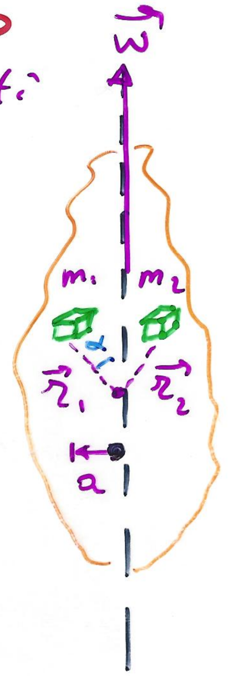
Momento d'inerzia di un sistema rigido

Momento angolare assiale

Con due sole masse il momento della quantità di moto

$$\vec{P} = 2 m r^2 \vec{w}$$

Per un corpo esteso ... simmetrico rispetto all'asse di rotazione ...
... sommiamo su tanti elementi di volume ...



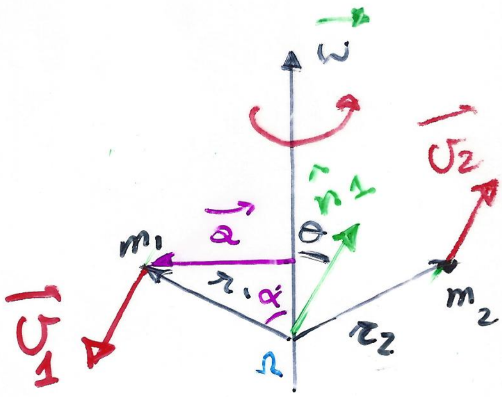
$$\vec{P_1} = \vec{r_1} \times dm\, \vec{v_1}$$

$$\vec{P_2} = \vec{r_2} \times dm\, \vec{v_2}$$

$$\vec{v_1} = \vec{w} \times \vec{a} = w a \cdot \hat{v} =$$
$$= w \cdot r_1 \operatorname{sen}\alpha \cdot \hat{v}$$

$$\vec{P_1} = \vec{r_1} \times dm \cdot w \cdot r_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha\ \hat{v_1} =$$
$$= dm \cdot w \cdot r_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{r_1} \times \hat{v_1}$$
$$= dm \cdot w \cdot r_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot r_1\ \hat{n}_1$$
$$= dm \cdot w \cdot r_1^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \hat{n}_1$$

$$\vec{P_2} = dm \cdot w \cdot r_2^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \hat{n}_2$$



$\hat{n}_1$ è la direzione di $\vec{P_1}$: forma con w l'asse $\theta = 90 - \alpha$

La proiezione di $\vec{P_1}$ parallela ad $\vec{w}$ è:

$$(P_1)_w = P_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = P_1 \operatorname{sen}\alpha$$

$$= dm\, w \cdot \underbrace{r_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha}_{a^2} = dm \cdot w \cdot a^2$$

analogamente per $(P_2)_w$

$$(P_2)_w = P_2 \sin\alpha = dm \cdot w \cdot a^2$$

La somma è dunque un vettore parallelo all'asse di rotazione

$$d\vec{P_1} + d\vec{P_2} = \left[(dP_1)_w + (dP_2)_w\right]\hat{w} =$$

$$= \left(dm \cdot w \cdot a^2 + dm \cdot w \cdot a^2\right)\hat{w} =$$

$$= 2 \cdot dm \cdot a^2 \cdot \vec{w}$$

avendo sommato due elementi infinitesimi dm.

Sommando su tutto il corpo

$$\vec{P_w} = \int dm \cdot a^2 \cdot \vec{w} = \vec{w} \int dm \cdot a^2 = \vec{w} \cdot I$$

I = momento d'inerzia del corpo in esame calcolato rispetto all'asse passante per il baricentro (che è anche l'asse di rotazione)

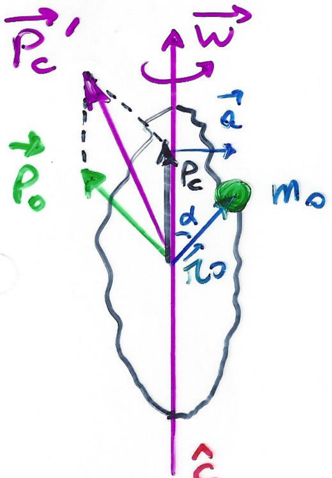
$I = cost$ (corpo rigido)

se $\vec{w} = cost \Rightarrow \vec{P} = cost$

Se anche $\vec{v_C} = cost \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$

Quindi il sistema isolato può muoversi ruotando con $\vec{w} = cost$ attorno ad un asse baricentrale che può traslare con $\vec{v}_c = \text{cost}$ (asse libero di rotazione o asse centrale di inerzia)

