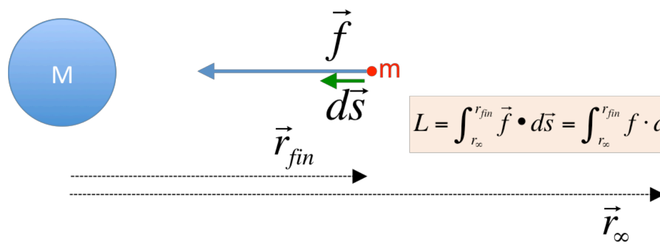
Potenziale, energia potenziale per corpi legati ad un campo di forza gravitazionale.

Supponiamo che il corpo di massa M generi un campo di forza gravitazionale $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$. Su una massa "campione" posta alla generica distanza *r* da M agisce la forza $\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ il cui potenziale è dato da $V(r) = -GMm\int\frac{dr}{r^2} = \frac{GMm}{r} + \text{cost}$. La costante può essere scelta in modo "naturale" visto che $V(r) \propto \frac{1}{r}$ notando che per $r=\infty \Rightarrow V(\infty) = 0$.

Quindi per una generica posizione di m alla distanza r dalla massa M il potenziale vale $V(r) = \frac{GMm}{r}$ e l'energia potenziale che compete ad *m* vale $U(r) = -V(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$!!.

Supponiamo ora che il corpo campione di massa m sia inizialmente fermo all'infinito ($K_{in}=K_\infty=0$; $U_{in}=U_\infty=0$), quindi

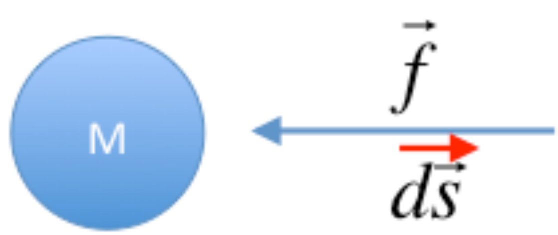
$E_{tot}=K_{in}+U_{in}=0.$



$$L = \int_{r_\infty}^{r_{fin}} \vec{f}\bullet d\vec{s} = \int_{r_\infty}^{r_{fin}} f\cdot ds > 0$$

Supponiamo ora che sotto l'azione del campo gravitazionale, conservativo, m venga portato nella posizione $\vec{r}_{fin}$, il lavoro compiuto dalla forza del campo, positivo visto che forza e spostamento hanno lo stesso verso, corrisponde alla variazione dell'energia cinetica $K_{fin} > K_{in} = K_{fin} > 0$. Essendo il campo conservativo $K_{fin} + U_{fin} = K_{in} + U_{in} = 0$ per cui $K_{fin} > 0$ e quindi $U_{fin} = -K_{fin} < 0$.

Per il corpo di massa *m* preso in esame, soggetto solo al campo gravitazionale conservativo, l'energia meccanica totale è data da $E_{tot}= K_{fin} + U_{fin} = K_{in} + U_{in}$.



$$L = \int_{r_\infty}^{r_{fin}} \vec{f}\bullet d\vec{s} = -\int_{r_\infty}^{r_{fin}} f ds < 0$$

Il corpo m potrebbe allontanarsi da M: la sua energia cinetica diminuirebbe (per via del fatto che la forza del campo, attrattiva, è diretta come lo spostamento ma ha verso contrario il lavoro delle forze del campo risulta essere negativo: $L=K_{fin} - K_{in} < 0 \rightarrow K_{fin} < K_{in}$) tendendo a 0 per $r=\infty$. Di conseguenza l'energia potenziale (negativa) aumenterebbe tendendo a anch'essa a 0 per $r=\infty$. Il corpo sarebbe libero dall'attrazione gravitazionale solo all'infinito.

Assumiamo ora che la massa *m* sia in moto alla distanza $\vec{r}_1$, possegga l'energia cinetica K_1 e l'energia potenziale $U_1(r_1) = -\frac{GMm}{r_1} < 0$: $E_{tot} = U_1 + K_1$ potrà essere >0, <0 o nulla (il caso precedente).

