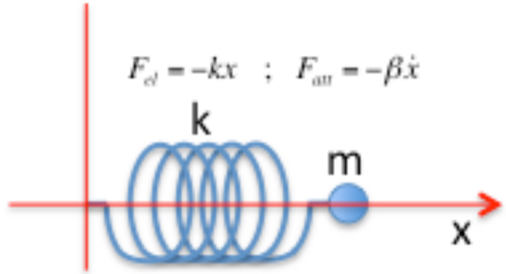
Moto oscillatorio smorzato e forzato



Prendiamo in esame il caso di un punto materiale di massa m connesso ad una molla di costante elastica k (e lunghezza a riposo nulla) in moto in un mezzo viscoso caratterizzato da un coefficiente di viscosità β. Il moto avviene solo lungo l'asse x e pertanto l'equazione vettoriale $\overrightarrow{F_{att}} + \overrightarrow{F_{el}} = m\vec{a}$, proiettata sull'asse x diventa $m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$. Possiamo quindi scrivere $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$, una equazione differenziale del II ordine omogenea ed a coefficienti costanti. Dobbiamo cercare la legge oraria del moto x(t), che soddisfa questa eq. diff.

Una funzione del tipo $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ soddisfa l'eq. diff. se $\lambda_{1,2}$ sono le soluzioni dell'equazione caratteristica associata $m\lambda^2 + \beta\dot{\lambda} + k = 0$: $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$.

Abbiamo tre casi distinti corrispondenti ai casi in cui il discriminante è positivo, nullo o negativo :

$$\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0\,, \qquad \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0\,, \qquad \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0\,.$$

Moto oscillatorio smorzato e forzato

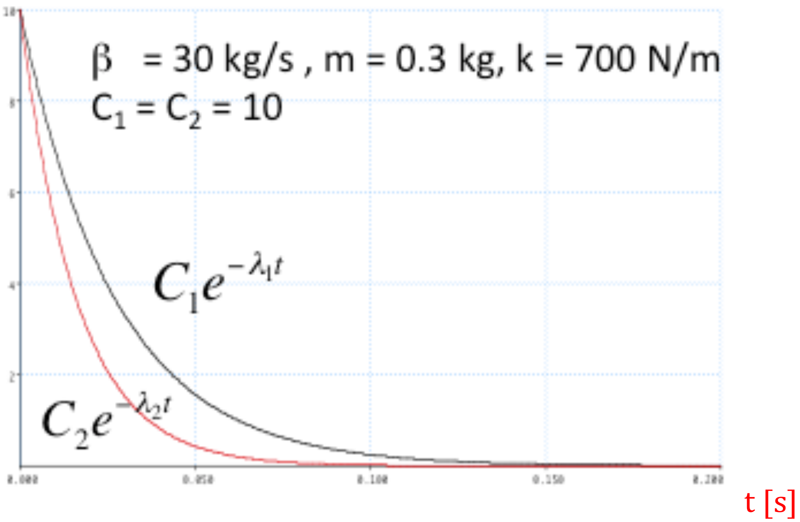
oscillatore sovra-smorzato: $\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0$

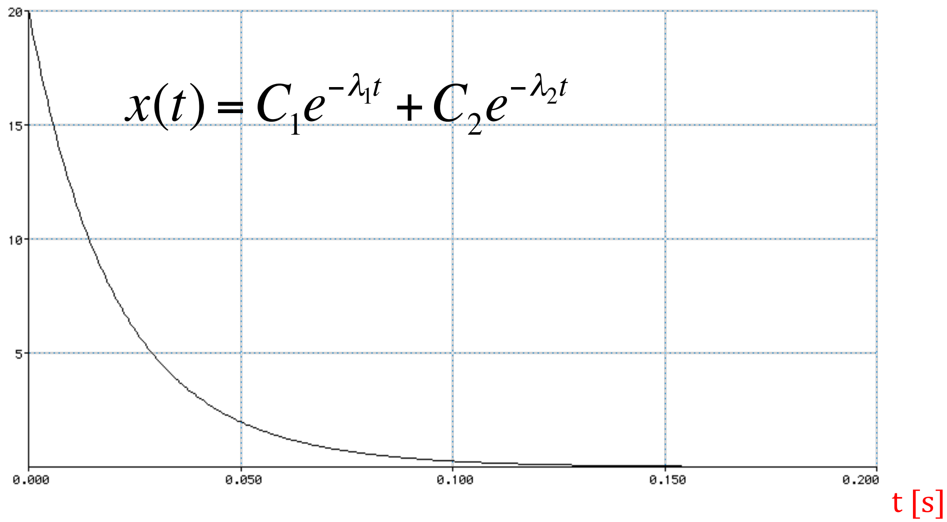
In tal caso abbiamo due soluzioni reali e distinte, $\lambda_{1,2}$, entrambe negative.

