

Il corpo di massa m può muoversi, senza attrito, sulla superficie esterna di un semi-cilindro. Inizialmente è sulla sommità del cilindro (A), alla quota R rispetto alla quota più bassa raggiungibile (O).

Si chiede di descrivere come la reazione \vec{N} , che il cilindro applica sul corpo, dipende dall'angolo θ .

Sul corpo agiscono la forza peso e la reazione \vec{N} , sempre ortogonale alla velocità:

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Proiettando tale reazione sugli assi $\hat{\rho}$ ed $\hat{\eta}$ si ottengono le due relazioni scalari:

$$mg \sin(\theta) = ma_{\tau}$$

$$N - mg \cos(\theta) = -ma_c$$

dove a_{τ} è l'accelerazione tangenziale subita dal corpo ed a_c è l'accelerazione lungo la direzione radiale. Affinchè, dato un valore dell'angolo θ , il corpo si muova lungo la traiettoria circolare tale accelerazione deve essere diretta verso il centro della traiettoria ed il suo modulo, $a_c(\theta)$ deve essere $a_c(\theta) = \frac{v^2(\theta)}{R}$.

Sul corpo agisce solo la forza peso, conservativa, per cui possiamo scrivere

$K_A + U_A = K(\theta) + U(\theta)$. Ricordiamo che $K_A = 0$ e $U_A = mgR$, possiamo quindi scrivere: $mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR \cos(\theta)$ da cui ricaviamo $v^2(\theta) = 2gR(1 - \cos(\theta))$.

Possiamo quindi ricavare il modulo della reazione normale

$$N = mg \cos(\theta) - ma_c = mg(\cos(\theta) - 2 + 2 \cos(\theta)) = mg(3 \cos(\theta) - 2)$$

Per valori crescenti di θ il valore di $\cos(\theta)$ diminuisce ed il modulo della reazione si annullerà quando $\cos(\theta) = \frac{2}{3}$. Ciò corrisponde ad un angolo $\theta \sim 48^\circ 11'$

Avremmo anche potuto raggiungere lo stesso risultato considerando che la sola forza in grado di fornire una accelerazione radiale è la componente radiale della forza peso, $mg \cos(\theta)$, e che tale forza deve fornire almeno l'accelerazione radiale $a_c(\theta) = \frac{v^2(\theta)}{R}$. Quindi

$$mg \cos(\theta) \geq m \frac{v^2(\theta)}{R} = m2g(1 - \cos(\theta)). \text{ Di nuovo si arriva alla relazione } \cos(\theta) \geq \frac{2}{3}$$

