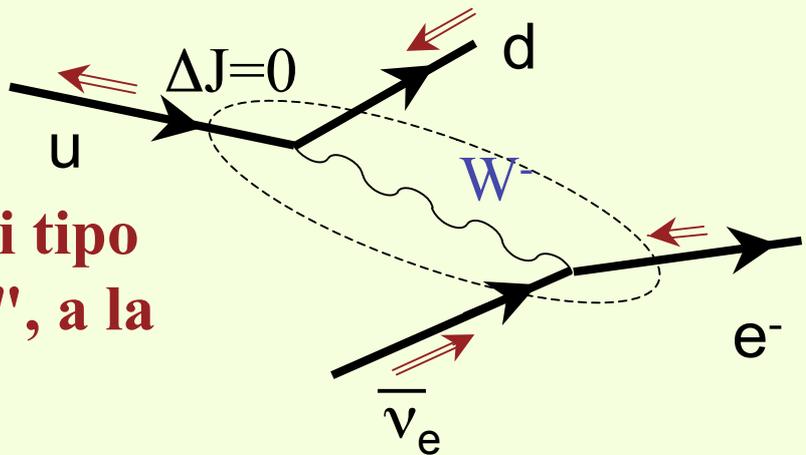
Immaginiamo che inizialmente lo spin del neutrone sia



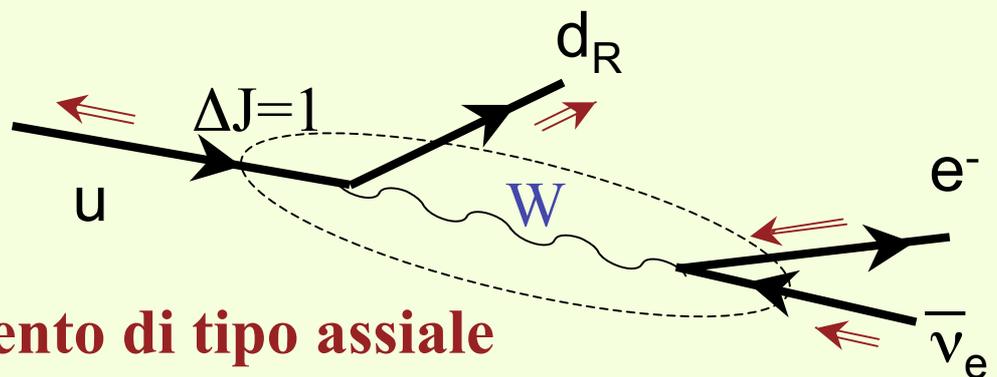
lo spin del protone nello stato finale è determinato dalla configurazione degli impulsi della coppia di leptoni



Accoppiamento di tipo
vettoriale "V", a la
"Fermi"



Accoppiamento di tipo assiale
"A", a la "Gamow-Teller"



La reazione inversa del decadimento del neutrone

Interazione semileptonica $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$ la cui probabilità è data ancora da

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |M|^2 \frac{dN}{dE_0}$$

Supponiamo che $E_{\text{neutrino}} \ll 1 \text{ GeV}$.

Calcoliamo il numero di stati finali possibili (dove abbiamo n ed e^+), trascurando l'energia cinetica trasferita al neutrone e ricordando che

$$dN_e = \frac{p_e^2 dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \quad \text{ovvero se } m_e c^2 \ll E_e \rightarrow E_e = p_e = E$$
$$\Rightarrow \frac{dN_e}{dE} = \frac{dN}{dE} = \frac{E^2}{2\pi^2} \quad \text{avendo posto } c = 1, \hbar = 1$$

possiamo scrivere

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n) = \frac{W}{c} = \frac{G_F^2}{\pi} |M|^2 E^2$$

L'interazione è "mista" di Fermi ($|M_F|^2 \sim 1$) e di Gamow-Teller ($|M_{GT}|^2 \sim 1$) per cui l'elemento di matrice di transizione vale ($|M|^2 \sim 4$)

