

Fisica Nucleare e Subnucleare II

Lezioni n. 3, 4

- Richiami di argomenti da considerare già noti:
 - Interazioni
 - Campi
- Interazioni tra adroni a basse energie. Sezione d'urto per interazione forte.

Le interazioni sono caratterizzate da:

- natura della interazione
- forza della interazione
- tipo (massa) della “particella” scambiata durante l’interazione
- distanza (range) d’azione dell’interazione

Per caratterizzare le intensità delle forze si rapportano tutte alla intensità della interazione forte (a grandi distanze), in tal modo si definiscono delle
costanti di accoppiamento adimensionali

-inter. forte	1	$\frac{g^2}{\hbar c}; \quad \hbar c = 197.33 \text{MeV} \cdot \text{fermi}; \quad 1 \text{fermi} = 10^{-15} \text{m}$
-inter. elettromagnetica	$\alpha=1/137$	$\frac{e^2}{\hbar c}$
-inter. debole	$1.166 \cdot 10^{-5}$	$\frac{G_F M_p^2}{(\hbar c)^3}; \quad M_p = 938.3 \text{MeV}$
-inter. gravitazionale	$6.707 \cdot 10^{-39}$	$\frac{G_N M_p^2}{\hbar c}; \quad G_N = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

Diagrammi di Feynman

Processi elementari quali l'urto fra due particelle (o un decadimento) sono comunemente rappresentati da "diagrammi di Feynman" (introdotti per rappresentare graficamente termini del calcolo degli elementi di matrice di transizione M_{fi} in processi QED). Sono usati anche in Cromodinamica Quantistica (QCD), comodi per illustrare i processi

→ funzioni d'onda dei fermioni negli stati iniziali e finali

~~~~~ fotoni

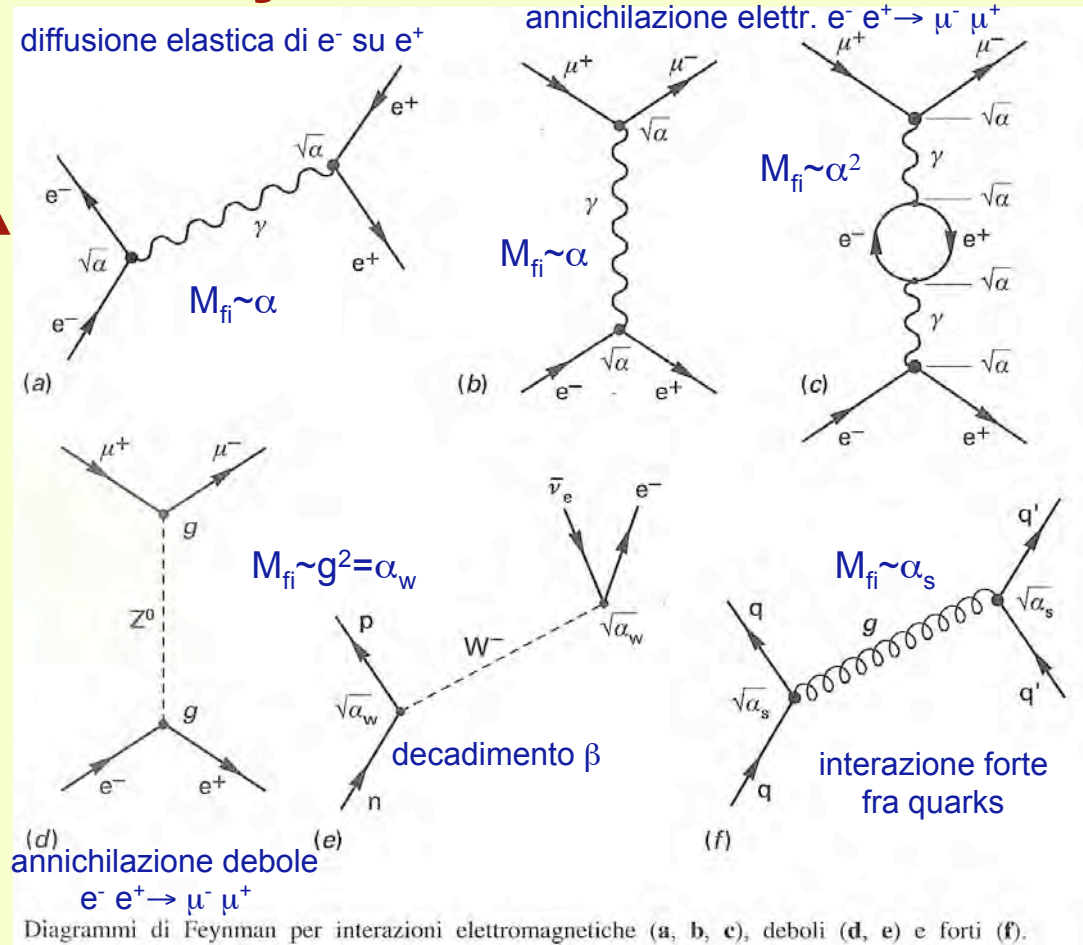
----- bosoni vettori pesanti