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Il moto della massa è quindi un veloce moto di avvicinamento ad x=0, caratterizzato dalla somma di due esponenziali negativi . Le costanti C_1 e C_2 vanno trovate imponendo le "condizioni al contorno" note.

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t}$$





oscillatore criticamente-smorzato: $\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$

In tal caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\beta}{2m}$ e se usassimo come soluzione dell'equazione differenziale quella già introdotta avremmo $x(t) = (C_1 + C_2)e^{\lambda t}$ ma ciò non sarebbe sufficiente in quanto la soluzione di una eq. diff. del II ordine deve essere espressa come somma di due funzioni indipendenti, ortogonali nello spazio delle funzioni soluzione. In tal caso si verifica facilmente che la soluzione può essere scritta come $x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2\, t\, e^{\lambda t} = (C_1 + C_2\, t\,)\, e^{\lambda t}$.

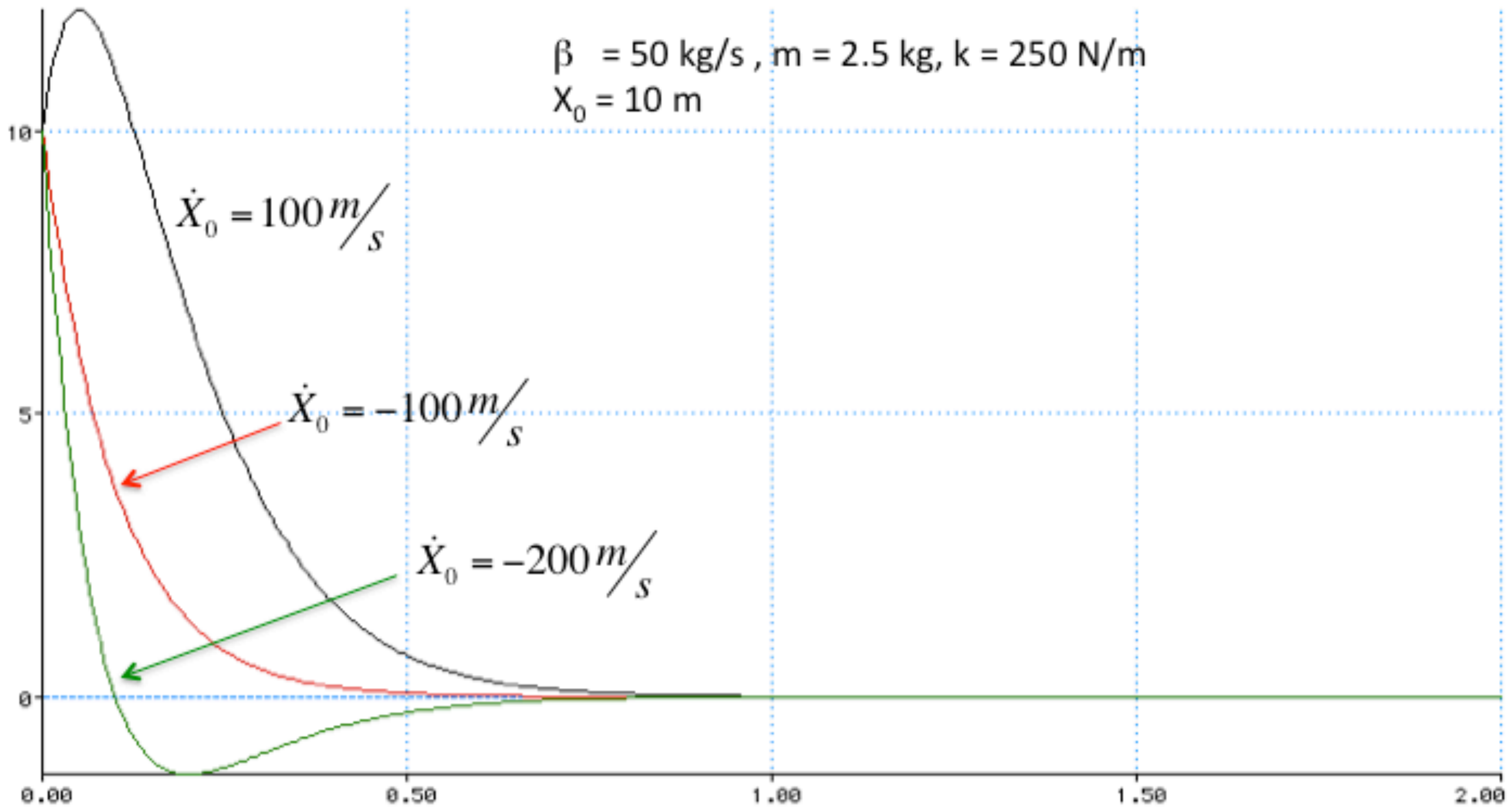
Le costanti C_1 e C_2 vanno trovate imponendo le "condizioni al contorno" note.

