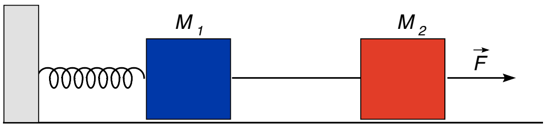
Esercizio 2: Si consideri il sistema riportato in figura formato da due blocchi di massa M_1 ed M_2 liberi di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Il blocco di massa M_1 è connesso ad una molla di costante elastica k vincolata ad una parete verticale e, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, alla massa M_2. Inoltre alla massa M_2 è applicata una forza costante orizzontale F. All'istante iniziale le due masse sono ferme, la molla è compressa di un tratto Δ e la corda è tesa.

1. Se $\Delta = \Delta_0$, si calcoli l'ampiezza ed il periodo delle oscillazioni del sistema delle due masse (si assuma che la corda rimanga sempre tesa durante le oscillazioni).
2. Sempre per $\Delta = \Delta_0$, si calcoli il valore minimo della tensione della corda durante le oscillazioni, verificando che la corda rimane sempre tesa come assunto nella domanda precedente.
3. Si calcoli il valore massimo della compressione Δ per cui la corda rimane sempre tesa durante le oscillazioni.

Valori numerici: $M_1 = 130$ g, $M_2 = 2M_1$, $k = 0.880$ N/m, $F = 0.0704$ N, $\Delta_0 = 2.00$ cm.



Esercizio 2.

1) Scriviamo le equazioni di Newton per le due masse. Se x è l'allungamento della molla (abbiamo scelto un sistema di riferimento con origine nella posizione di riposo della molla), abbiamo

$$M_1 a_1 = -kx + T, \qquad\qquad M_2 a_2 = -T + F. \tag{17}$$

Se la corda rimane sempre tesa, $a_1 = a_2 = a$, per cui eliminando T abbiamo

$$(M_1 + M_2)a = -kx + F.$$

Questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione

$$\omega^2 = \frac{k}{M_1 + M_2}$$

e posizione di equilibrio

$$x_{\rm eq} = F/k.$$

La soluzione generale è

$$x(t) = x_{\rm eq} + A\cos(\omega t + \phi).$$

Imponiamo le condizioni iniziali. Dato che il sistema al tempo $t = 0$ è fermo

$$v(t = 0) = -A\omega \sin\phi = 0 \qquad \Rightarrow \phi = 0$$

Si ha poi $x(t = 0) = -\Delta_0$ per cui

$$-\Delta_0 = x_{\rm eq} + A \qquad \Rightarrow \qquad A = -x_{\rm eq} - \Delta_0$$

Quindi abbiamo per il periodo e l'ampiezza

$$T = 2\pi\sqrt{(M_1 + M_2)/k}, \qquad |A| = \Delta_0 + F/k.$$

L'ampiezza poteva anche essere calcolata senza risolvere esplicitamente l'equazione del moto. Dato che la massa M_1 parte ferma in $x = -\Delta_0$ e si trova all'equilibrio quando $x = x_{\text{eq}}$, l'ampiezza è semplicemente data da

$$\text{Ampiezza} = x_{\text{eq}} - (-\Delta_0) = F/k + \Delta_0.$$

Numericamente abbiamo (Compito A)

$$\omega = \sqrt{k/3M_1} = 1.50\,\text{s}^{-1}, \qquad T = 2\pi\sqrt{3M_1/k} = 4.18\,\text{s}, \qquad \text{Amp} = 10.0\,\text{cm},$$

e

$$\omega = \sqrt{k/5M_2} = 10.0\,\text{s}^{-1}, \qquad T = 2\pi\sqrt{5M_2/k} = 0.628\,\text{s}, \qquad \text{Amp} = 6.0\,\text{cm}.$$

2) La tensione della corda può essere calcolata dalle equazioni di Newton. Dato che $M_2 a = F - T$ abbiamo

$$T = F - M_2 a.$$

L'accelerazione segue dalla legge oraria:

$$a = -A\omega^2 \cos\omega t = -\frac{Ak}{M_1 + M_2}\cos\omega t$$

Quindi

$$T = F + \frac{M_2 A k}{M_1 + M_2}\cos\omega t = F - \frac{M_2}{M_1 + M_2}(F + k\Delta_0)\cos\omega t$$

Il valore minimo lo si ottiene quando $\cos\omega t = 1$, cioè nel momento di massima compressione della molla. Quindi

$$T_{\text{min}} = F - \frac{M_2}{M_1 + M_2}(F + k\Delta_0) = \frac{1}{M_1 + M_2}(M_1 F - M_2 k\Delta_0). \tag{18}$$

Questa espressione poteva essere ricavata senza utilizzare la legge oraria. Infatti, eliminando l'accelerazione delle equazioni di Newton abbiamo

$$\frac{T - kx}{M_1} = \frac{F - T}{M_2},$$

che risolta fornisce

$$T = \frac{M_1 F + M_2 k x}{M_1 + M_2}.$$

Il valore minimo di T si ottiene evidentemente per il valore minimo di x, ossia per $x = -\Delta_0$. Riotteniamo quindi il precedente risultato. Numericamente abbiamo (compito A)

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{3}(F - 2k\Delta_0) = 0.0117\,\text{N},$$

e (compito B)

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{5}(4F - k\Delta_0) = 4.81\,\text{N}.$$

3) Si può utilizzare qui la formula (18) con $\Delta_{\max} = \Delta$. Risulta $T_{\min} > 0$ solo se $\Delta < \Delta_{\max}$ con $M_1 F - M_2 k \Delta_{\max} = 0$, ossia

$$\Delta_{\max} = \frac{M_1 F}{M_2 k}.$$

Alternativamente si poteva ragionare in modo diretto, notando che a) il caso limite corrisponde a $T = 0$ e b) il valore minimo della tensione si ottiene per $x = -\Delta$. Sostituendo nelle equazioni (17) si ottiene

$$M_1 a = k\Delta_{\max} \qquad M_2 a = F. \tag{19}$$

Eliminando l'accelerazione si ottiene

$$\frac{k\Delta_{\max}}{M_1} = \frac{F}{M_2}, \tag{20}$$

che fornisce lo stesso risultato. Numericamente abbiamo (compito A)

$$\Delta_{\max} = \frac{F}{2k} = 4.0\,\mathrm{cm},$$

e (compito B)

$$\Delta_{\max} = \frac{4F}{k} = 10.0\,\mathrm{cm}.$$