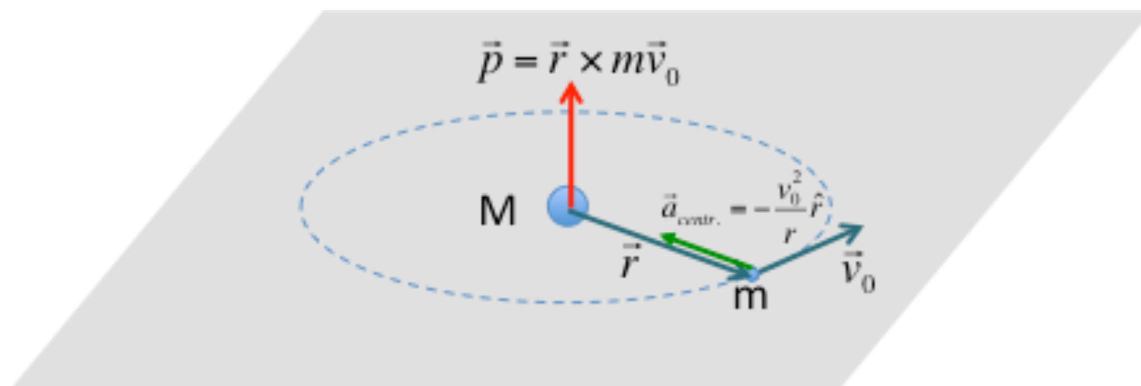
Se E_{tot}<0 il corpo potrà allontanarsi fino alla distanza r_2, dove arriverà con velocità nulla:

$$K_{fin} = K(r_2) = 0; \quad U_2(r_2) = E_{tot} = U_1(r_1) + K_1 > U_1(r_1)$$

il corpo *m* non può allontanarsi indefinitamente dal corpo *M*: **è "legato".**

Se l'energia meccanica totale è maggiore di zero (E_{tot}>0) *allora* $|K_{in}| > |U_1(r_1)|$ ed il corpo *m* potrà allontanarsi dal corpo di massa *M*, **non è "legato".**

Supponiamo che il corpo m sia alla distanza R_0 dal corpo M che genera il campo e si muova con velocità v_0 lungo una traiettoria circolare con centro in M. Osservando m in un Sistema di Rif. inerziale possiamo scrivere $\vec{f} = m\vec{a}$ dove $\vec{f}(R_0) = -\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r}$ ed $\vec{a}$ è l'accelerazione centripeta $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R_0}\hat{r}$: $\vec{f} = -\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} = m\vec{a} = -m\frac{v_0^2}{R_0}\hat{r}$ proiettando tale relazione vettoriale su $\hat{r}$ abbiamo $\frac{GMm}{R_0^2} = m\frac{v_0^2}{R_0}$ da cui si ricava il valore $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$: se il corpo di massa m è in moto attorno ad M alla distanza R_0 con velocità v_0,



ortogonale al raggio, la forza di attrazione gravitazionale è in grado di fornire l'accelerazione centripeta necessaria per un "moto circolare uniforme": il corpo di massa m si trova in un'orbita di equilibrio attorno ad M. Per questo sistema "stabile" abbiamo $K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_0} = E_{tot} = cost = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_0} - \frac{GMm}{R_0} = -\frac{GMm}{2R_0}$<0.

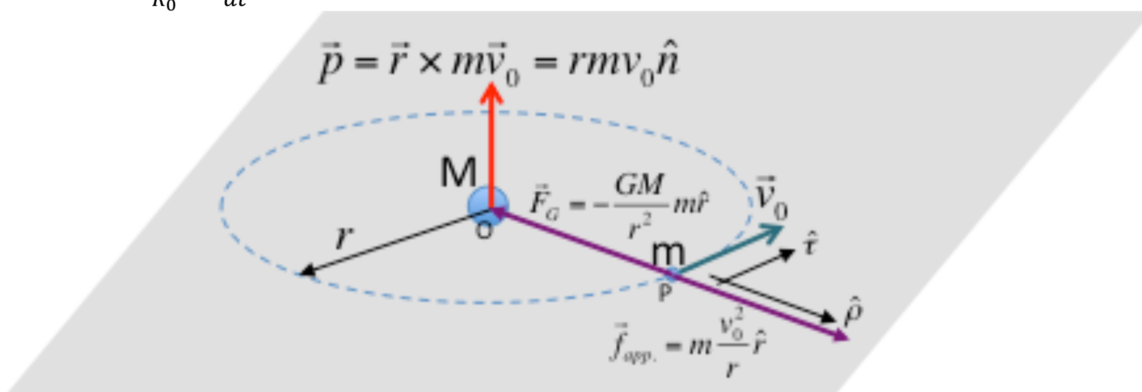
Se m, alla distanza R_0, avesse $v < v_0$ cadrebbe su M. Se invece $v > v_0$ ma $E_{tot} < 0$ m sarebbe ancora legato ad M con energia totale maggiore di quella minima ($-\frac{GMm}{2R_0}$).