Se un asse è asse di simmetria per un corpo è anche asse libero di rotazione.



asse di rotazione

Se una massa m_o viene applicata alla superficie del corpo (originariamente simmetrico) altera la simmetria

Originariamente $\vec{P}_c = I_c \cdot \vec{w}$

la massa m_o ha mom. della q.d.m.

$$\vec{P}_o = \vec{r}_o \times m_o \vec{v}_o = \vec{r}_o \times \hat{v}_o \, m_o w \, r_o \sin\alpha$$

$\vec{P}_c' = \vec{P}_c + \vec{P}_o$ non più parallelo ad $\vec{w}$

quindi $\frac{d\vec{P}_c'}{dt} \neq 0$ (per mantenere il sistema in rotazione rispetto all'asse passante per il baricentro: servono forze esterne!)

Proiettando $\vec{P}_c'$ sull'asse di rotazione

$$\left(\vec{P}_c'\right)_w = I_c w + \left(r_o \cdot m_o \cdot w \cdot r_o \sin\alpha\right)\sin\alpha =$$

$$= \left(I_c + m_o a^2\right) w = I_c' \, w$$

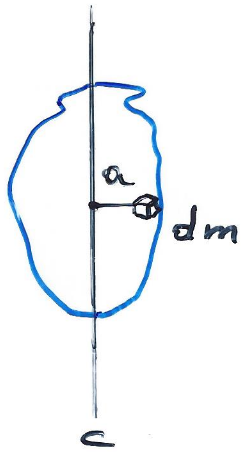
MOMENTO ANGOLARE ASSIALE RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZ. $\hat{c}$

Le forze esterne dovranno quindi permettere di mantenere $\vec{w}$ e fornire $\vec{M}^e = \dot{\vec{P}}_c' = \frac{d\vec{P}_c'}{dt} = \vec{w} \times \vec{P}_c'$

Calcolo del momento d'inerzia

Vogliamo studiare le proprietà di un corpo (di massa M e volume V) relative alla rotazione.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse c è



$$I_c = \int dm\, a^2$$

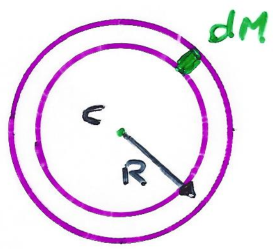
$$dm = \rho\, dV \qquad \rho = \text{densità} = \frac{M}{V}$$

$$I_c = \int \rho\, dV \cdot a^2$$

dV ed a contengono le stesse variabili !

La geometria del sistema decide volta per volta come fare l'integrale.

Calcoliamo I rispetto ad un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per C



Supponiamo che l'anello sia sottile (raggio interno = raggio esterno)

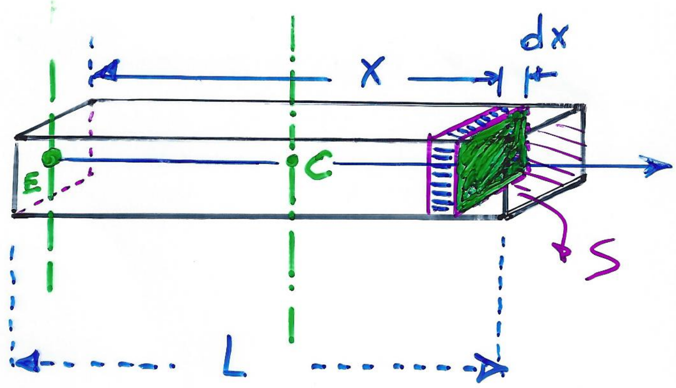
In tal modo

integrale su tutto il corpo

$$I_c = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

il raggio è costante eguale per tutti gli elementi infinitesimi dm

Sbarra omogenea



Calcoliamo il momento d'inerzia della sbarra rispetto ad un asse ortogonale alla sbarra passante per $E \Rightarrow I_E$ oppure passante per $C \Rightarrow I_C$

Supponiamo che la sbarra abbia sezione costante S e densità $\rho = \frac{M}{V} = \text{cost.}$