Supponiamo che per t=0 sia $x(t=0) = X_0 = C_1$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{X}_0$ (il punto materiale si muove con velocità iniziale $\dot{X}_0$ alla distanza C_1 dall'origine).

$\dot{x}(t) = \lambda C_1 e^{\lambda t} + \lambda C_2 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}$, al tempo t=0 $\dot{x}(0) = \dot{X}_0 = \lambda C_1 + C_2$ da cui $C_2 = \dot{X}_0 - \lambda X_0$.

La soluzione cercata è perciò data da: $x(t) = X_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t} + (\dot{X}_0 + \frac{\beta}{2m} X_0)\, t\, e^{-\frac{\beta}{2m}t}$.

Il modo in cui il punto materiale si avvicina ad x=0 (per t crescente l'esponenziale negativo predomina) dipende dal segno del termine tra parentesi. Se $\dot{X}_0 + \frac{\beta}{2m}X_0 \geq 0$ il punto si avvicina all'origine senza mai oltrepassarla. Se ad esempio $\dot{X}_0 < 0$ ed in valore assoluto è maggiore di $\frac{\beta}{2m}X_0$ il punto oltrepassa l'origine prima di avvicinarsi all'origine sempre con x negativa.



Moto oscillatorio smorzato e forzato

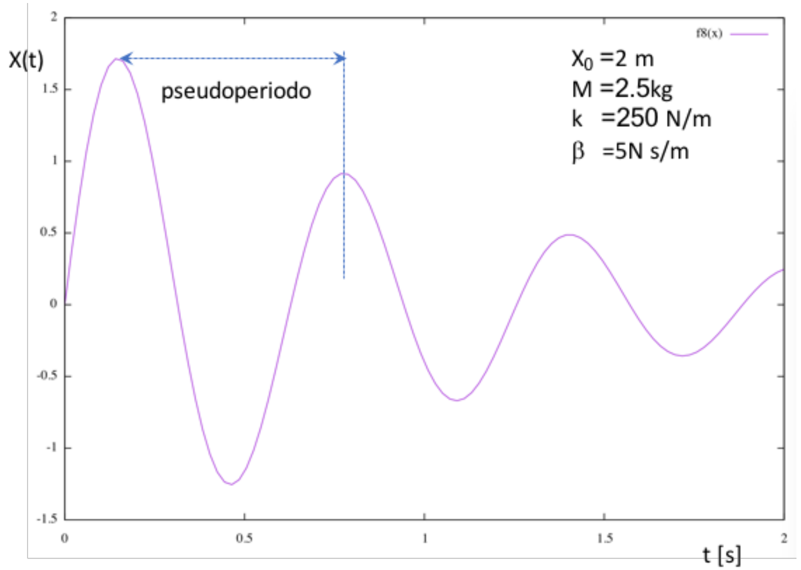
oscillatore sotto-smorzato $\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$

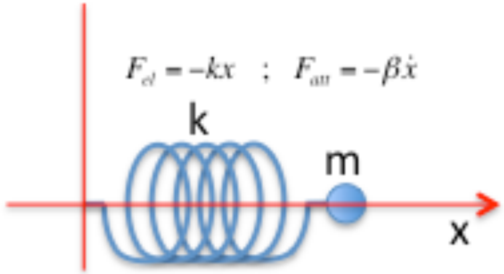
In tal caso ponendo $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}$ possiamo scrivere $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm i\omega$ e, con un procedimento analogo a quanto fatto per ottenere l'equazione del moto di un oscillatore non smorzato, possiamo scrivere

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}e^{-i\omega t} + Be^{-\frac{\beta}{2m}t}e^{+i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(Ae^{-i\omega t} + Be^{+i\omega t}\right)$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2m}t}X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$





Il moto oscillatorio forzato

Abbiamo nuovamente una massa m connessa ad una molla, in presenza di attrito viscoso. Abbiamo però anche una ulteriore forza $F = F_0 e^{i\Omega t}$ che agisce sulla massa.

