

Corso Meccanica - Anno Accademico 2018/19

Esame Scritto del 09/09/2019 - Da svolgere in 3 ore

Nome e Cognome	Canale	Compito

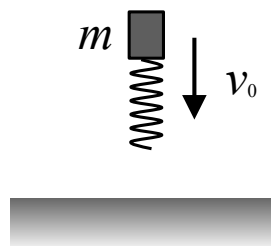
Esercizio 1

Un paracadutista di massa m si lancia con velocità iniziale nulla da un'altezza H . Assumendo che la resistenza esercitata dall'aria sul paracadutista sia linearmente proporzionale, secondo una costante α , alla sua velocità e sapendo che la velocità limite che potrebbe raggiungere il paracadutista è v_{lim} :

1. Determinare la costante α .
2. Se il paracadute viene aperto dopo un tempo T , determinare la quota del paracadutista nell'istante dell'apertura.

Una volta aperto il paracadute, la velocità del paracadutista diventa v_0 . Non appena raggiunge la terra, il paracadutista flette le ginocchia per assorbire lo shock dell'impatto. Si assuma che l'effetto della flessione possa essere assimilato a quello di una molla ideale verticale di lunghezza a riposo finita e che il paracadutista possa essere considerato un punto materiale soggetto solo alla gravità e alla forza della molla, secondo lo schema rappresentato in figura. Durante la flessione la decelerazione massima del paracadutista corrisponde a $10g$.

3. Qual è la forza che esercita la molla nel punto di massima compressione?
4. Di quanto risulta compressa la molla (ossia di quanto si è abbassato il c.d.m. del paracadutista) nel momento in cui il paracadutista si ferma?



Soluzioni 1

1. Scegliendo un sistema di riferimento unidimensionale diretto verso il basso, scriviamo l'equazione differenziale del moto del paracadutista :

$$mg - \alpha v = ma = m \frac{dv}{dt}$$

che si riduce a:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v$$

Integrando questa relazione tra l'istante iniziale $t_0 = 0$ in cui lui è fermo e un istante generico t si ottiene l'espressione di $v(t)$:

$$v = \frac{mg}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

Il paracadutista raggiunge la velocità limite, pari a $v_{lim} = \frac{mg}{\alpha}$ quando $t \rightarrow \infty$. Il valore di α si ricava a partire dalla velocità limite:

$$\alpha = \frac{mg}{v_{lim}}$$

2. Per conoscere lo spazio percorso dal paracadutista in funzione del tempo bisogna integrare l'espressione di $v(t)$, ottenendo:

$$x(T) = \frac{mgT}{\alpha} + \frac{m^2ge^{-\frac{\alpha}{m}T}}{\alpha^2} - \frac{m^2g}{\alpha^2}$$

La quota all'apertura del paracadute è quindi $H(T) = H - x(T)$.

3. Durante l'impatto, il paracadutista è soggetto alla gravità e alla forza della molla, per cui, indicando con h la quota del suo c.d.m. e con h_0 la quota iniziale, si ha:

$$mg - k(h_0 - h) = -ma$$

La massima decelerazione si ottiene quindi quando la molla raggiunge la massima compressione ΔL , ossia quando il paracadutista ha esaurito la sua velocità. Imponendo che in quell'istante $a = 10g$ si ha :

$$mg - k\Delta L = -m10g$$

da cui:

$$k\Delta L = 11mg$$

4. Per calcolare la compressione della molla nell'impatto, ΔL , utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica. Prima dell'impatto il c.d.m. del paracadutista si trova alla quota h_0 e si muove con una velocità v_0 :

$$E_i = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Nell'istante in cui la velocità del paracadutista si annulla, il suo c.d.m. si troverà ad una nuova quota h_1 , con la molla compressa di $\Delta L = (h_0 - h_1)$, per cui:

$$E_f = \frac{1}{2}k(h_0 - h_1)^2 + mgh_1.$$

Dalla conservazione dell'energia si ricava:

$$\frac{1}{2}k(h_0 - h_1)^2 = mg(h_0 - h_1) + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Utilizzando quindi le due relazioni:

$$\begin{cases} (h_0 - h_1) = \frac{11mg}{k} \\ \frac{1}{2}k(h_0 - h_1)^2 = mg(h_0 - h_1) + \frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases}$$

si ricava:

$$(h_0 - h_1) = \frac{v_0^2}{9g}$$

Tabella 1. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
H [m]	2500	2200
m [kg]	80	90
g [m/s ²]	9.81	9.81
T [s]	50	40
$ \vec{v}_{lim} $ [m/s]	30	25
$ \vec{v}_0 $ [m/s]	2.5	3.5
α [kg/s]	26.168	35.32
$H(T)$ [m]	1091.26	1263.71
$k\Delta H$ [N]	8632.8	9711.9
ΔH [m]	0.0707	0.138

Esercizio 2

Si consideri una slitta di massa M libera di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Una molla di costante elastica k è vincolata alla slitta; appoggiata ad essa vi è una massa m (approssimabile come un punto materiale) che può scivolare sulla superficie superiore della slitta. Inizialmente un perno impedisce il moto della massa sulla slitta, la molla è compressa di un tratto x e la slitta è ferma. All'istante iniziale il perno viene tolto e la massa inizia a muoversi sulla slitta. L'estremo libero della molla, in posizione di riposo, si trova sulla destra del punto B.

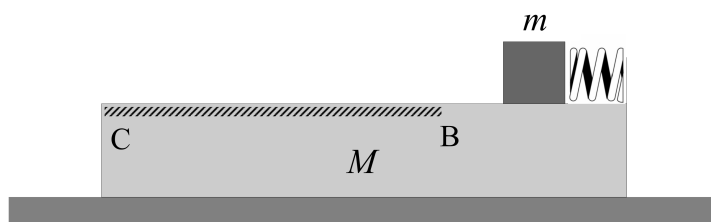
- (1) Sapendo che l'attrito è trascurabile fino al punto B, si calcolino le velocità della slitta e della massa nel sistema del laboratorio, nell'istante in cui la massa raggiunge B.

Il tratto successivo a B è scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d . La massa prosegue il suo moto sulla slitta fino a raggiungere il punto C. Nel punto C la massa è ferma nel sistema di riferimento della slitta.

- (2) Si calcolino le velocità della slitta e della massa nel sistema del laboratorio quando la massa è in C.
- (3) Si calcoli la lunghezza del tratto BC.

Infine assumiamo che il tratto BC sia lungo la metà di quanto trovato in precedenza nel punto (3), sicchè la velocità della massa in C non si annulla nel sistema di riferimento della slitta. Sia h l'altezza della slitta.

- (4) Calcolare le componenti della velocità della massa m nel sistema di riferimento del laboratorio quando questa tocca terra.



Soluzioni 2

- (1) Dato che non c'è attrito tra slitta e piano la quantità di moto totale si conserva. Inizialmente il sistema è fermo e abbiamo $Q_0 = 0$. Quindi, se v_B e V_B sono rispettivamente la velocità della massa e della slitta nel punto B, abbiamo

$$mv_B + MV_B = 0.$$

Poiché non c'è attrito nel moto fino al punto B l'energia meccanica si conserva. Dato che l'energia cinetica iniziale è nulla, abbiamo per l'energia meccanica iniziale $E_0 = \frac{1}{2}kx^2$. Nel punto B l'energia potenziale elastica è nulla, ne segue $E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}MV_B^2$. Uguagliando le due espressioni e tenendo conto della conservazione della quantità di moto otteniamo

$$\frac{1}{2}(m + m^2/M)v_B^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