Abbiamo fatto le considerazioni precedenti in un SR inerziale solidale con le "stelle fisse".

Sempre nelle condizioni descritte precedentemente supponiamo ora di scegliere un sistema di riferimento $(\hat{\rho}, \hat{\tau})$ che ruoti assieme al corpo m. In tale riferimento, non inerziale, il corpo di massa m è fermo e "libero": chiamando $\vec{F}_G$ la forza di attrazione gravitazionale ed $\vec{F}_{app}$ la forza "centrifuga" apparente si ha

$$\vec{F}_G + \vec{F}_{app} = 0 = -\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} + m\frac{v_0^2}{R_0}\hat{r} = -\frac{GMm}{R_0^2}\hat{r} + m\omega_0^2 R_0 \hat{r}$$

dove $\omega_0 = \frac{v_0}{R_0} = \frac{d\varphi}{dt}$ è la velocità angolare istantanea di rotazione di m attorno ad M.



Proiettando l'espressione della forza totale lungo $\hat{\rho}$ abbiamo: $F(r) = -\frac{GMm}{R_0^2} + m\omega_0^2 R_0$

o anche: $F(r) = -\frac{GMm}{R_0^2} + m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 R_0$. Se l'orbita fosse circolare $\frac{d\varphi}{dt} = cost.$

Se l'orbita fosse ellittica $\frac{d\varphi}{dt} \neq cost$.

Vediamo se ci sono altre quantità che si conservano.

Notiamo che le forze che agiscono su m sono entrambe dirette come il raggio che unisce m ad M: sono forze "centrali" che quindi hanno momento nullo se calcolato usando come polo la posizione occupata da M: $\overrightarrow{OP} \times (-\frac{GMm}{r^2}\hat{\rho}) = 0$; $\overrightarrow{OP} \times (m\omega^2 r\hat{\rho}) = 0$
quindi essendo nulla la velocità della massa M (cioè del polo):

$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$ **il momento della quantità di moto è costante**

$\vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = cost = mrv\hat{n}$ ($\vec{p}$ è costante in modulo, direzione e verso !!!).

Ricordando che $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{mr}{mr}\frac{v}{r} = \frac{p}{mr^2}$ deduciamo che anche se l'orbita non è circolare si conserva $\vec{p}$, quindi all'aumentare di r diminuisce ω.

Il Potenziale efficace del campo di forza gravitazionale.

Continuiamo a trattare il moto di m nel S.R. non inerziale ruotante in cui m è fermo. Ricordiamo però che nel S.R. inerziale in cui M è fisso la massa m possiede l'energia cinetica $K = \frac{1}{2} m v_0^2$.

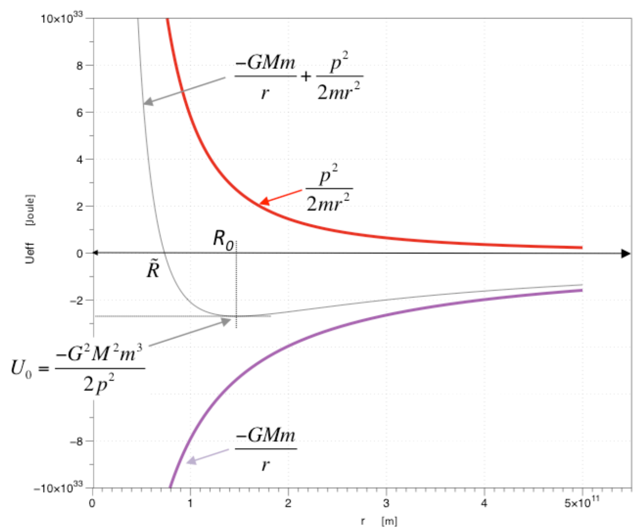
Visto che nel moto si conserva $\vec{p}$ possiamo riscrivere l'espressione della (proiezione della) forza totale in funzione di $\vec{p}$

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} + m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r = -\frac{GMm}{r^2} + m\frac{p^2}{m^2 r^4} r = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{p^2}{mr^3}$$

e quindi si ha $F(R_0) = 0$ se $\frac{GMm}{R_0^2} = \frac{p^2}{mR_0^3}$ e cioè se, dato *p*, si ha $R_0 = \frac{p^2}{GMm^2}$.

