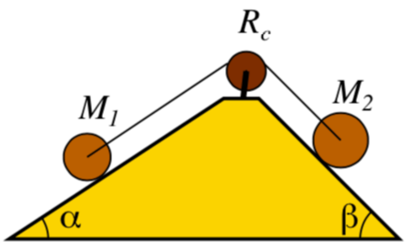
Problema 4: Si consideri il sistema in figura formato da due cilindri omogenei di massa M_1 ed M_2 connessi da una corda inestensibile e di massa trascurabile, posti su un cuneo di angoli α e β vincolato ad un piano orizzontale. La corda agisce sugli assi dei cilindri e passa su una carrucola di raggio R_c e momento d'inerzia I_c rispetto al suo asse. La carrucola è tale che i due tratti di corda sono paralleli ai lati del cuneo. Al tempo $t = 0$ il sistema è fermo e quindi viene lasciato libero di muoversi. Si assuma che i cilindri rotolino senza strisciare (rotolamento perfetto) e che la corda non scivoli sulla carrucola.



(a) Si calcolino le velocità dei due cilindri quando la quota del cilindro di massa M_1 è diminuita di h. (b) Si calcoli l'accelerazione del centro di massa del cilindro M_2 durante il moto. (c) Si calcolino le forze che la corda applica ai due cilindri durante il moto. (d) Si calcolino le forze d'attrito tra i due cilindri ed il cuneo.

Valori numerici: $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $M_1 = 780$ g, $M_2 = 310$ g, $R_c = 7.0$ cm, $I_c = 0.0011$ kg·m^2, $h = 13.6$ cm.

<u>Soluzione</u>

a) Prendiamo un sistema di riferimento per la massa M_1 tale che $v > 0$ se il cilindro scende. Analogamente scegliamo un sistema di riferimento per la massa M_2 tale che $v > 0$ se il cilindro sale. Con questa scelta, durante il moto entrambi i cilindri hanno la stessa velocità v. Dato che la corda non scivola sulla carrucola, la velocità dei punti sul bordo della carrucola è pari a v per cui la carrucola ruota con velocità angolare

$$\omega_c = v/R_c.$$

Consideriamo ora il cilindro di massa M_1. La sua energia cinetica è pari a

$$K_1 = \frac{1}{2}M_1 v^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2,$$

dove $I_1 = M_1 R_1^2/2$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse, R_1 è il raggio del cilindro e ω_1 la velocità di rotazione del cilindro. Per la condizione di rotolamento perfetto $v = \omega_1 R$. Quindi

$$K_1 = \frac{3}{4}M_1 v^2.$$

Con lo stesso ragionamento si ricava

$$K_2 = \frac{3}{4}M_2 v^2.$$

Infine l'energia cinetica della carrucola è pari a

$$K_c = \frac{1}{2}I_c\omega_c^2 = \frac{1}{2R_c^2}I_c v^2.$$

Per calcolare la velocità utilizziamo il principio di conservazione dell'energia meccanica. Dobbiamo quindi innanzitutto calcolare di quanto si sposta il cilindro di massa M_2 quando l'altro scende di una quota h. Per scendere di una quota h, il cilindro di massa M_1 deve percorrere una distanza (verso il basso)

$$d = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Il cilindro di massa M_2 percorre quindi una distanza d verso l'alto e quindi la sua quota aumenta di

$$h_2 = d \sin\beta = h \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \begin{cases} 19.2\,\mathrm{cm} & \text{Compito A,} \\ 19.1\,\mathrm{cm} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

La variazione di energia potenziale gravitazionale è quindi

$$U_f - U_i = M_2 g h_2 - M_1 g h.$$

Dato che $K_i = 0$ la conservazione dell'energia implica

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad \Rightarrow \quad K_f = U_i - U_f.$$

Dato che

$$K_f = \frac{3}{4} M_1 v^2 + \frac{3}{4} M_2 v^2 + \frac{1}{2R_c^2} I_c v^2,$$

abbiamo

$$v = \sqrt{\frac{M_1 g h - M_2 g h_2}{3(M_1 + M_2)/4 + I_c/(2R_c^2)}}.$$

Numericamente

$$v = \begin{cases} 0.70\,\mathrm{m/s} & \text{Compito A,} \\ 0.90\,\mathrm{m/s} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

b) Indichiamo rispettivamente con T_1 e T_2 la tensione della corda tra M_1 e la carrucola e tra la carrucola ed M_2. Se a è l'accelerazione dei due cilindri (uguale con le convenzioni prese prima), la II equazione cardinale rispetto al punto di contatto dà