~~~~~ gluoni

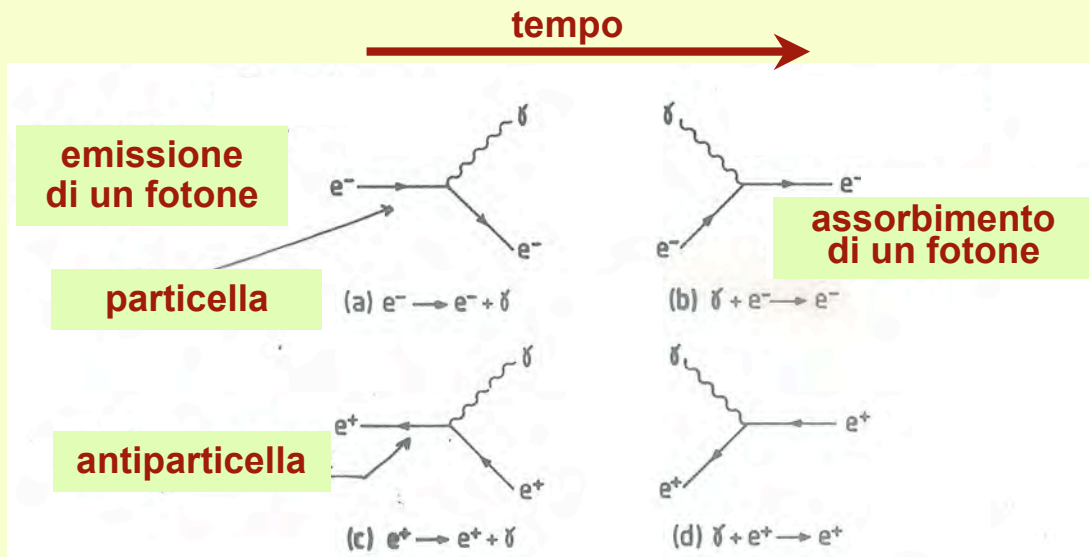
Ad ogni vertice corrisponde nell'elemento della matrice di transizione un termine che racchiude la dinamica e l'intensità dell'interazione. L'elemento di matrice è il risultato della sovrapposizione delle ampiezze per tutti i diagrammi che portano allo stesso stato finale

Le particelle di scambio contribuiscono a M_{fi} con un termine detto **propagatore** $= 1/(Q^2 + M^2 c^2)$ dove Q^2 è il quadrato del quadri-impulso trasferito

tempo



spazio



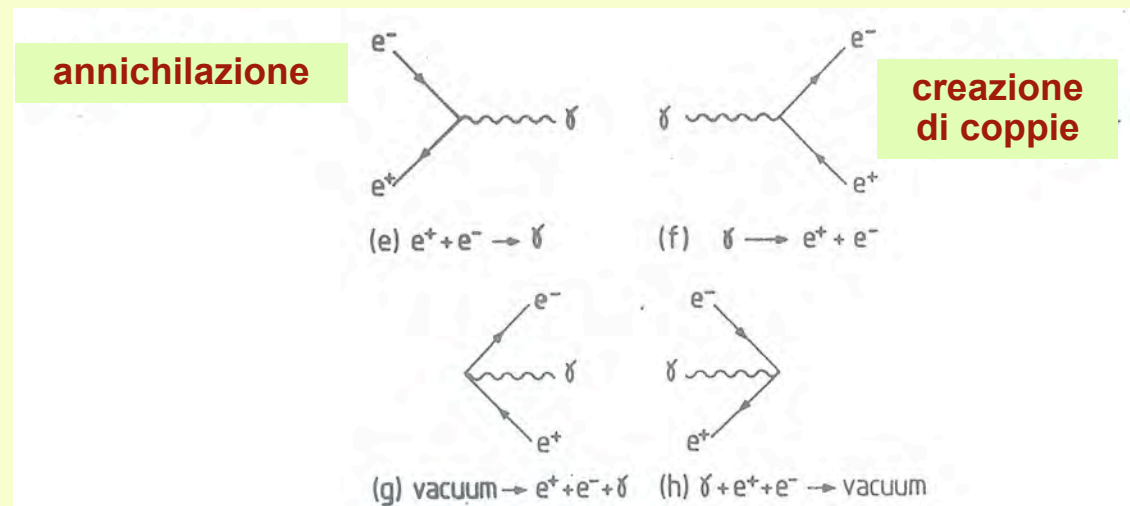
Nei vertici dei diagrammi si conservano i vari numeri quantici (ad es. la carica), però non risultano essere conservati energia ed impulso.