Abbiamo visto che il campo gravitazionale, come qualsiasi campo di forze "centrali", è "conservativo", cioè ammette una funzione potenziale *V(r)* (e quindi permette di definire una energia potenziale:

U(r) =-V(r)).



Integrando la $F(r)$ in funzione di *r* abbiamo

$$U_{eff}(r) = -\int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\left[\frac{GMm}{r} - \frac{p^2}{m2r^2}\right] + cost.$$

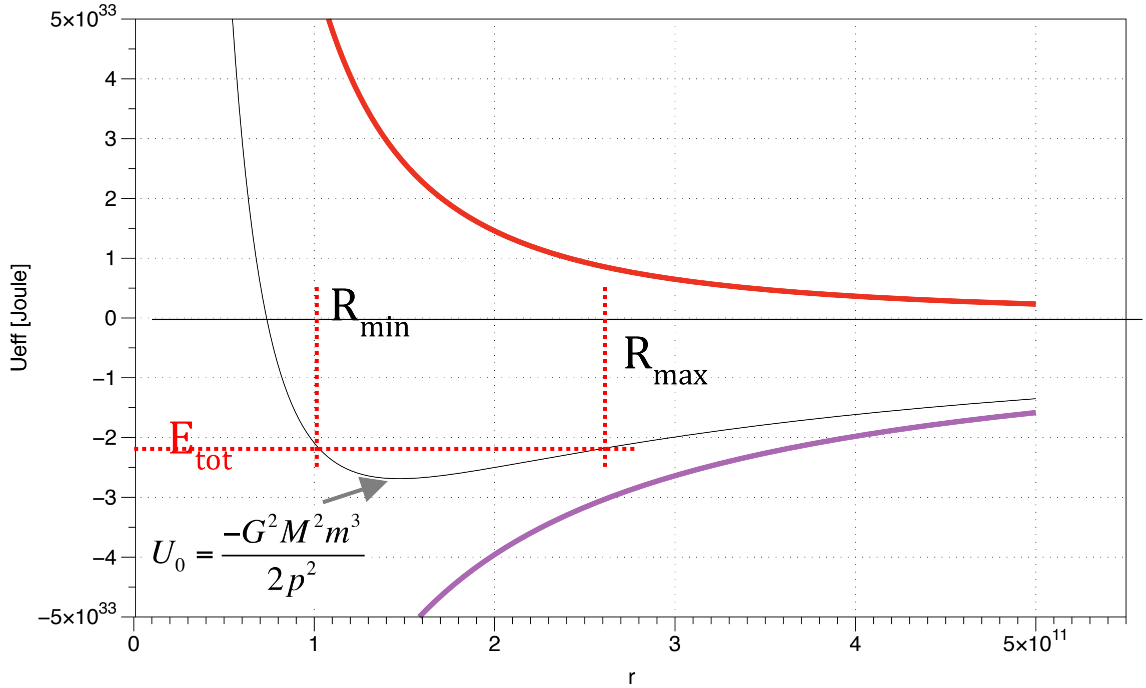
Per $r \to \infty$ vogliamo $U(\infty) \to 0$ quindi possiamo porre $cost = U(\infty) = 0$

Si nota che il potenziale efficace assume il valore nullo per $r = \tilde{R} = \frac{p^2}{2m^2GM}$ ed ha un minimo per $r = R_0 = \frac{p^2}{m^2GM} = 2\,\tilde{R}$ il cui valore si ottiene inserendo l'espressione per R_0

$$U_{eff}(r) = -\left[\frac{GMm}{R_0} - \frac{p^2}{2mR_0^2}\right] = -\frac{G^2M^2m^3}{2p^2}$$

Ricordiamo che tale minimo di U_{eff} corrisponde, nel SR inerziale legato alle stelle fisse, al caso in cui la massa m ha, alla distanza R_0, la velocità v_0 che permette alla forza di attrazione gravitazionale di fornire esattamente l'accelerazione centripeta necessaria a garantire un moto circolare uniforme (orbita chiusa, stabile, circolare). Ricordiamo che v_0 è la velocità del S.R. non inerziale in cui il corpo di massa è fermo e soggetto a forza totale nulla. Se $v = v_0$ il corpo di massa m ha energia cinetica nulla nel S.R. non inerziale considerato. Se invece v differisce da v_0 vuol dire che nel nostro sistema di riferimento non inerziale il corpo di massa m ha una velocità diversa da 0 e quindi una energia cinetica K > 0.