Per calcolare il valore della sezione d'urto dobbiamo reinserire i termini in c, \hbar ricordando che $(\hbar c)^2 = 0.389 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn}$

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n) = \frac{W}{c} = 4 \frac{G_F^2}{\pi} E^2$$

Ricordando che $G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ si ottiene

$$\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n) = 0.67 \cdot 10^{-37} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{nucleone}} \right] \cdot E^2 [\text{GeV}^2]$$

che per $E_\nu = 1 \text{ MeV}$ da $\sigma(E_\nu = 1 \text{ MeV}) = 7 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2/\text{nucleone}$ ed una "lunghezza d'interazione"

$$\lambda [g \text{ cm}^{-2}] = \frac{1}{N_A \sigma} \sim \frac{1}{6 \cdot 10^{23} * 7 \cdot 10^{-44}} \sim 2 \cdot 10^{19} g \text{ cm}^{-2}$$

per un materiale con densità=1 si ha "libero cammino medio" = $2 \cdot 10^{19} \text{ cm}$

Il decadimento (debole) dei π^\pm e la non conservazione della parità (1)

Uno delle proprietà più caratterizzanti delle interazioni deboli è la non conservazione della parità. Vediamone le implicazioni sul decadimento "debole" dei pioni carichi.

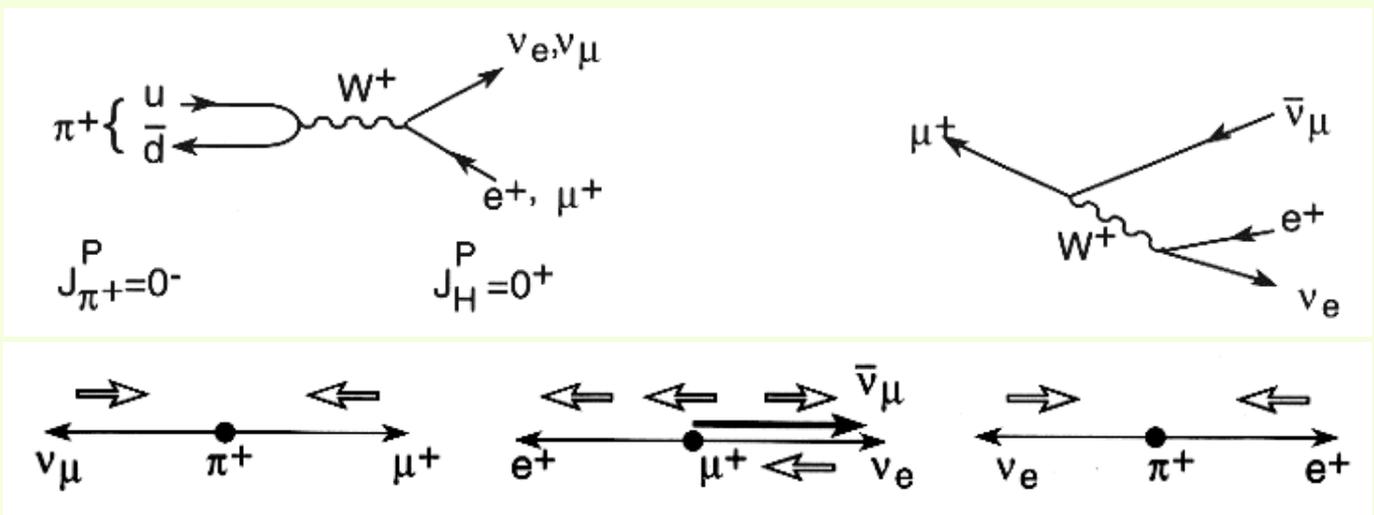
Ricordiamo che i pioni carichi e neutri hanno **spin= $s_\pi=0$** e **parità negativa $P(\pi^+)=P(\pi^0)=P(\pi^-)=-1$** e quindi sono anche definiti "mesoni pseudoscalari" ed hanno spin-parità **$J^P = 0^-$**