Tali processi vengono definiti “**virtuali**”.

I processi **virtuali** non possono **esistere** nello **spazio-tempo** reale.

Possono essere considerati **solo per un tempo brevissimo** compatibilmente con il **principio di indeterminazione**.

I processi reali però possono essere rappresentati come risultato globale di due processi “**virtuali**”. Anche se i singoli processi **virtuali** non conservano energia ed impulso con l’insieme di due processi “**virtuali**” tale conservazione è assicurata



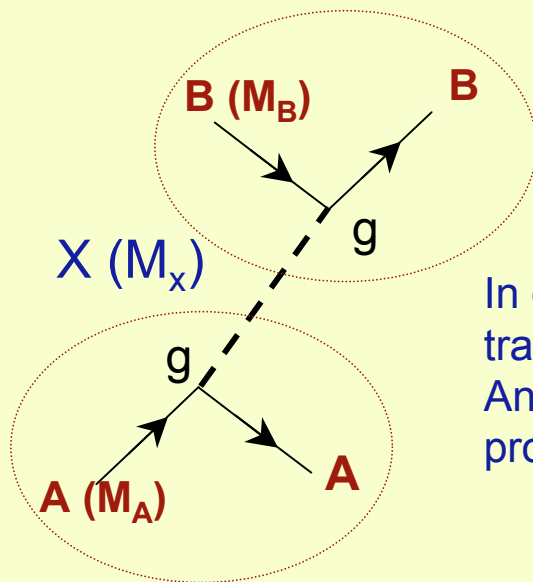
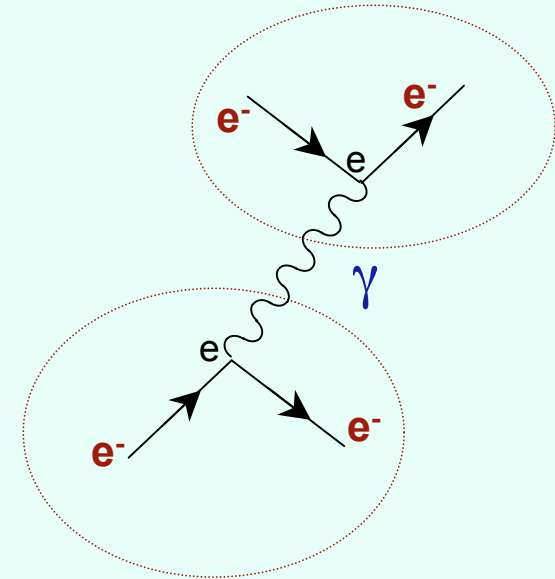
Processi virtuali e reali, tempo d'interazione

Quindi l'interazione (reale!) $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ (diffusione di un e^- su un altro e^-) può essere rappresentata come l'insieme di due processi virtuali (emissione + assorbimento di un fotone).

In ognuno dei due processi **si ammette una temporanea violazione della conservazione contemporanea di energia ed impulso**, per un tempo τ compatibile con il principio di indeterminazione

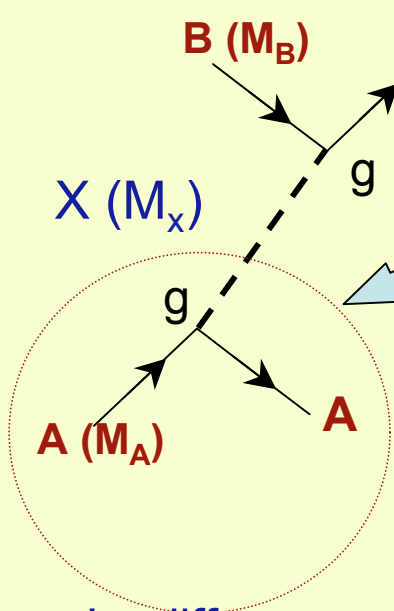
$$\tau \cdot \Delta E \sim \hbar \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s})$$

(ricordiamo $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)



In generale la diffusione della particella **A** sulla particella **B** avverrà tramite lo scambio di un "mediatore", una "terza particella" X di massa M_X . Anche tale interazione potrà essere descritta tramite l'insieme di due processi "virtuali"

