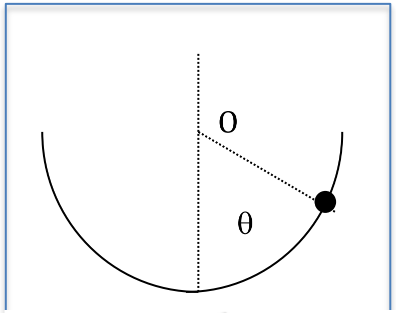
Nota sul momento delle forze e la variazione del momento angolare.

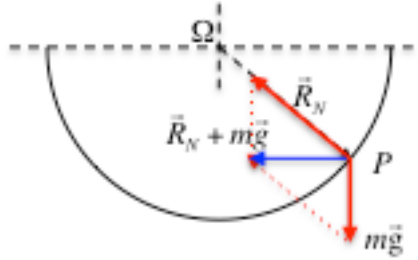
Riprendiamo in esame un esercizio già risolto:



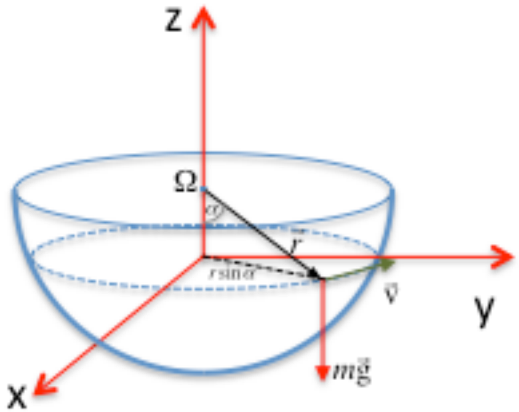
Una pallina di massa m e dimensioni trascurabili può scorrere senza attrito sulla parete interna di una semisfera di raggio r = 15 cm. Nell'istante iniziale, la pallina ha una velocità orizzontale e tangente alla parete e la sua posizione è definita da un angolo θ_0 = 0.60 rad con l'asse verticale, come indicato in figura. Si determini:

1. il valore v_0 della velocità iniziale per il quale la pallina non varia la sua quota durante il moto;
2. il momento risultante $\boldsymbol{M}$, rispetto al centro O della semisfera, delle forze che agiscono sulla pallina nel corso del moto in funzione dell'angolo θ;

per fare alcune considerazioni sul momento delle forze e la variazione/conservazione del momento angolare.



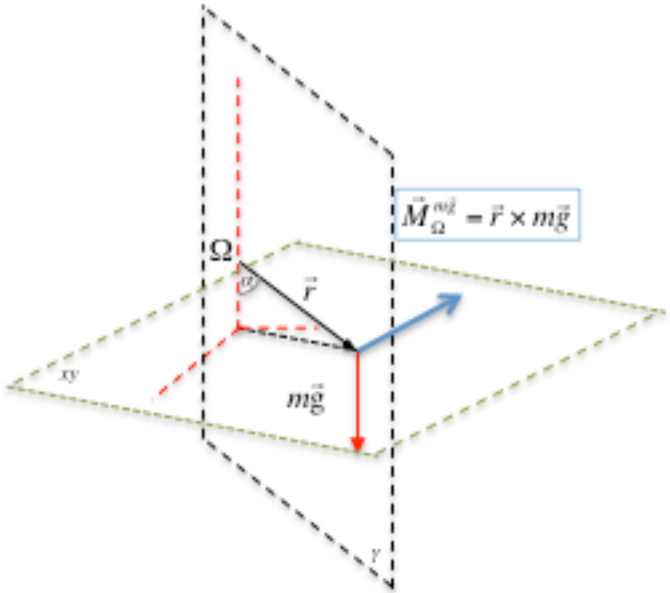
Abbiamo visto che la pallina è soggetta alla reazione vincolare ed alla forza peso e che il punto 1) è soddisfatto se la somma delle due forze risulta essere orizzontale.
La reazione vincolare è sempre diretta verso il punto Ω non essendoci attrito è sempre normale alla superficie) quindi se calcoliamo i momenti rispetto al punto Ω $\vec{M}_\Omega^{R_N} = \overline{\Omega P} \times \vec{R}_N = 0$.
Possiamo ora calcolare il momento, ancora rispetto ad Ω, della forza peso che nel sistema di riferimento inerziale scelto in figura ha componenti $m\vec{g} \equiv (0,0,-mg)$.



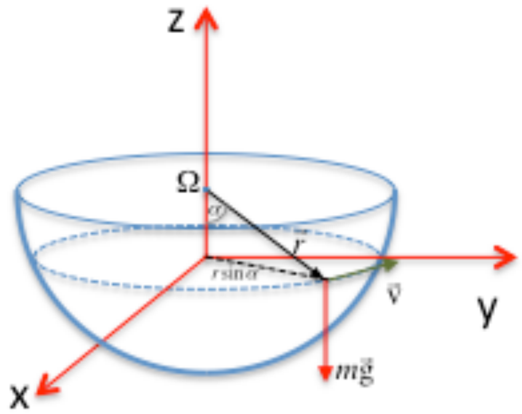
Vogliamo calcolare $\vec{M}_\Omega^{mg} = \overline{\Omega P} \times m\vec{g} = \vec{r} \times m\vec{g}$.

