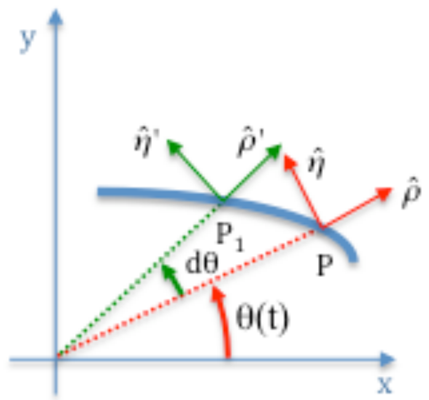
## Moto piano in coordinate polari

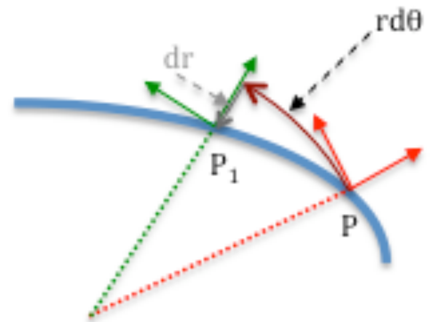



Prendiamo in esame il moto di un punto materiale su un piano. In ogni istante la posizione può essere espressa tramite le sue coordinate cartesiane P≡($P_x$, $P_y$) oppure tramite le coordinate polari P≡(r, θ) dove:

r = "raggio vettore" = distanza dall'origine del Sistema di Riferimento,

θ = "anomalia" = angolo fra il raggio vettore e l'asse delle x. Tale angolo si considera crescente se durante il moto la rotazione del raggio vettore avviene in senso antiorario

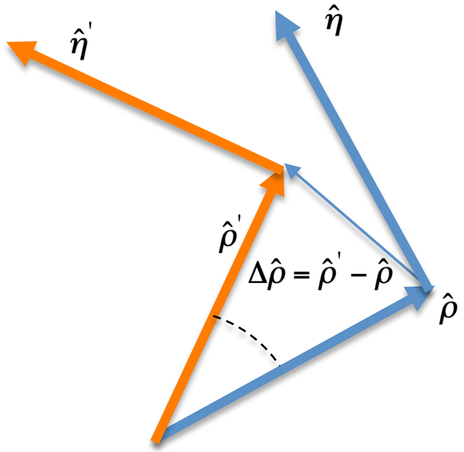
Ovviamente è possibile passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari, e viceversa, tramite semplici relazioni x= r cosθ , y= r sinθ




Se il punto è in moto, supponiamo si sposti dalla posizione P≡(r, θ) a $P_1$≡(r+dr, θ+dθ), lo spostamento elementare $\overline{PP_1}$ può essere approssimato dalla somma fra l'arco rdθ (spostamento che il punto avrebbe se il raggio vettore mantenesse la sua lunghezza ruotando di un angolo dθ) e la variazione del raggio vettore dr (indipendentemente dalla rotazione del raggio vettore) (si veda la figura a fianco): $\overline{PP_1} = r\,d\theta\,\hat{\eta} + dr\hat{\rho}$.

Ad un analogo risultato si può arrivare esprimendo la variazione della posizione $\overline{PP_1}$ mediante la $\overline{PP_1} = d(\overline{OP}) = \frac{d(\overline{OP})}{dt}dt = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \frac{d(r\hat{\rho})}{dt}dt = \left(\frac{dr}{dt}\hat{\rho} + r\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right)dt$, quindi ricordando che $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}$ si ottiene $\overline{PP_1} = \left(\frac{dr}{dt}\hat{\rho} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}\right)dt$.

La velocità del punto materiale quindi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\hat{\rho} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}\right) = v_r\hat{\rho} + v_\theta\hat{\eta}$ è la somma di una "velocità radiale" $v_r = \frac{dr}{dt}\hat{\rho}$ ed una "velocità tangenziale" $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}$.