Processi virtuali e reali, range d'interazione



g = costante di accoppiamento, indica la “ intensità ” della forza di interazione fra B (od A) e X

prendiamo in esame il processo virtuale: nel sistema di rif. di A (A fermo, $p_A = 0$) abbiamo:

$$A(M_A c^2, \vec{0}) \rightarrow A(E_A, \vec{p}) + X(E_X, -\vec{p}); \quad \text{con } E_A = \sqrt{p^2 c^2 + M_A^2 c^4} \quad \dots \text{etc}$$

La differenza di energia fra lo stato finale e quello iniziale è data da:

$$\Delta E = E_X + E_A - M_A c^2$$

che assume i valori

$$\Delta E \sim pc \quad \text{per } p \rightarrow \infty$$

$$\Delta E \sim M_X c^2 \quad \text{per } p \rightarrow 0$$

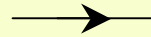
quindi $\Delta E \geq M_X c^2$

Ricordando che

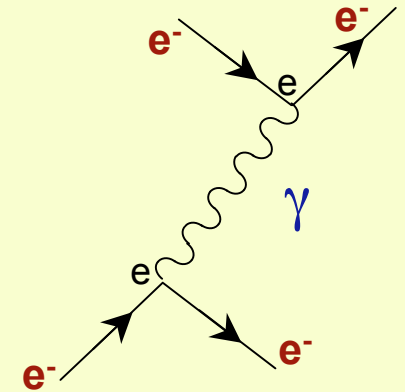
$$\tau \cdot \Delta E \sim \hbar \Rightarrow \tau \cdot M_X c^2 \sim \hbar \Rightarrow \tau \cdot c = R \cong \frac{\hbar}{M_X c}$$

dove R rappresenta la “massima distanza” su cui X si propaga prima di essere assorbito

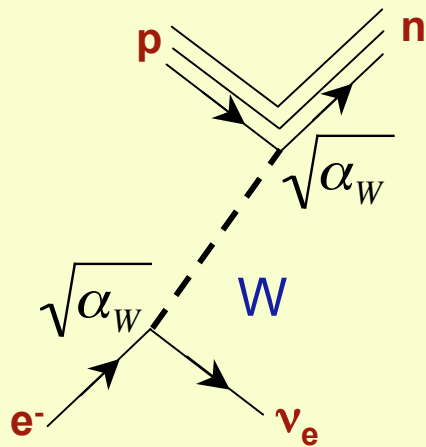
Processi virtuali, mediatori e range d'interazione



La massima distanza alla quale l'interazione può avvenire (range) dipende dalla massa (M_X) della particella "scambiata". Ad esempio l'interazione elettromagnetica $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ è mediata da fotoni



$$\Rightarrow m_\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\gamma = \frac{\hbar}{m_\gamma c} = \infty$$



L'interazione $e^- p \rightarrow n \nu_e$, reazione inversa del decadimento β del neutrone è mediata dal **bosone W** la cui massa

$$\Rightarrow m_W = 80 \frac{GeV}{c^2} \quad \Rightarrow \quad R_W = \frac{\hbar}{m_W c} \sim 2 \cdot 10^{-3} fm = 2 \cdot 10^{-18} m$$

Il propagatore bosonico (1)

Consideriamo la diffusione di una particella, inizialmente libera, con un campo

$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-\frac{r}{R}}$ ad esempio generato da una particella carica. In tal caso $g/4\pi=e$, la

massa del propagatore (fotone) è nulla e $R=h/(2\pi mc)=\infty$ (campo coulombiano a

simmetria sferica). Il potenziale d'interazione è dato da $V(r)=g_0U(r)$ (dove g_0 indica la

costante di accoppiamento della particella che diffonde ed $U(r)$ il campo: se diffusione

Coulombiana $g_0=e$). Supponiamo che le parti spaziali delle due funzioni d'onda (iniziale

e finale) siano $\Phi_i = e^{i\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}}$ e $\Phi_f = e^{i\frac{\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}}$. Per l'elemento della matrice di transizione

abbiamo $M_{if} = \int \Phi_i^* V \Phi_f d\tau = g_0 \int U(r) e^{-i\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}} e^{i\frac{\vec{p}_f \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\tau$ Tale elemento di matrice di

transizione è chiamato anche propagatore bosonico (affinché l'interazione abbia luogo è

scambiata una particella bosonica, a spin intero)

$$M_{if} = g_0 \int U(r) e^{i\frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\tau = g_0 \int U(r) e^{i\frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\tau = f(\vec{q}) \quad \text{dove} \quad \vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Il propagatore bosonico (2)

Sostituendo in $M_{if} = g_0 \int U(r) e^{i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\tau = g_0 \int U(r) e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\tau = f(\vec{q})$

l'espressione del potenziale $U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-\frac{r}{R}}$ e sostituendo nell'integrale