I bosoni, se hanno:

- spin-parità **$J^P = 0^+$** sono definiti **scalari**
- spin-parità **$J^P = 1^-$** sono definiti **vettoriali**
- spin-parità **$J^P = 1^+$** sono definiti **pseudovettoriali (assiali)**

Ricordiamo che **neutrini hanno elicità "sinistrorsa" ($\Lambda=-1 ; s_z=-1/2$)** e **gli antineutrini elicità "destrorsa" ($\Lambda=+1 ; s_z=+1/2$)**.

Vogliamo considerare sia il decadimento del pione carico sia quello del leptone (e^\pm oppure μ^\pm) generato.



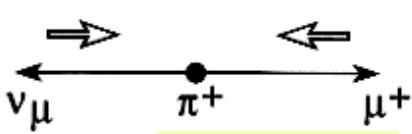
S.R. del π che decade
 $\vec{p}_\nu = -\vec{p}_\mu$
 Ciò comporta che μ^+ ha elicità $\Lambda(\mu^+)=-1$ ricordiamo che normalmente $\Lambda(\mu^+)=1$

S.R. μ^+ che decade
 Se i due neutrini emessi nella stessa direzione: confermato dagli esperimenti !!!

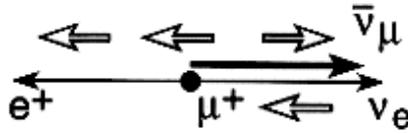
Perchè questo stato finale è sfavorito ?
 Sperimentalmente

$$\frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu}} \sim 1.27 \cdot 10^{-4}$$

Il decadimento (debole) dei π^\pm e la non conservazione della parità (1)



$$\Lambda(\mu^+) = -1 !!$$



$$\Lambda(e^+) = -1 !!$$

Sia il μ^+ che l' e^+ hanno elicità opposta a quella che ci aspettiamo, il μ^+ tuttavia "riesce a violare la sua elicità naturale" più facilmente dell' e^+ .

L'operatore elicità, definito da

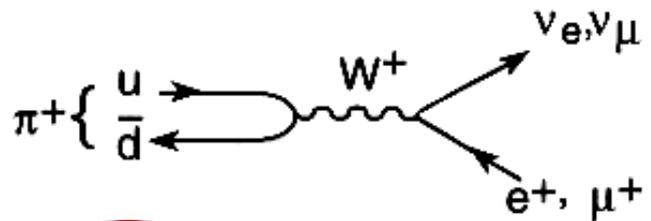
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} \end{pmatrix}$$

commuta con \vec{p} (è indipendente dall'impulso) e dall'hamiltoniana:

$$[\Lambda, \vec{p}] = 0, \quad [\Lambda, H] = 0$$

ammettendo due autovalori

$$\Lambda = \pm 1$$



$$J_{\pi^+}^P = 0^-$$

Stato iniziale adronico

$$J_H^P = 0^+$$

Stato finale adronico = vuoto !!

Analizzando in dettaglio il decadimento del pione: la transizione $J^P = 0^- \rightarrow 0^+$ ha comportamento di vettore assiale

Il decadimento (debole) dei π^\pm e la non conservazione della parità (2)

Se $\psi_{1,2} = u_{1,2} e^{-i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}$ e $\psi_{3,4} = v_{1,2} e^{+i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}$ sono soluzioni dell'equazione di Dirac

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi = 0$$

gli spinori a 4 componenti $u_{1,2}$ corrispondono a particelle con energia E ed impulso \vec{p} mentre $v_{1,2}$ a particelle con energia $-E$ ed impulso $-\vec{p}$ (antiparticelle).

Tali spinori sono autostati dell'operatore Λ , con autovalori ± 1 .