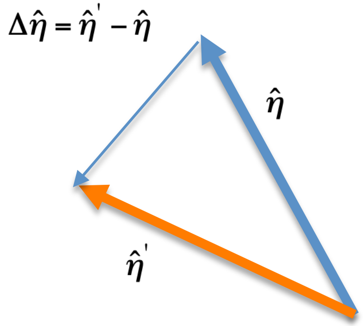



In generale durante il moto possono variare tutte le quantità fino ad ora utilizzate per descrivere la posizione e la velocità: r=r(t), θ=θ(t), ed anche $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$, $\hat{\eta} = \hat{\eta}(t)$.
Possiamo ora esprimere l'accelerazione del punto materiale derivando l'espressione della velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{\rho} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\rho} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\eta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\eta}}{dt}$$

Ricordiamo ora che (si faccia riferimento alla figura a fianco) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\rho}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\hat{\rho}}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\eta} \\ \dfrac{d\hat{\eta}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\hat{\eta}}{\Delta t} = -\dfrac{d\theta}{dt}\hat{\rho} \end{cases}$$




per cui sostituendo nell'espressione dell'accelerazione abbiamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\rho} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\eta} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2(-\hat{\rho}) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{\rho} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\eta}$$

possiamo quindi riconoscere nel vettore accelerazione una componente "radiale":

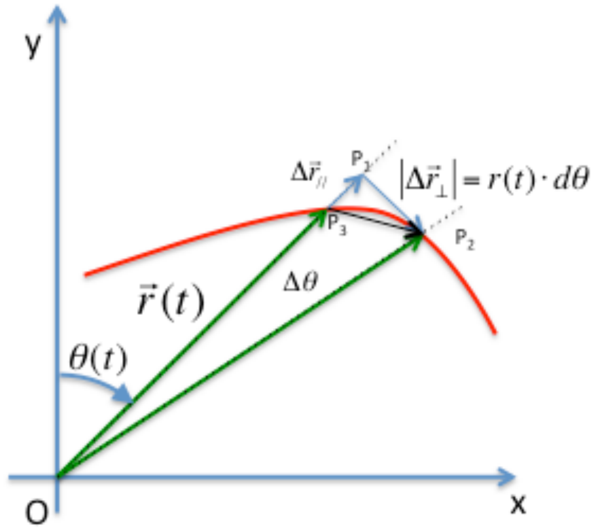
$$\vec{a}_r = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{\rho},$$ che nel caso del moto circolare uniforme (r=cost) si riduce ad $$\vec{a}_r\Big|_{r=\cos t} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\rho} = -r\omega^2\hat{\rho}$$

ed una componente "tangenziale":

$$\vec{a}_{\theta=}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\eta}$$

Utilizziamo ora l'espressione ottenuta per l'accelerazione "tangenziale" per capire che caratteristiche ha un moto per il quale

$$\vec{a}_{\theta=}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\eta}=0$$




Abbiamo cioè $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$ $\quad \frac{d\theta}{dt}=\omega$ e quindi

$2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow 2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} = 0$ che comporta che la quantità $r^2\omega$=costante.
Infatti porre $\frac{d}{dt}(r^2\omega) = 0$ implica $2r\frac{dr}{dt}\omega + r^2\frac{d\omega}{dt} = 0 = r(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt})$.
Scartando la soluzione banale $r = 0$ si vede che assumere $a_\theta = 0$ comporta $r^2\omega = cost$. Vediamo di interpretare ulteriormente tale risultato.

Dalla figura possiamo vedere che l'area contenuta fra i vettori $\vec{r}(t)$ ed $\vec{r}(t+\Delta t)$ e la traiettoria è approssimabile con l'area compresa nel triangolo $OP_1P_2$. Tale area a meno di infinitesimi di ordine superiore[1] è data da $\frac{1}{2}2r(t)\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) * r(t) = r^2(t)\frac{\Delta\theta}{2}$.

La velocità di variazione dell'area nel tempo $\Delta t$ è data da $\frac{r^2(t)\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t}$.
Possiamo calcolare la "velocità areolare istantanea" come

$$\mathrm{Lim}_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{r^2(t)\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = 2\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{r^2(t)\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 2r^2(t)\omega.$$

Imponendo quindi la condizione di accelerazione tangenziale nulla si ottiene che la "velocità areolare" è costante.

---

[1] In effetti l'area cha abbiamo calcolato stima per eccesso l'area racchiusa fra $r(t)$, $r(t+\Delta t)$ e l'arco di cerchio $P_2P_3$, per una stima migliore dovremmo sottrarre l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ che ha come lati $P_1P_2=2r(t)\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ e $P_2P_3\sim P_1P_2\sin\Delta\theta$ ottenendo un infinitesimo di ordine superiore che al tendere di $\Delta t$ a 0 tende a zero piu' rapidamente.