Se la velocità di m, sempre nel S.R. non inerziale considerato, fosse $v < v_0$ la forza di attrazione gravitazionale attrarrebbe m su M, se invece $v > v_0$ l'energia meccanica totale sarebbe maggiore del minimo: in entrambe i casi E_{tot} = K+ $U_{eff}(R_0)$. Se inoltre $E_{tot} \geq 0$ la massa non sarebbe più legata ad M (r può crescere fino all'infinito lungo una iperbole). Se invece $E_{tot} < 0$ la massa m continuerebbe ad essere legata ad M, si muoverebbe su di un'orbita chiusa e sarebbero possibili tutti i valori di r compresi fra R_{min} ed R_{max} : m si muoverebbe su un'orbita ellittica.



$E_{tot} = U_0$	**$r=R_0$**	**orbita circolare**
$U_0 < E_{tot} < 0$	**$R_{min} < r < R_{max}$**	**orbita ellittica**
$E_{tot} > 0$	**corpo libero**	**traiettorie iperboliche**

Esistono quindi delle orbite stabili che permettono la rotazione di corpi di massa m attorno al corpo M che genera il campo gravitazionale.

Potremmo chiederci cosa potrebbe succedere se una perturbazione spostasse il corpo di massa m dalla sua orbita. Cioè dobbiamo vedere come varierebbe il potenziale efficace se la distanza r fra m ed M fosse modificata di una piccola quantità: $r = R_0 + \Delta r$

$$\Delta U(r) = U(r) - U(R_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dr^n}U(r)\right]_{r=R_0} \Delta r^n$$

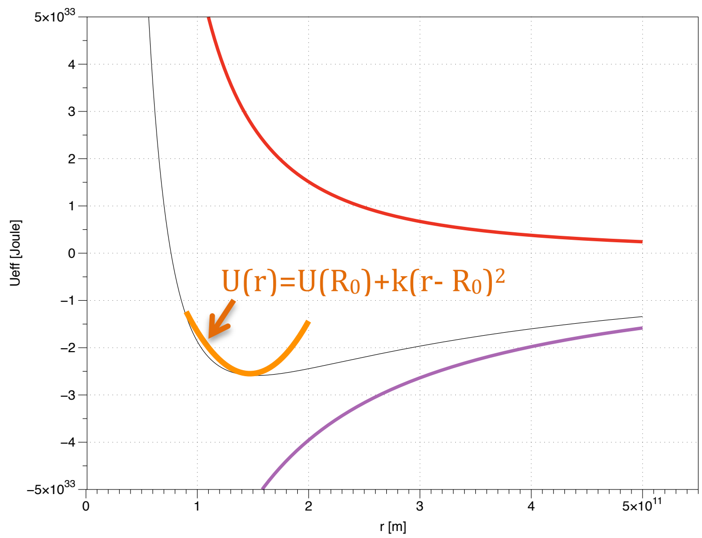
Passando a termini infinitesimi e fermandoci al II ordine abbiamo:

$$\mathrm{d}U(r) = \left[\frac{GMm}{r^2} - \frac{p^2}{mr^3}\right]_{r=R_0} (r-R_0) + \frac{1}{2}\left[-2\frac{GMm}{r^3} + \frac{3p^2}{mr^4}\right]_{r=R_0} (r-R_0)^2$$

e sostituendo in questa formula $r = R_0 = \frac{p^2}{m^2GM}$ abbiamo:

$$\mathrm{d}U(r) = \overset{=0!}{\cancel{\left(GMm\frac{m^4G^2M^2}{p^4} - \frac{p^2}{m}\frac{m^6G^3M^3}{p^6}\right)}}(r-R_0) + \frac{1}{2}\left(-2GMm\frac{m^6G^3M^3}{p^6} + \frac{3p^2}{m}\frac{m^8G^3M^4}{p^8}\right)(r-R_0)^2 =$$

$$= \frac{m^7G^4M^4}{2p^6}(r-R_0)^2 = k(r-R_0)^2$$



Questo quindi è il comportamento del potenziale efficace per piccoli spostamenti attorno ad R_0: si comporta come il potenziale di richiamo di una forza elastica di intensità $F(r) = -2k(r-R_0)$.

Tale forza elastica, in caso di piccoli spostamenti *dr*, riporterebbe la massa m in R_0.