Possiamo applicare a tali spinori degli operatori hermitiani

$$\Lambda_+ = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$u = \frac{1 + \gamma_5}{2} u + \frac{1 - \gamma_5}{2} u = \Lambda_+ u + \Lambda_- u \equiv u_R + u_L$$

dove u_R ed u_L sono autostati di elicità degli operatori "proiettori di elicità" Λ_\pm .

$u \sim u_R$ per gli stati "destrorsi" con $\Lambda = +1$

$u \sim u_L$ per gli stati "sinistrorsi" con $\Lambda = -1$

$$u_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} u$$

$$u_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} u$$

La probabilità di uno autostato di elicità è data da

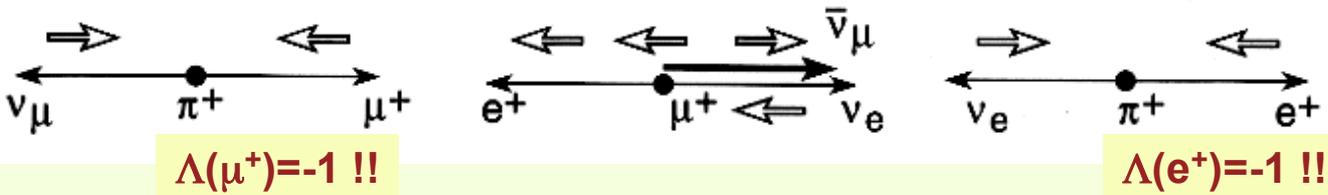
$$|u_R|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{|E| + m}{2m} \right) \left| 1 + \frac{p}{E + m} \right|^2 \quad \text{e} \quad |u_L|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{|E| + m}{2m} \right) \left| 1 - \frac{p}{E + m} \right|^2$$

e la polarizzazione di uno stato è definita da

$$Pol = \frac{|u_R|^2 - |u_L|^2}{|u_R|^2 + |u_L|^2} = \frac{p}{E} = \beta$$

cioè la polarizzazione dipende dalla velocità della particella. Se $E \gg m$, $p \sim E$ (ultrarelativistica) le soluzioni dell'equazione di Dirac sono autostati di elicità. Una particella libera può essere descritta come combinazione lineare degli autostati u_R ed u_L

Il decadimento (debole) dei π^\pm e la non conservazione della parità (3)



Sia il μ^+ che l' e^+ devono avere nel decadimento del pione elicità opposta a quella che ci aspettiamo per una "antiparticella" se relativistica. Entrambe le particelle si presentano cioè con una polarizzazione "sfavorita".

La probabilità di trovare il μ^+ o l' e^+ con polarizzazione "sinistrorsa" è proporzionale a $1-\beta$.

Fissata l'energia nel centro di massa $\beta_{\text{elettrone}} > \beta_{\text{muone}}$ essendo $m_\mu \sim 200 m_e$.

Per $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ si ha

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu} \sim \left(1 - \frac{v_\mu}{c}\right) p^2 \frac{dp}{dE_0} \quad \text{dove } p = p_\mu = p_\nu$$

$$E_0 = m_\pi = p + \sqrt{p^2 + m_\mu^2} \quad \text{avendo posto } c = 1$$

$$p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{E_0^2 - m_\mu^2}{2E_0} \Rightarrow p^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4m_\pi^2}$$

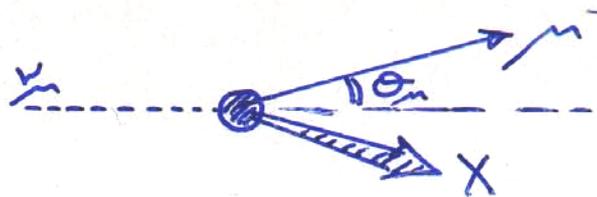
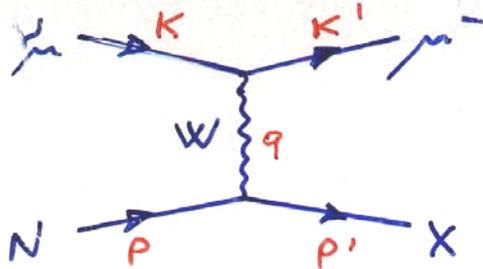
$$\text{ed anche } \frac{dp}{dE_0} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2}; \quad \frac{v_\mu}{c} = \frac{p_\mu}{E_\mu}; \quad 1 - \frac{v_\mu}{c} = \frac{2m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}$$