da cui

$$v_B = -\sqrt{\frac{Mkx^2}{m(m+M)}}$$

dove abbiamo considerato un sistema di riferimento con l'asse x rivolto verso destra, per cui la velocità della massa è negativa. Corrispondentemente

$$V_B = -\frac{m}{M}v_B.$$

Avremmo anche potuto usare l'espressione

$$K = \frac{1}{2}(m+M)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2$$

per l'energia cinetica; qui V_{CM} è la velocità del centro di massa del sistema ($V_{CM} = 0$ nel nostro caso), $\mu = mM/(m+M)$ è la massa ridotta e $v_{rel} = v - V$ è la velocità relativa. Si ottiene

$$\mu v_{B,rel}^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

da cui

$$v_{B,rel} = -\sqrt{\frac{kx^2}{\mu}}$$

dove abbiamo tenuto conto che $v_B < 0$, $V_B > 0$, per cui $v_{B,rel} < 0$. Quindi, utilizzando la conservazione della quantità di moto e $v_{B,rel} = v_B - V_B$ segue

$$v_B = \frac{M}{m+M}v_{B,rel}, \quad V_B = -\frac{m}{m+M}v_{B,rel}.$$

Il risultato è identico al precedente.

(2) In C, la velocità relativa $v_C - V_C$ della massa rispetto alla slitta è nulla; quindi slitta e massa hanno la stessa velocità: $v_C = V_C$. Per la conservazione della quantità di moto, nel punto C vale $mv_C + MV_C = 0$. Quindi dev'essere

$$v_C = V_C = 0.$$

(3) A causa dell'attrito il sistema perde energia meccanica. Il teorema dell'energia cinetica ci fornisce l'equazione

$$K_C - K_B = L_{attr} = -\mu_d mg d_{BC}$$

In cui $K_C = 0$ e K_B può essere calcolata come nel punto (1), ossia $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}MV_B^2 = \frac{1}{2}kx^2$ oppure come $K_B = \frac{1}{2}\mu v_{B,rel}^2$. Ne consegue

$$d_{BC} = \frac{K_B}{\mu_d mg} = \frac{kx^2}{2\mu_d mg}$$

La distanza può anche essere calcolata cinematicamente, notando che nel tratto BC vale l'equazione

$$\mu a_{rel} = -F_{attr} = -\mu_d mg$$

dove a_{rel} è l'accelerazione relativa. Il moto è uniformemente decelerato e $v_{C,rel} = 0$ per cui

$$2a_{rel}d_{BC} = -v_{B,rel}^2 \implies d_{BC} = \frac{\mu v_{B,rel}^2}{2\mu_d mg}$$

e riotteniamo la relazione precedentemente trovata.

(4) Se assumiamo $d_{BC} = \frac{1}{2} \frac{kx^2}{\mu_d mg}$ allora l'energia cinetica in C non si annulla. Abbiamo

$$K_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}MV_C^2.$$

Per il teorema dell'energia cinetica

$$K_C = K_B - \mu_d mg d_{BC} = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}kx^2 = \frac{1}{4}kx^2$$

inoltre per la conservazione della quantità di moto

$$mv_C + MV_C = 0.$$

Mettendo a sistema queste due espressioni si ha, analogamente al punto (1),

$$v_C = -\sqrt{\frac{Mkx^2}{2m(m+M)}} = v_B/\sqrt{2},$$

$$V_C = -\frac{m}{M}v_C = V_B/\sqrt{2}.$$

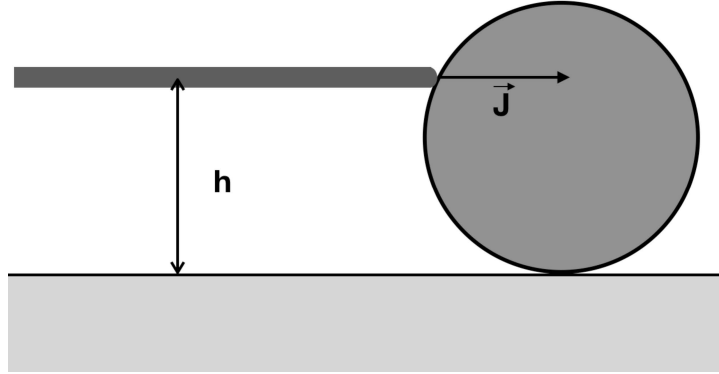
Quindi le componenti della velocità quando la massa tocca terra sono $v_x \equiv v_C$ e $v_y = \sqrt{2gh}$.