$\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos\theta$; $d\tau = r^2 d\phi \sin\theta d\theta dr$ otteniamo

$$f(\vec{q}) = f(q) = gg_0 \int \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{r}{R}} e^{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}} r^2 d\phi \sin\theta d\theta dr$$

Tenendo conto del fatto che

$$\int_0^\pi \sin\theta e^{iqr \cos\theta} d\theta = 2 \frac{\sin(qr)}{qr} ; \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \text{ e che } \sin z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}$$

e sostituendo otteniamo $f(q) = 4\pi gg_0 \int \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{r}{R}} \frac{(e^{iqr} - e^{-iqr})}{2i} dr = \frac{gg_0}{q^2 + m^2}$

avendo sostituito $R = \frac{\hbar}{mc}$ ed avendo posto $\hbar = c = 1$

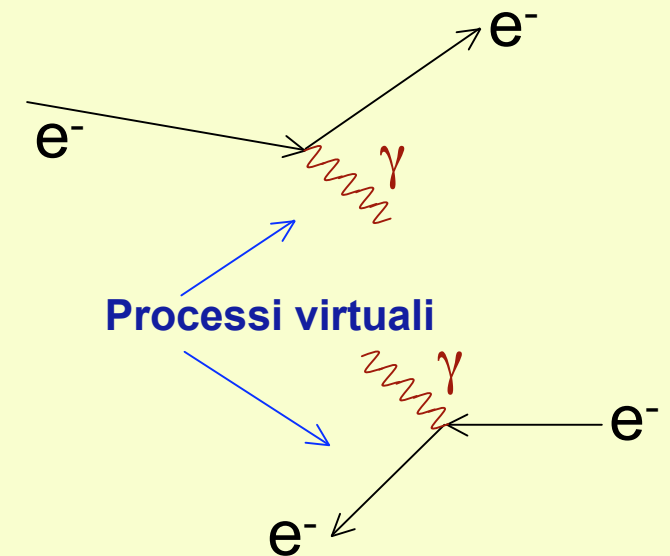
$f(q)$ descrive lo scambio di un bosone tra due particelle diffuse (fermioni).

Ricordiamo che $|M_{if}|^2 = |f(q)|^2$

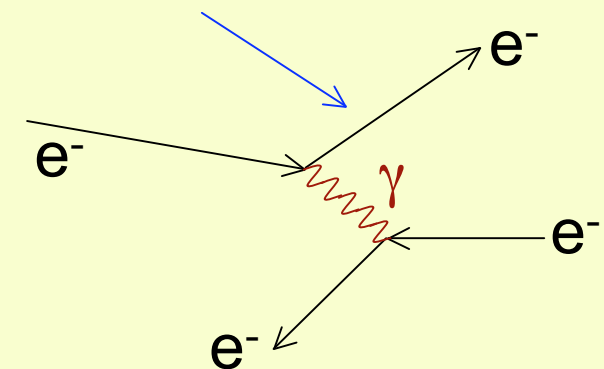
Natura delle forze di interazione: QED \Leftrightarrow fotoni

Ricapitolando

- Q.E.D. : il fotone è il tramite dell'interazione elettromagnetica: l'elettrone emette il fotone e "rincula" in modo tale che sia conservato il momento. Non è possibile conservare allo stesso momento energia ed impulso quindi il processo è "virtuale". Si può ammettere che "esista" per un tempo limitato dal principio di indeterminazione: $\Delta t \leq \hbar/(2\pi \Delta E)$ e che si propaghi su una distanza $\Delta s = c \Delta t$
- Affinché il processo diventi reale dobbiamo ammettere che il fotone sia velocemente "riassorbito" da un altro processo "virtuale".
- "L'insieme" dei due processi virtuali conserva sia l'impulso che l'energia e rappresenta un processo "reale"
- Diagrammi di Feynmann ben rappresentano la schematizzazione delle interazioni



