

Il corpo di massa  $m$  può muoversi, senza attrito, sulla superficie esterna di un semi-cilindro. Inizialmente è sulla sommità del cilindro (A), alla quota  $R$  rispetto alla quota più bassa raggiungibile (O).

Si chiede di descrivere come la reazione  $\vec{N}$ , che il cilindro applica sul corpo, dipende dall'angolo  $\theta$ .

Sul corpo agiscono la forza peso e la reazione  $\vec{N}$ , sempre ortogonale alla velocità:

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$ . Proiettando tale reazione sugli assi  $\hat{\rho}$  ed  $\hat{\eta}$  si ottengono le due relazioni scalari:

$$mg \sin(\theta) = ma_{\tau}$$

$$N - mg \cos(\theta) = -ma_c$$

dove  $a_{\tau}$  è l'accelerazione tangenziale subita dal corpo ed  $a_c$  è l'accelerazione lungo la direzione radiale. Affinchè, dato un valore dell'angolo  $\theta$ , il corpo si muova lungo la traiettoria circolare tale accelerazione deve essere diretta verso il centro della traiettoria ed il suo modulo,  $a_c(\theta)$  deve essere  $a_c(\theta) = \frac{v^2(\theta)}{R}$ .

Sul corpo agisce solo la forza peso, conservativa, per cui possiamo scrivere

$K_A + U_A = K(\theta) + U(\theta)$ . Ricordiamo che  $K_A = 0$  e  $U_A = mgR$ , possiamo quindi scrivere:  $mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR \cos(\theta)$  da cui ricaviamo  $v^2(\theta) = 2gR(1 - \cos(\theta))$ .

Possiamo quindi ricavare il modulo della reazione normale

$$N = mg \cos(\theta) - ma_c = mg(\cos(\theta) - 2 + 2 \cos(\theta)) = mg(3 \cos(\theta) - 2)$$

Per valori crescenti di  $\theta$  il valore di  $\cos(\theta)$  diminuisce ed il modulo della reazione si annullerà quando  $\cos(\theta) = \frac{2}{3}$ . Ciò corrisponde ad un angolo  $\theta \sim 48^\circ 11'$

Avremmo anche potuto raggiungere lo stesso risultato considerando che la sola forza in grado di fornire una accelerazione radiale è la componente radiale della forza peso,  $mg \cos(\theta)$ , e che tale forza deve fornire almeno l'accelerazione radiale  $a_c(\theta) = \frac{v^2(\theta)}{R}$ . Quindi

$$mg \cos(\theta) \geq m \frac{v^2(\theta)}{R} = m2g(1 - \cos(\theta)). \text{ Di nuovo si arriva alla relazione } \cos(\theta) \geq \frac{2}{3}$$