Tabella 2. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
k [N/m]	550	475
x [m]	0.18	0.21
M [kg]	4.8	5.0
m [kg]	0.7	0.6
μ_d	0.35	0.45
h [m]	0.40	0.35
g [m/s ²]	9.81	9.81
μ [kg]	0.611	0.536
v_B [m/s]	-4.71	-5.58
V_B [m/s]	0.687	0.700
d_{BC} [m]	3.71	3.95
v_x [m/s]	-3.33	-3.95
v_y [m/s]	2.80	2.62

Esercizio 3

Una sfera di raggio R e massa m è posta in quiete su di un piano orizzontale. La sfera viene colpita da una stecca di legno, che si muove orizzontalmente su un piano verticale passante per il centro della sfera, ad una quota h dal piano di appoggio. Immediatamente dopo l'urto, che è elastico e istantaneo, il centro di massa della sfera si muove con velocità lineare orizzontale $|\vec{v}_0|$. Dopo un certo tempo, per effetto dell'attrito con il piano, la sfera si trova a rotolare senza strisciare.



Si determini:

1. l'impulso trasferito dalla stecca alla sfera;
2. la velocità angolare ω_0 della sfera subito dopo l'urto;
3. la velocità angolare ω della sfera nell'istante in cui inizia il puro rotolamento;
4. il lavoro totale fatto dalla forza di attrito sulla sfera.

Soluzioni 3

1. Dal teorema dell'impulso $|\vec{J}| = |\Delta\vec{Q}| = m|\vec{v}_0|$
2. Usando come polo per il calcolo dei momenti il centro della sfera per il momento dell'impulso vale la relazione:

$$\vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{P}_0$$

Essendo $|\vec{r}| = (h - R)$, l'equazione precedente diventa:

$$|\vec{r}||\vec{J}| = (h - R)J = I\omega_0$$

da cui, usando anche $I = \frac{2}{5}mR^2$ si ricava:

$$\omega_0 = \frac{(h - R)J}{I} = \frac{5(h - R)J}{2mR^2}$$

e la sfera ruota in senso orario.

3. Per calcolare la velocità angolare finale possiamo utilizzare un polo che giace sul piano. In questo modo il momento della forza di attrito è nullo. Forza peso e reazione vincolare normale sono una coppia di forze a braccio nullo. Quindi non ci sono forze che fanno momento e il momento angolare si conserva. Quindi:

$$\vec{P}_0 = \vec{P}$$

$$mv_0R + I\omega_0 = mvR + I\omega$$

Imponendo il rotolamento perfetto ($v = \omega R$) si ottiene:

$$mv_0R + I\omega_0 = m\omega R^2 + I\omega = \frac{7}{5}mR^2\omega$$

quindi:

$$\omega = \frac{5v_0}{7R} + \frac{2}{7}\omega_0$$

4. Il lavoro della forza di attrito si ricava dal teorema dell'energia cinetica:

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Tabella 3. Dati iniziali e risultati per le due file

Variabile	Fila A	fila B
R [cm]	5	4
m [g]	100	80
h [cm]	8	7
$ \vec{v}_0 $ [cm/s]	20	25
$ \vec{J} $ [gcm/s]	2000	2000
$ \vec{\omega}_0 $ [1/s]	6	11.71
$ \vec{\omega} $ [1/s]	4.571	7.81
L [gcm ² s ⁻²]	-1428.57	-5468.75