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{cont},1} \alpha_1 &= (M_1 g \sin\alpha - T_1) R_1, \\ I_{\mathrm{cont},2} \alpha_2 &= (-M_2 g \sin\beta + T_2) R_2, \end{aligned}$$

dove $\alpha_1 = a/R_1$ e $\alpha_2 = a/R_2$ sono le accelerazioni angolari (positive per rotazioni antiorarie). Dato che il momento d'inerzia di un cilindro rispetto al punto di contatto è $I_{\mathrm{cont}} = 3MR^2/2$ (Huygens-Steiner) otteniamo le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} M_1 a &= M_1 g \sin\alpha - T_1, \\ \frac{3}{2} M_2 a &= -M_2 g \sin\beta + T_2. \end{aligned}$$

Esse permettono di ricavare le tensioni

$$T_1 = -\frac{3}{2} M_1 a + M_1 g \sin\alpha, \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{3}{2} M_2 a + M_2 g \sin\beta. \tag{6}$$

Infine consideriamo la carrucola. Se $\alpha_c = a/R_c$ è l'accelerazione angolare ($\alpha_c > 0$ per rotazioni antiorarie) la II equazione cardinale fornisce

$$I_c \alpha_c = (T_1 - T_2) R_c \qquad \Rightarrow \frac{I_c}{R_c^2} a = T_1 - T_2.$$

Sostituendo (5) e (6) otteniamo

$$a = \frac{(M_1 \sin\alpha - M_2 \sin\beta)g}{3(M_1 + M_2)/2 + I_c/R_c^2}$$

Numericamente otteniamo

$$a = \begin{cases} 0.90\,\mathrm{m/s^2} & \text{Compito A,} \\ 1.50\,\mathrm{m/s^2} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

L'accelerazione può essere derivata in modo più rapido dall'energia. Se la massa M_1 percorre un tratto x verso il basso la sua quota diminuisce di $\Delta_1 = x \sin\alpha$, mentre quella della massa M_2 cresce di $\Delta_2 = x \sin\beta$. Quindi l'energia meccanica si può scrivere come

$$E_{\text{mecc}} = \frac{3}{4} M_1 v^2 + \frac{3}{4} M_2 v^2 + \frac{1}{2R_c^2} I_c v^2 - M_1 g x \sin\alpha + M_2 g x \sin\beta,$$

ossia

$$E_{\text{mecc}} = \frac{1}{2}\left[\frac{3(M_1 + M_2)}{2} + \frac{I_c}{R_c^2}\right] v^2 - (M_1 \sin\alpha - M_2 \sin\beta) g x.$$

L'energia meccanica si conserva: la sua derivata rispetto al tempo è quindi nulla. Ne segue che

$$\left[\frac{3(M_1 + M_2)}{2} + \frac{I_c}{R_c^2}\right] v a - (M_1 \sin\alpha - M_2 \sin\beta) g v = 0.$$

Questa equazione permette di ricavare a. Si riottiene la formula di sopra.
È possibile rispondere alla domanda a) utilizzando la cinematica ed il valore calcolato per a. Infatti, si tratta di un moto uniformemente accelerato, in cui si chiede la velocità dopo aver percorso una distanza $d = h/\sin\alpha$ (partenza da fermo). Quindi

$$v = \sqrt{2da}$$

Il risultato è equivalente a quello già trovato.
c) Le tensioni si ricavano da (5) e (6). Si ottiene

$$T_1 = \begin{cases} 2.77\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 2.60\,\mathrm{N} & \text{Compito B,} \end{cases} \qquad T_2 = \begin{cases} 2.57\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 1.93\,\mathrm{N} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

d) Per il calcolo della forza d'attrito, utilizziamo la II equazione cardinale rispetto all'asse. Abbiamo

$$I_1 \alpha_1 = F_{1a} R_1 \qquad F_{1a} = \frac{1}{2} M_1 a,$$

$$I_2 \alpha_2 = F_{2a} R_2 \qquad F_{2a} = \frac{1}{2} M_2 a,$$

dove abbiamo utilizzato la condizione di rotolamento perfetto e $I = MR^2/2$ per il momento d'inerzia di un cilindro rispetto al suo asse. Quindi otteniamo

$$F_{1a} = \begin{cases} 0.35\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 0.74\,\mathrm{N} & \text{Compito B,} \end{cases} \qquad F_{2a} = \begin{cases} 0.14\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 0.16\,\mathrm{N} & \text{Compito B.} \end{cases}$$