Conviene assumere l'elemento di massa

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx \cdot S$$

Rispetto all'asse passante per E

$$I_E = \int r^2 dm = \int_0^L x^2 \rho \, dx \, S = \int_0^L x^2 dx \, \frac{M}{L \cdot S} \cdot S$$

$$= \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{ML^2}{3}$$

densità lineare

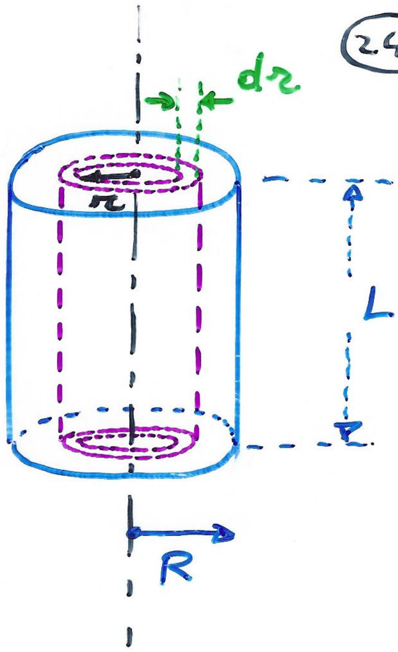
Rispetto all'asse passante per il baricentro $\Rightarrow -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ (origine dell'asse x nel centro)

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho \, dx \, S =$$

$$= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right)_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L} \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right) =$$

$$= \frac{ML^2}{12} \quad \text{DIVERSO!}$$

Cilindro omogeneo



Calcoliamo I rispetto all'asse del cilindro:

consideriamo come volume elementare il volume compreso fra due cilindri di raggio r e $r+dr$

$$0 < r < R$$

il volume $dV = \underbrace{2\pi r \cdot dr}_{\text{superficie della corona circolare}} \cdot L$

$$dm = \rho \cdot dV = 2\pi r \cdot dr \cdot L \cdot \rho$$

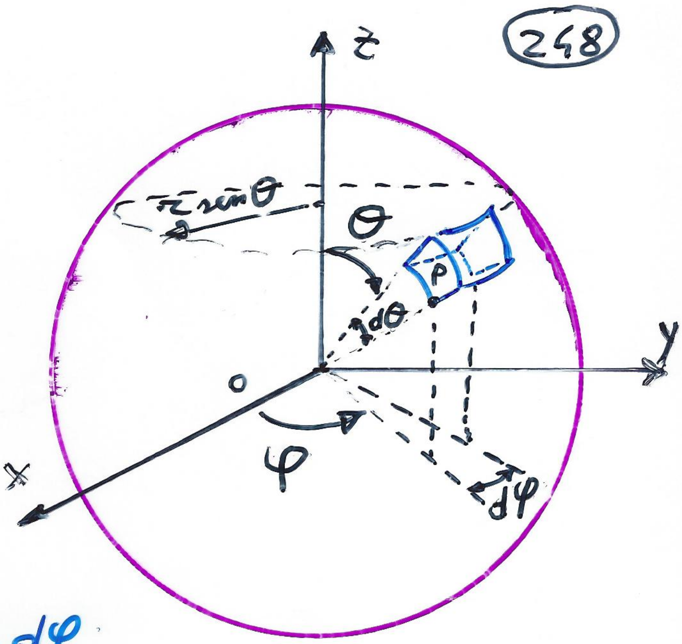
$$I = \int_0^R r^2 \, dm = \int_0^R 2\pi\rho L \cdot r^3 \, dr =$$

$$= 2\pi\rho \cdot L \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi\rho L \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R =$$

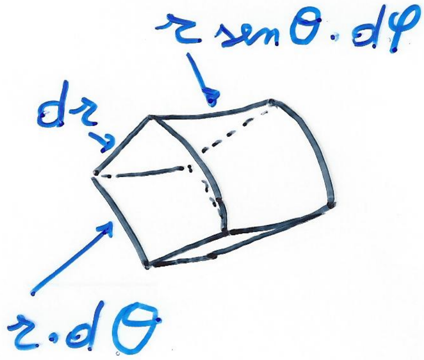
$$= 2\pi\rho L \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\pi R^2}_{\text{sup. di base}} \cdot L}_{V = \pi R^2 \cdot L} \cdot \rho}_{M = \rho \cdot V} \cdot R^2$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

I = momento d'inerzia per una sfera per un asse passante per il centro



dV = volume dell'elemento infinitesimo con lati



$$I = \int (r \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot dm$$

$$dm = \rho \cdot dV$$

$$dV = r\,d\theta \cdot r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi \cdot dr = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

con $0 \leq r \leq R$

$0 \leq \theta \leq 180°$ $\quad (0, \pi)$

$0 \leq \varphi \leq 360°$ $\quad (0, 2\pi)$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} (r \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot \rho \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= \rho \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^4 \operatorname{sen}^3\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

integro su φ $\quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$

$$I = 2\pi\rho \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\, dr$$

integro su $\theta \Rightarrow \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$