Processo reale: diffusione Coulombiana



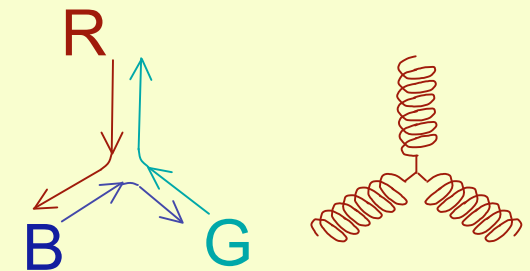
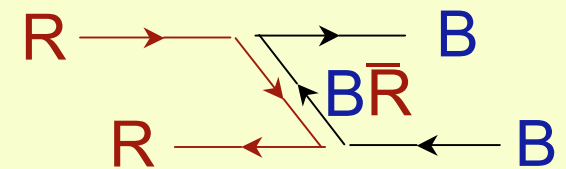
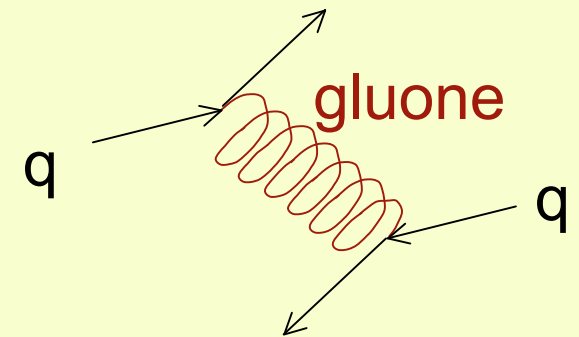
Interazioni forti e gluoni

- La sorgente dell'interazione elettromagnetica e' la carica elettrica: interazione mediata da fotoni
- La sorgente dell'interazione forte e' la carica di colore: interazione mediata da 8 gluoni di massa nulla ciascuno dei quali porta una carica di colore ed una anti-carica di colore:

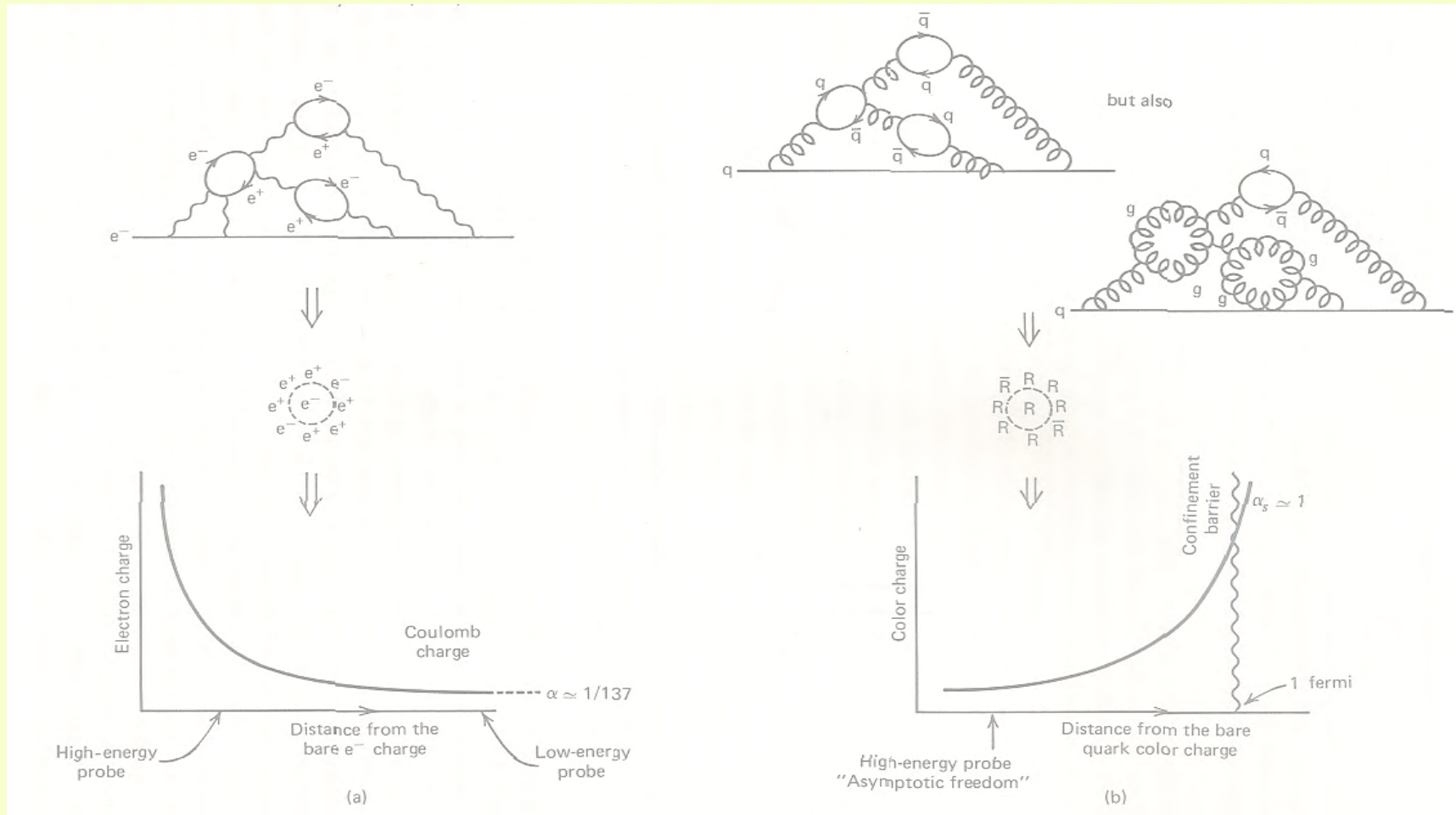
$$r\bar{b}, r\bar{g}, b\bar{r}, b\bar{g}, g\bar{r}, g\bar{b}$$

