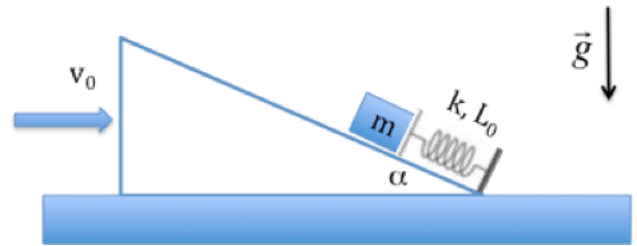


Un cuneo triangolare con angolo alla base α si muove su un piano orizzontale liscio inizialmente con velocità costante v_0 . Dall'istante $t_0=0$ e fino all'istante t_f il cuneo viene bruscamente frenato, con accelerazione costante, fino a fermarsi. All'estremità inferiore del cuneo una molla ideale di costante k e lunghezza a riposo L_0 è fissata ad un supporto solidale al cuneo come in figura, ed un corpo di massa m è fissato all'estremità libera della molla.



Si determini:

1. la contrazione δL della molla e la reazione vincolare N del cuneo durante la fase di moto a velocità costante sapendo che durante tale moto la massa m è inizialmente ferma, e rimane ferma, rispetto al cuneo stesso;
2. la reazione vincolare N^* del cuneo durante la fase di frenamento e la contrazione δL^* della molla che fornirebbe per la massa m , durante la fase di frenamento, la condizione di equilibrio rispetto al cuneo;
3. il periodo delle oscillazioni, T , della massa m
4. la quota h rispetto al piano orizzontale della massa m al tempo $t^*=T/2$.

Dati numerici: $\alpha=30^\circ$, $v_0=25$ m/s, $k=60$ N/m, $L_0=15$ cm, $m=250$ g, $t_f=2$ s

Soluzione

Assumiamo un sistema di assi cartesiani, solidale con il cuneo, con x orizzontale e verso concorde a \vec{v}_0 ed asse y verticale rivolto verso l'alto.

- 1) Quando il cuneo si muove a velocità costante il sistema di riferimento è inerziale. In tale sistema di riferimento le forze agenti sulla massa m sono la forza peso $m\vec{g}$, la forza elastica fornita dalla molla $\vec{f}_{el} = -k\delta\vec{L}$ e la reazione normale del cuneo \vec{N} ; si ha cioè:
- $$m\vec{g} + \vec{N} - k\delta\vec{L} = m\vec{a}.$$
- Visto che la massa è, e resta, ferma rispetto al cuneo si deve avere $m\vec{g} + \vec{N} - k\delta\vec{L} = 0$; proiettando tale relazione vettoriale lungo l'ipotenusa del cuneo e lungo la direzione ortogonale abbiamo:
- $$mg \sin\alpha - k\delta L = 0 \rightarrow \delta L = \frac{mg \sin\alpha}{k} = 2,04 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
- $$N - mg \cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg \cos\alpha = 2,12 \text{ N}.$$

- 2) Durante il moto frenato, che dura ΔT , il cuneo subisce una accelerazione costante, orizzontale $\vec{a}_\tau = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta T} = -\frac{v_0}{\Delta T} \hat{i}$. Il sistema di riferimento connesso al cuneo ora non è più inerziale: se \vec{a} è l'accelerazione della massa m in un sistema di riferimento inerziale, nel sistema di riferimento connesso al cuneo l'accelerazione è $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_\tau$ cioè in tali condizioni $\vec{a}' = \frac{m\vec{g} + \vec{N} - k\delta\vec{L}}{m} - \vec{a}_\tau$. Durante il frenamento quindi la condizione di equilibrio della massa m rispetto al cuneo è garantita da
- $$\vec{a}' = 0 = \frac{m\vec{g} + \vec{N} - k\delta\vec{L}}{m} - \vec{a}_\tau = \frac{m\vec{g} + \vec{N} - k\delta\vec{L}}{m} + \frac{v_0}{\Delta T} \hat{i} = 0.$$

Assumiamo un S.R. con asse ξ parallelo alla superficie del cuneo, asse η ortogonale ed origine nella posizione in cui la molla è a riposo a distanza L_0 dal punto più basso del piano inclinato (ξ misura la deformazione della molla). Definiamo $\delta L^* = \xi^* - L_0$ la compressione della molla che garantisce l'equilibrio fra le forze.

Proiettando la relazione vettoriale $\vec{f}^{tot} = m\vec{a}'$ lungo ξ ed η abbiamo:

$$mg \sin\alpha - k\delta L^* + m \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha = 0 \quad \text{e} \quad -mg \cos\alpha + N^* + m \frac{v_0}{\Delta T} \sin\alpha = 0.$$

Dalla prima relazione otteniamo $\delta L^* = \frac{m}{k} \left(\frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha + g \sin\alpha \right) = 6,55 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

dalla seconda otteniamo $N^* = m \left(g \cos\alpha - \frac{v_0}{\Delta T} \sin\alpha \right) = 0,56 \text{ N}.$

- 3) Nel sistema di riferimento ξ, η scriviamo $mg \sin\alpha - k\xi + m \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha = m\ddot{\xi}$ da cui otteniamo $\ddot{\xi} + \frac{k}{m} \xi = g \sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha$ e quindi la legge oraria del moto, durante il frenamento del cuneo, è $\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{m}{K} \left(g \sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha \right)$ con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 15,5 \text{ rad/s.} \quad \text{Il periodo delle oscillazioni della massa } m \text{ è } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,41 \text{ s.}$$

Le costanti A e φ per tale legge oraria del moto si trovano in base alle condizioni iniziali: al tempo $t_0=0$, quando inizia il frenamento del cuneo, $\xi(t_0) = \delta L$ e $\dot{\xi}(t_0) = 0$.

Dalla prima condizione otteniamo $\frac{mg \sin\alpha}{k} = A \cos\varphi + \frac{m}{K} \left(g \sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha \right)$, dalla seconda $-\omega A \sin\varphi = 0$ e quindi $\varphi = \pi$ ed $A = \frac{m}{K} \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha = 4,51 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$

Si noti che $A = \delta L^* - \delta L$.

La legge del moto è $\xi(t) = \frac{m}{K} \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha \cos(\omega t + \pi) + \frac{m}{K} \left(g \sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha \right).$

- 4) Per $t^*=T/2$ (si noti che $t^* < t_f$ siamo nella fase in cui il cuneo è accelerato) si ha $\omega t^* = \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2} = \pi$ quindi $\cos(\omega t^* + \pi) = 1$ e $\sin(\omega t^* + \pi) = 0$: la massa m cioè ha compiuto una semi-oscillazione.

Ne segue che $\xi(t^*) = \frac{m}{K} \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha + \frac{m}{K} \left(g \sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T} \cos\alpha \right) = 2\delta L^* - \delta L$ e $\dot{\xi}(t^*) = \omega A \sin(\omega t^* + \pi) = 0$.

La quota della massa m rispetto alla base del cuneo è quindi

$$h = [L_0 - \xi(t^*)] \sin(\alpha) = [L_0 - 2\delta L^* + \delta L] \sin(\alpha) = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$