Ricordando la formula di Eulero $e^{i\Omega t} = \cos\Omega t + i\sin\Omega t$ possiamo riscrivere la forza agente come $F_0 e^{i\Omega t} = F_0(\cos\Omega t + i\sin\Omega t)$.

Proiettando $\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$ sull'asse x abbiamo $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx + F_0 e^{i\Omega t}$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t}$$

L'equazione differenziale in questo caso è *non omogenea* ed ammette come soluzione (la funzione x(t) che descrive il moto) che è data dalla somma di due termini:

- il primo termine viene dalla soluzione dell'equazione differenziale omogenea (cioè $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$ discussa nelle pagine precedenti: abbiamo visto che per la presenza dell'attrito il termine $e^{-\frac{\beta}{2m}t}$ per tempi lunghi fornisce sempre $x(t_\infty)=0$)
- il secondo termine rappresenta una soluzione particolare della equazione non omogenea e può essere scritto ad esempio come $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$
  dove X_0 rappresenta l'ampiezza della oscillazione del sistema (per tempi lunghi, quando la risposta "transitoria" del sistema "smorzato" è ormai trascurabile).

Proviamo ad inserire questa soluzione nella equazione differenziale non omogenea e vediamo per quali condizioni la soluzione è valida

$$\dot{x}(t) = i\Omega X_0 e^{i\Omega t} \quad ; \quad \ddot{x}(t) = -\Omega^2 X_0 e^{i\Omega t}$$

sostituendo nella equazione differenziale da risolvere otteniamo:

$$-m\Omega^2 X_0 e^{i\Omega t} + i\beta\Omega X_0 e^{i\Omega t} + kX_0 e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

Si elimina il fattore comune $e^{i\Omega t}$ e si ottiene:

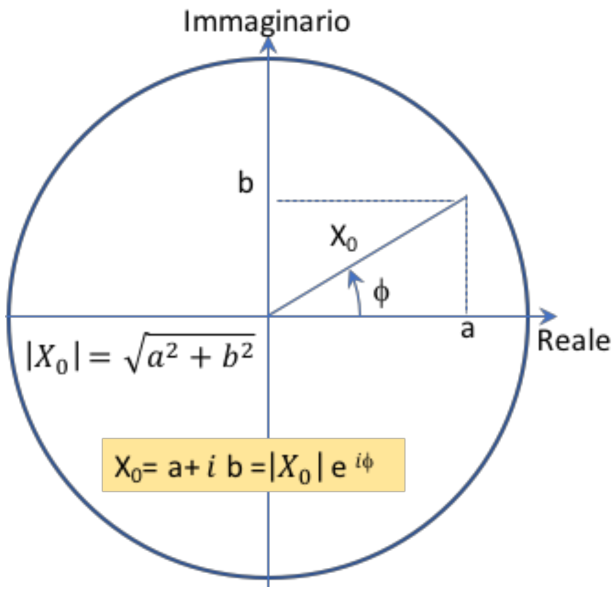
$$-m\Omega^2 X_0 + i\beta\Omega X_0 + kX_0 = F_0$$

dove X_0 , che ripetiamo rappresenta la "risposta" del sistema alla sollecitazione $F = F_0 e^{i\Omega t}$ è in generale un numero complesso (caratterizzato quindi da una ampiezza ed una fase:

$$X_0 = \frac{F_0}{k - m\Omega^2 + i\beta\Omega} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \Omega^2 + i\frac{\beta}{m}\Omega}$$

Possiamo ora definire $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsazione dell'oscillatore massa-molla in assenza di attrito e di forzante ed ottenere:

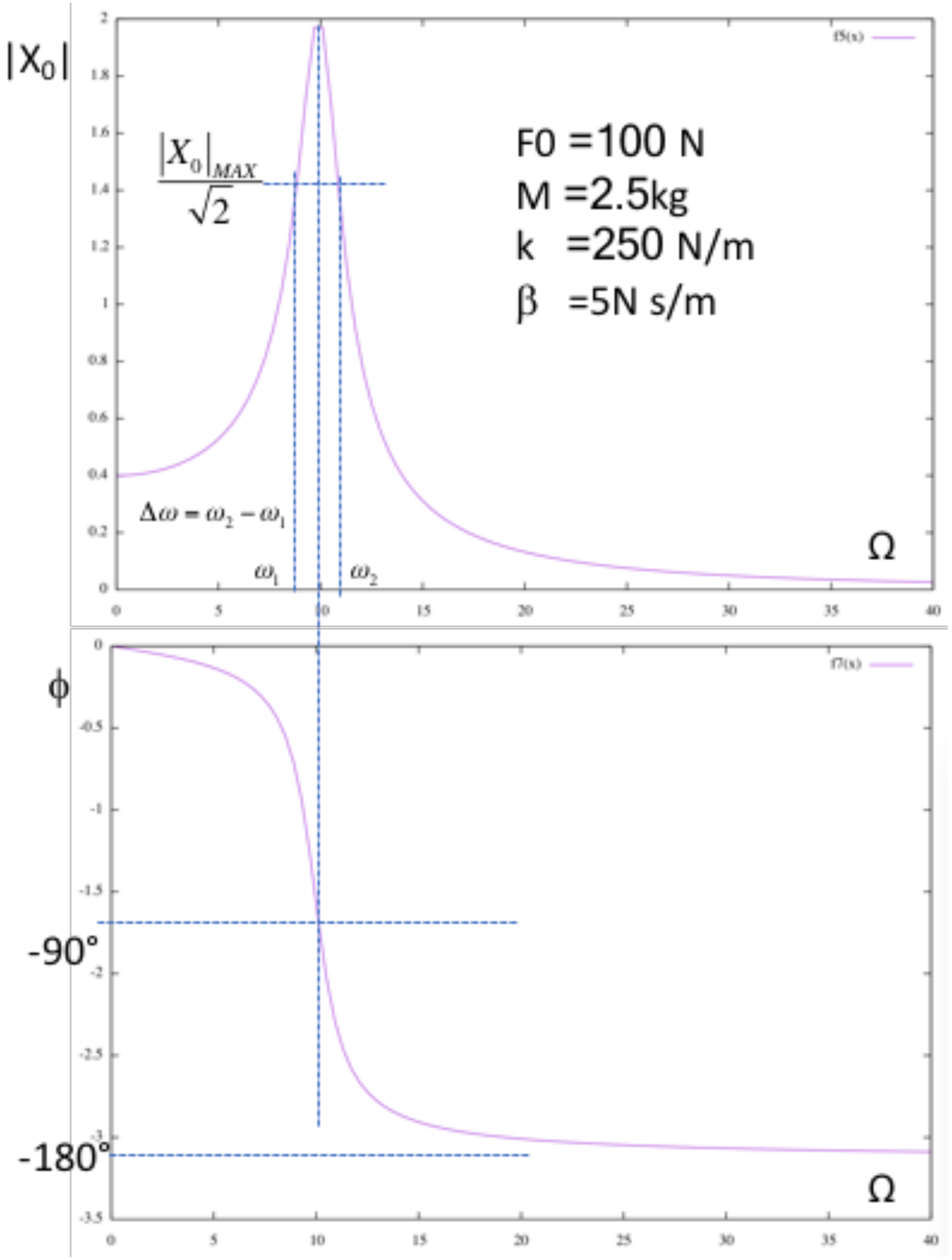
$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\frac{\beta}{m}\Omega}$$



Si rende reale il denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\frac{\beta}{m}\Omega\right]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2}$$

il cui modulo sarà



$$|X_0| = \frac{\frac{F_0}{m}\left[\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2}\right]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2}}$$

e la fase $\quad \phi = artg\,\frac{\frac{-\beta}{m}\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$.

Quindi la risposta dell'oscillatore dipende fortemente dalla frequenza Ω della forzante esterna.

Se $\Omega \sim \omega_0$ l'ampiezza della oscillazione diventa massima e la l'oscillazione stessa risulta sfasata di -π/2 rispetto alla sollecitazione. Questa condizione viene definita di "risonanza".

Alla risonanza, con il massimo dell'ampiezza di oscillazione ($|X_0|_{max} = \frac{F_0}{\beta\Omega}$), si ha anche il massimo della velocità della massa oscillante, quindi della sua energia cinetica: alla risonanza si ha un massimo della energia trasferita dalla forza applicata al sistema oscillante.

Si definisce "larghezza della risonanza" la quantità $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ dove ω_2 e ω_1 sono le pulsazioni per cui l'ampiezza dell'oscillazione è pari a $|X_0|_{max}/\sqrt{2}$.