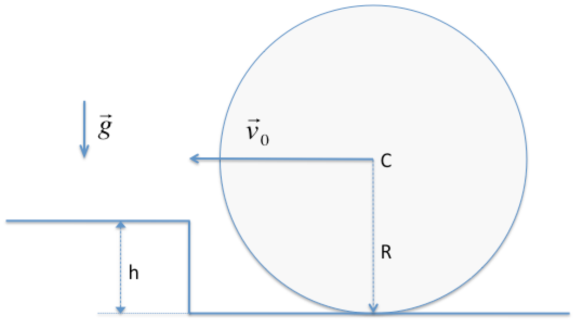
Esercizio 3. Una palla sferica di raggio R ha la sua massa m concentrata uniformemente sulla superficie, in maniera tale che il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro C sia dato dalla relazione: $I_C = \frac{2}{3}mR^2$.

La palla rotola senza strisciare su un piano orizzontale ed il suo centro si muove con velocità costante v_0 . Ad un certo istante la palla urta contro un gradino di altezza h il cui spigolo è ortogonale alla direzione della palla stessa (si veda la figura). Nell'ipotesi che nell'urto si annulli la velocità del punto della palla che tocca il gradino, e che quindi la sfera ruoti attorno al punto di contatto con lo spigolo, si calcoli:



a) la variazione di energia cinetica nell'urto;
b) il valore minimo della velocità iniziale v_0 del centro della palla affinché essa salga sopra il gradino.

R = 10 cm ; m = 0.5 kg ; h = 6.0 cm ; v_0 = 1.8 m/s .

Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto allo spigolo.

Prima dell'urto $P_0 = mv_0(R-h) + I_C\omega_0 = mv_0(R-h) + \frac{2}{3}mR^2\frac{v_0}{R} = mv_0(\frac{5}{3}R-h)$; dopo l'urto la palla ruota attorno allo spigolo del gradino, il momento della quantità di moto $P_f = (I_C + mR^2)\omega_f = \frac{5}{3}mRv_f$. Dalla eguaglianza $P_f = P_0$ si ricava $v_f = v_0(1-\frac{3}{5}\frac{h}{R})$=0.64 v_0 e quindi $\omega_f = 0.64\ \omega_0$.

a) Possiamo ora calcolare la variazione di energia cinetica: prima dell'urto $K_0 = \frac{1}{2}(I_C + mR^2)\omega_0^2 = \frac{5}{6}mR^2\omega_0^2$, dopo l'urto $K_f = \frac{1}{2}(I_C + mR^2)\omega_f^2 = \frac{5}{6}mR^2\omega_f^2$; quindi la variazione di energia cinetica
$\Delta K = K_0 - K_f = \frac{5}{6}mR^2(\omega_0^2 - \omega_f^2) = \frac{5}{6}mR^2\omega_0^2(1-0.64^2) = \frac{5}{6}m\cdot 0.59\cdot v_0^2$= 0.80 J.
b) La palla quindi dopo l'urto inizia a ruotare attorno allo spigolo. La palla riuscirà a "salire sul gradino" se l'energia cinetica dopo l'urto (K_f) sarà sufficiente a far variare l'energia potenziale della palla di mgh: $K_f = \frac{5}{6}mv_f^2 = \frac{5}{6}m(0.64v_0)^2 > mgh$. Da questa relazione possiamo ricavare il minimo valore di v_0 che permette alla palla di salire sullo scalino:
$v_0^{min} = \sqrt{\frac{6}{5\cdot(0.64)^2}gh}$ = 1.3 m/s.