più due combinazioni tra loro

- Anche i quarks possono interagire scambiando fotoni (hanno carica) ma l'interazione che lega i quarks nei nucleoni è legata al "colore": in analogia al campo dovuto alla carica elettrica le cui interazioni avvengono con fotoni, il campo in cui lo stato di carica è dato dal "colore" ha le interazioni "mediate" dal "gluone" (i quanti del campo delle interazioni forti).
- In analogia ai fotoni per la QED i gluoni sono i quanti della QCD: i quarks interagiscono "forte" scambiandosi il "colore".
- I gluoni "trasportano colore", sono in effetti entità "bicolorate".
- I fotoni, privi di carica, non possono interagire fra di loro, i gluoni (che invece trasportano colore) possono avere "self-couplings" (la QCD pertanto è una teoria di campi non-Abeliana).
- le interazioni gluone-gluone sono tali che allontanandosi dal quark la "carica effettiva" di colore che condiziona l'interazione diventi sempre più intensa: la costante di accoppiamento fra quarks cresce aumentando la distanza fra di loro: i quarks sono "confinati".



Asymptotic freedom in QED e QCD



Confronto fra modelli teorici e risultati sperimentali

- Probabilità di transizione W

- Se lo stato finale di una interazione è la sovrapposizione di diversi stati finali (ad esempio nel decadimento a tre corpi del neutrone l'energia totale E_0 è fissata anche se le tre particelle possono suddividersi l'energia in un numero estremamente grande di modi) la probabilità di transizione per unità di tempo è data dalla somma di tutte le ampiezze di probabilità $c_k(t)$ di trovare il sistema finale nello stato k

$$W = \frac{1}{t} \sum_k |c_k(t)|^2 \rightarrow \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} |c_m(t)|^2 \frac{dN}{dE} dE$$

dove la somma sugli stati discreti è stata sostituita con un integrale sugli stati di energia delle particelle nello stato finale e dN/dE rappresenta la *densità degli stati permessi per unità di energia*.

Integrando si giunge a scrivere
$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{dN}{dE_f}$$

dove $M_{if} = \int \Phi_i^* V \Phi_f d\tau$ è l'elemento della matrice di transizione tra lo stato i e lo stato f (Φ_i , Φ_f la parte spaziale delle funzioni d'onda iniziale e finale, V il potenziale che descrive l'interazione).

Sezioni d'urto (1)

Consideriamo la reazione $a+b \rightarrow c+d$ con n_a particelle incidenti con velocità v_i sul bersaglio b

$$\Phi = n_a v_i \quad [\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \text{ flusso di particelle incidenti su } b$$

$$W [s^{-1}] = \sigma \Phi = \sigma n_a v_i \quad [\text{cm}^2][\text{cm}^{-3}][\text{cm} \text{s}^{-1}]$$

W rappresenta la probabilità che nell'unità di tempo una particella del fascio abbia interagito con una particella del bersaglio

σ ha le dimensioni di un'area e rappresenta una sezione d'urto

La quantità $\sigma = \frac{W}{v_i}$ rappresenta la sezione d'urto normalizzata all'unità di volume. Dalle informazioni sperimentali se e' possibile misurare σ , si possono ricavare informazioni sulle proprietà dell'interazione (W)

Sezioni d'urto (2)

- Sperimentalmente vorremo osservare uno stato finale di $a+b \rightarrow c+d$ con le particelle c e d in uno dei tanti stati possibili nello “spazio delle fasi”, cioè
 - in una particolare posizione ($dx\ dy\ dz$) dello spazio
 - in un definito valore di impulso ($dp_x\ dp_y\ dp_z$)
 - Il numero di stati di una particella nello spazio delle fasi in coordinate cartesiane e' $dN = dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z / h^3$
 - In coordinate sferiche in un volume unitario e nell'intervallo ($p+dp$) nel sistema del laboratorio e' $dN = \frac{d\Omega}{(2\pi)^3 h^3} p^2 dp$
 - se c e d hanno spin (s_c ed s_d) ognuna può essere in uno dei $(2s_c + 1)$ e $(2s_d + 1)$ stati possibili: il numero totale di stati diversi e' pari a $g_f = (2s_c + 1) (2s_d + 1)$