Quindi $\Gamma_{\pi \rightarrow \mu} \sim \frac{m_\mu^2}{4} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2$ e per $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu$ $\Gamma_{\pi \rightarrow e} \sim \frac{m_e^2}{4} \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2$

In tal modo è possibile calcolare

$$R = \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu}} \sim \frac{m_e^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2}{m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2} \approx 1.27 \cdot 10^{-4}$$

Processi semileptonici (ad es C.C.)



Nel S.R. del laborat.

interazione C.C.
neutrino nucleone

K, K' \hookrightarrow momenti μ e μ^-
 P, P' " " nucleone entrante ed uscente

$K - K'$ \hookrightarrow momento trasferito

E_ν, E_μ energia del ν e μ nel laborat.

M massa a riposo del nucleone

E_h^{tot} energia totale del sistema
adronico finale nel laboratorio

θ_μ

$$Q^2 = -q^2 = -(K - K')^2 \approx 2E_\nu E_\mu (1 - \cos \theta_\mu)$$

se è possibile trascurare
la massa del μ

$$W = P \cdot q / M = E_\nu - E_\mu = E_h^{tot} - M \approx E_h$$

$$W^2 = (P \cdot q)^2 = M^2 + 2M_W - Q^2$$

la variabile
misurata
con calorimetro

il quadrato della massa invariante
del sistema adronico finale

e ancora ... due variabili a dimensionali

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad \text{nel Q.P.M. assume il significato di "frazione di momento di nucleone trasportata dal quark interagente"}$$

$$y = \frac{\nu}{E_\nu} \quad \text{inelasticità}$$

"REGIONI CINEMATICHE"

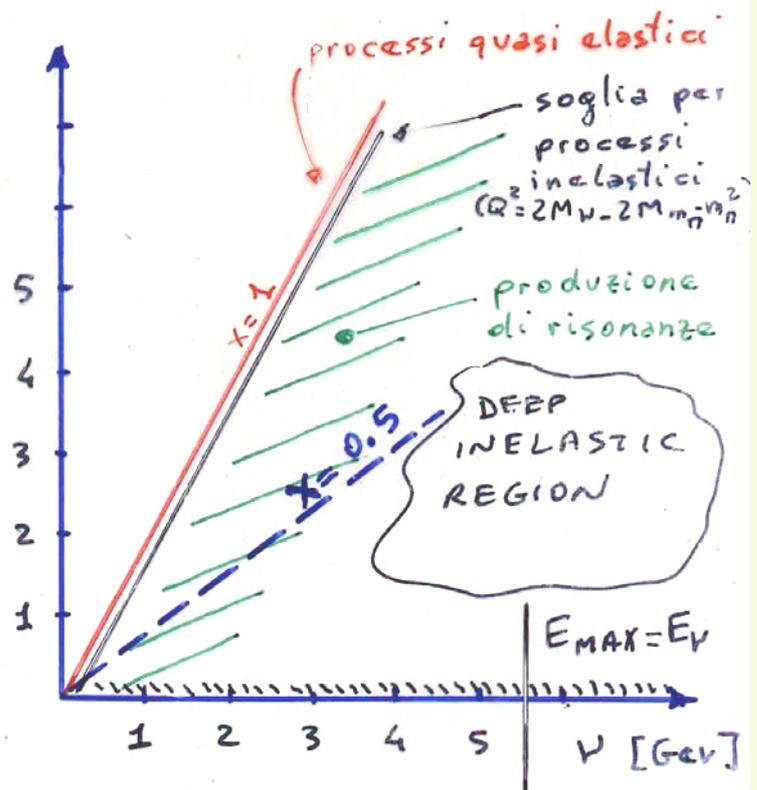
se nello stato finale troviamo un singolo nucleone (Q.E.)