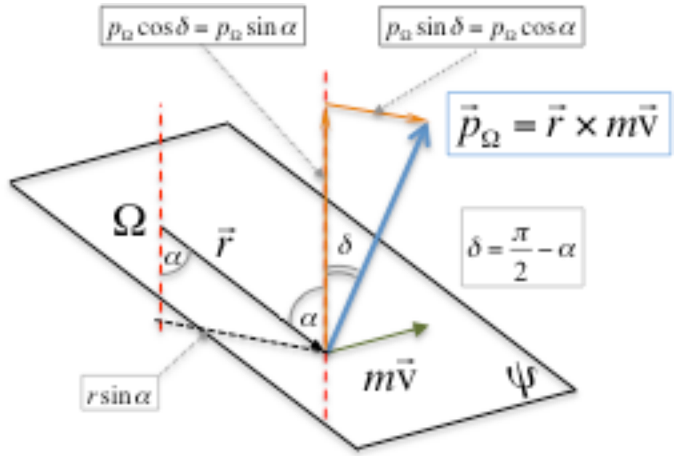
$$\vec{M}_\Omega^{mg} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ 0 & 0 & -mg \end{bmatrix} = -\hat{\imath} r_y mg + \hat{\jmath} r_x mg,$$ cioè il

momento della forza peso giace sul piano xy e non ha componenti lungo l'asse z, ed ha come modulo $\left|\vec{M}_\Omega^{mg}\right| = rmg sin\alpha$



Nota sul momento delle forze e la variazione del momento angolare.



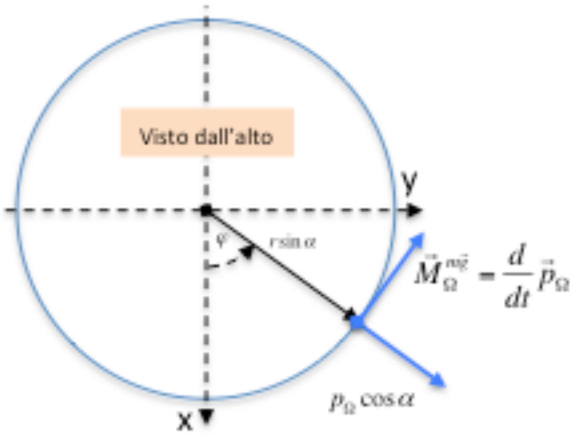


Vediamo ora come è diretto il momento della quantità di moto (o momento angolare) calcolato rispetto al polo Ω.

$$\vec{p}_\Omega = \overline{\Omega P} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Tale vettore risulta essere ortogonale al piano ψ che contiene sia $\vec{r}$ che $\vec{v}$.

Il vettore $\vec{p}_\Omega$ può essere scomposto in un vettore verticale, di modulo $|\vec{p}_\Omega| cos\delta$, ed un vettore giacente sul piano xy di modulo $|\vec{p}_\Omega| sin\delta$,



Come si può evincere facilmente dalla figura a destra, essendo $\vec{p}_\Omega$ sempre ortogonale ad $\vec{r}$, l'angolo $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e quindi possiamo scrivere

- **componente verticale** di $\vec{p}_\Omega$ ha modulo $\boldsymbol{|\vec{p}_\Omega| sin\alpha = r\, m\, v\, sin\alpha}$
- **componente orizzontale** di $\vec{p}_\Omega$ ha modulo $\boldsymbol{|\vec{p}_\Omega| cos\alpha = r\, m\, v\, cos\alpha}$.

Se infatti $\boldsymbol{\varphi}$ è l'angolo compreso fra l'asse x ed il segmento $r sin\alpha$ le componenti cartesiane di $\vec{v}$ sono $\vec{v} = -\hat{\imath} v sen\varphi + \hat{\jmath} v cos\varphi$ per cui possiamo esprimere il momento della quantità di moto con

$$\vec{p}_\Omega = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r\, sin\alpha\, cos\varphi & r\, sin\alpha\, sin\varphi & -r\, cos\alpha \\ -mv\, sin\varphi & vm cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = \hat{\imath} rmv\, cos\alpha\, cos\varphi + \hat{\jmath} rmv\, cos\alpha\, sin\varphi + \hat{k}\, mvr\, (sin\alpha\, cos^2\varphi + sin\alpha\, sin^2\varphi) = \vec{p}_\Omega^{xy} + \hat{k}\, mvrsin\alpha$$

dove $\vec{p}_\Omega^{xy}$ è la **componente orizzontale** del momento angolare con modulo $|\vec{p}_\Omega^{xy}| = rmv\, cos\alpha \sqrt{cos^2\varphi + sin\varphi} = \boldsymbol{rmv\, cos\alpha}$

La componente orizzontale è sempre diretta dall'asse verticale verso l'esterno della traiettoria e ruota con la stessa velocità

Nota sul momento delle forze e la variazione del momento angolare.

angolare con cui ruota la pallina.

E' da notare che se avessimo scomposto il vettore $\vec{r}$ nelle due componenti $-r\ cos\alpha\ \hat{k}$ (verticale) e la componente orizzontale (giacente sul piano xy) con modulo $r\ sin\alpha$ avremmo ottenuto esattamente gli stessi risultati.

Ora ricordiamo che il momento delle forze è responsabile della variazione del momento angolare: $\vec{M}_\Omega = \frac{d\vec{P}_\Omega}{dt}$ (sappiamo che Ω è fisso e quindi il termine $\vec{v}_\Omega \times m\vec{v} = 0$).

Visto che $\boldsymbol{\vec{M}_\Omega^{mg}}$ **non ha componente lungo l'asse z** possiamo dedurre che **la variazione del momento angolare lungo l'asse z è nulla**, cioè **la componente verticale del momento angolare** $\boldsymbol{|\vec{p}_\Omega| sin\alpha = r\ m\ v\ sin\alpha}$ **= costante**

Di fatto, essendo il momento $\vec{M}_\Omega$ sempre perpendicolare alla componente orizzontale del momento angolare ($rmv\ cos\alpha$), non può modificare il modulo di tale componente, può solo modificarne la direzione, la fa ruotare nel piano orizzontale.