Sezioni d'urto (3)

- Il numero di stati finali possibili per $a+b \rightarrow c+d$, per una certa energia totale iniziale E_0 è quindi $\frac{dN}{dE_0} = \frac{d\Omega}{(2\pi)^3 h^3} g_f p^2 \frac{dp}{dE_0}$
 - supponiamo che una delle particelle interagenti (bersaglio) abbia massa $M \gg m$ e la sua q.d.m. subisca una piccola variazione mentre l'altra viene diffusa nello stato finale con E, p, m . L'energia totale sarà

$$E_0 = M + \sqrt{p^2 + m^2} \quad \text{da cui} \quad dE_0 = \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + m^2}} dp = \frac{p}{E} dp$$

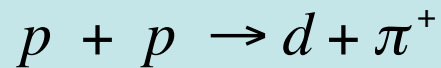
$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{E}{p} \quad \text{ricordando che} \quad E = mc^2 \gamma \quad \text{e} \quad p = mv\gamma \quad \text{si ottiene} \quad \frac{E}{p} = \frac{1}{v}$$

dove v rappresenta la velocità della particella diffusa. Infine possiamo scrivere per

$$\sigma(a + b \rightarrow c + d) = \frac{W}{v_i} = \frac{1}{v_i} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} |f(q)|^2 g_f p^2 \frac{dp}{dE_0} = \frac{1}{(2\pi)^2} |f(q)|^2 g_f p^2 \frac{1}{v v_i} d\Omega$$

Interazione forte e conservazione dello spin isotopico

- L'interazione forte dipende solo dall'isospin totale I_{tot} (e non da I_z nè dalla carica Q)
- Spin isotopico totale ($I_{tot}=1/2$ per n e p , $I_{tot}=0$ per d , $I_{tot}=1$ per π^+ , π^- , π^0) è conservato nei processi dovuti all'interazione forte
- Nei processi



$$I_z^{p+p} = 1 \quad I_z^d = 0, \quad I_z^{\pi^+} = 1$$

$$I_{tot}^{p+p} = 1 \quad \rightarrow \quad I_{tot}^{d+\pi^+} = 1$$

solo $I_{tot}^{p+p} = 1$ puo' fornire $I_z^{p+p} = 1$



$$I_z^{p+n} = 0 \quad I_z^d = 0, \quad I_z^{\pi^0} = 0$$

$$I_{tot}^{p+n} = \begin{cases} 0 \text{ singoletto} \\ 1 \text{ tripletto} \end{cases} \rightarrow I_{tot}^{d+\pi^0} = 1$$

solo lo stato di tripletto conserva I_{tot} !!!

nell'interazione forte si deve conservare lo spin isotopico totale !

Sperimentalmente $\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+) = 2\sigma(p + n \rightarrow d + \pi^0)$: solo il 50% degli stati iniziali (quelli con $I_{tot}^{p+n} = 1$) della seconda reazione contribuiscono allo stato finale.

Spin Isotopico dei quarks

- La simmetria di isospin per **n** e **p** (costituiti solo dai *quarks di valenza* **u**, **d**) implica una simmetria anche per i quarks costituenti
- I quarks **u**, **d** hanno
 - $I=1/2$ con $I_z(u)=+1/2$ e $I_z(d)=-1/2$
- I quarks **s**, **c**, **b**, **t** (*quarks di mare*) hanno tutti $I=0$ (*singoletti di isospin forte*)

Caratteristiche delle diverse interazioni

| Interaction | Range | Typical Lifetime (sec) | Typical Cross Section (mb) | Typical Coupling α_i |
|-----------------|---|--|---|-----------------------------|
| Strong | $1 F \approx \frac{1}{m_\pi}$ | 10^{-23} | 10 | 1 |
| | Color confinement range ^a | e.g., $\Delta \rightarrow p\pi$ | e.g., $\pi p \rightarrow \pi p$ | |
| Electromagnetic | ∞ | $10^{-20} \sim 10^{-16}$
e.g., $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
$\Sigma \rightarrow \Lambda\gamma$ | 10^{-3}
e.g., $\gamma p \rightarrow p\pi^0$ | 10^{-2} |
| Weak | $\frac{1}{M_W}$ with
$M_W \approx 100 m_p$ | 10^{-12} or longer
e.g., $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$
$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}$ | 10^{-11}
e.g., $\nu p \rightarrow \nu p$
$\nu p \rightarrow \mu^- p\pi^+$ | 10^{-6} |