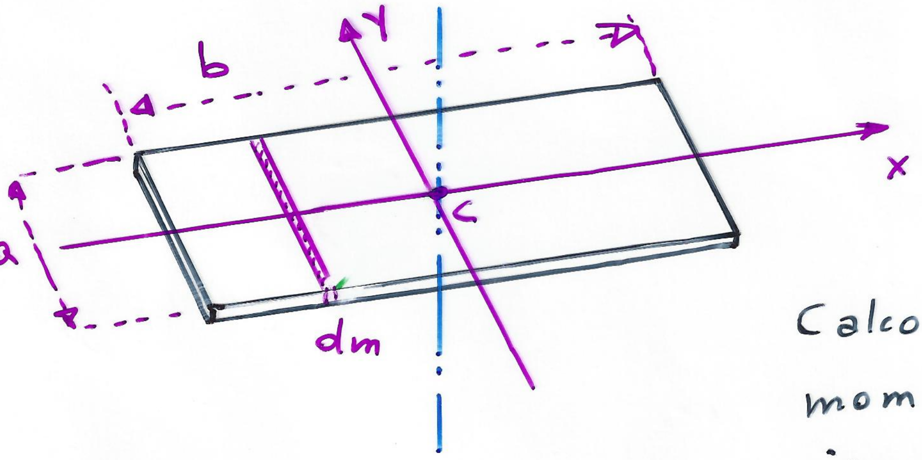
$$= \frac{4}{3}$$

$$I = 2\pi\rho \cdot \frac{4}{3} \int_0^R r^4 \, dr = 2\pi\rho \cdot \frac{4}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$= 2\pi\rho \, \frac{4}{3} \, \frac{R^5}{5} = \underbrace{\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V} \cdot \rho}_{M} \cdot \frac{2}{5} R^2$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Piastra sottile rettangolare



Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse y e rispetto all'asse perp. ad x, y, passante per C

RISPETTO ALL'ASSE Y:

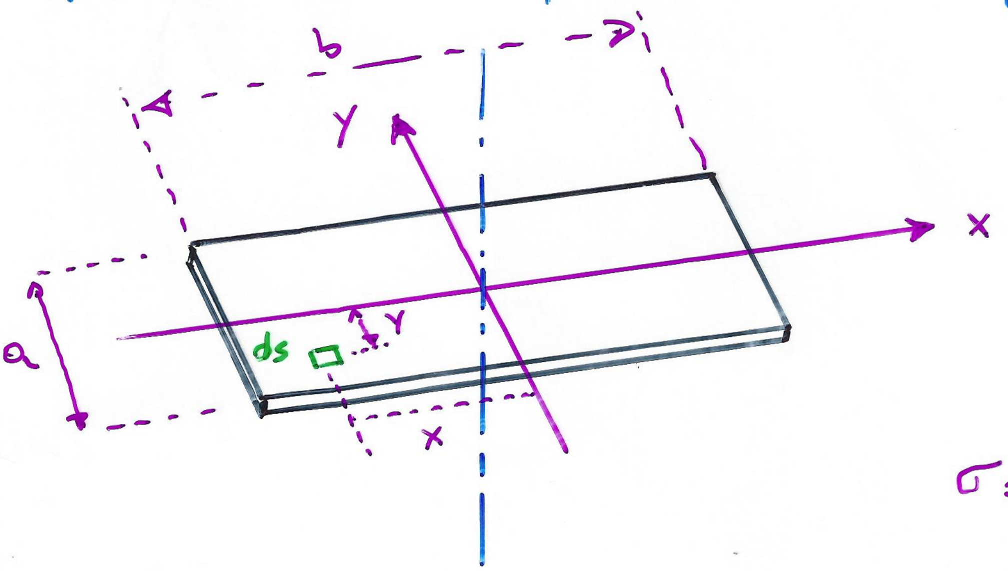
$$\sigma = \frac{M}{S} = \text{densità superficiale} = \frac{M}{a \cdot b}$$

$$dm = a \cdot dx \cdot \sigma$$

$$I_y = \int r^2 \, dm = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma a \, dx \cdot x^2 = \sigma a \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_y = \sigma a \left[\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right] = \frac{\sigma a b^3}{12} = \frac{M b^2}{12}$$

Rispetto all'asse perpendicolare passante per C



$$ds = dx \cdot dy$$

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

$$dm = \sigma \cdot dx \cdot dy$$

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

$$I = \int r^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2)\, \rho \, dx\, dy$$

$$= \rho \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} x^2 dx\, dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} y^2 dx\, dy \right]$$

$$= \rho \left[\left[y \right]_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx + \left[x \right]_{-b/2}^{b/2} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \right] =$$

$$= \rho \left[a \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} + b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \right] =$$

$$= \rho \left[a \cdot \frac{b^3}{12} + b \frac{a^3}{12} \right] = \rho \cdot \frac{a \cdot b}{12} \left[a^2 + b^2 \right] =$$

$$= \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$$