$$\Rightarrow W^2 = M^2 \Rightarrow 2M\nu = Q^2 \quad (x=1)$$

Se nello stato finale troviamo anche π^+, π^-, π^0 Q^2 [Gev]

$$W^2 = (M + m_\pi)^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2$$

Al crescere della massa invariante del sistema adronico ci spostiamo nella regione del Deep - inelastic



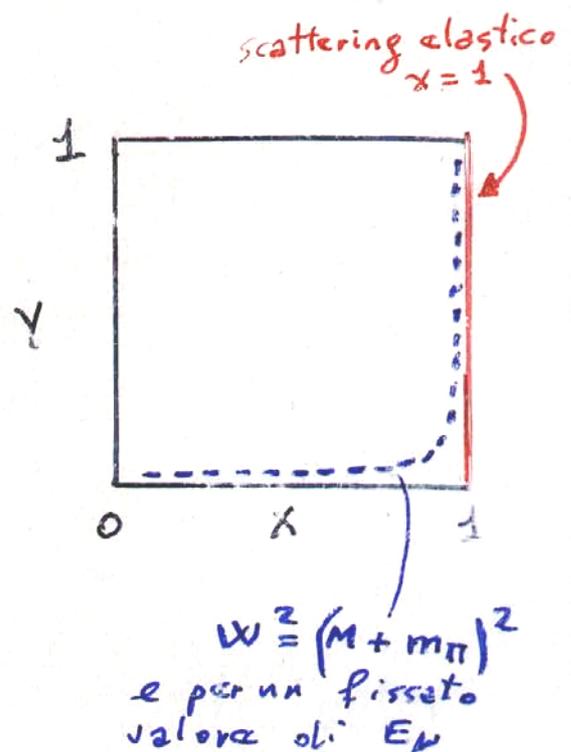
$$x = \frac{Q^2}{W^2 - M^2 + Q^2}$$

$$0 < x < 1$$

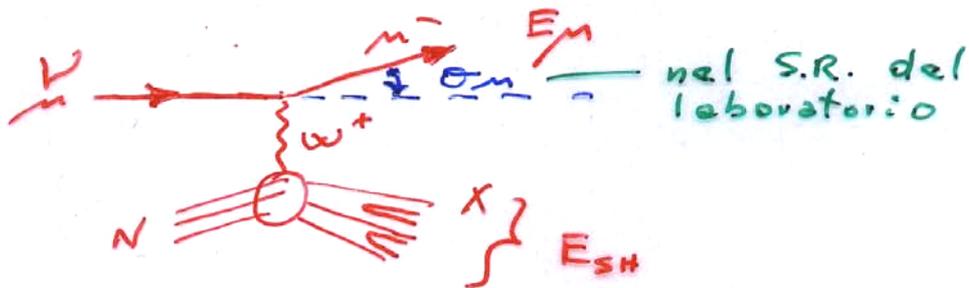
Analogamente possiamo studiare
le regioni cinematiche nel piano
 $x-y$

$$0 < x < 1$$

$$0 < y \leq \frac{1}{1 + \frac{M \cdot x}{E_{MAX}}}$$



in interazioni di C.C.



$$Y \approx \frac{E_{SH}}{E_{\nu}} = \frac{E_{SH}}{E_{SH} + E_{\mu}}$$

calorimetro

spettrometro

MISURABILE
SPERIMENT.
EVENTO PER EV.

$$X \approx \frac{2 E_{\mu} \cdot (E_{\mu} + E_{SH})}{2 M_p \cdot E_{SH}} \cdot \sin^2 \theta_{\mu}$$

spettrometro

calorimetro

sistema
tracciante
per μ

X, Y variabili "macroscopiche" dalla cui misura è possibile ricavare informazioni sulla dinamica delle interazioni