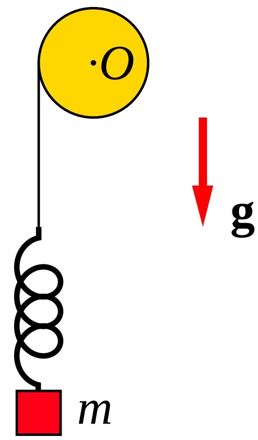
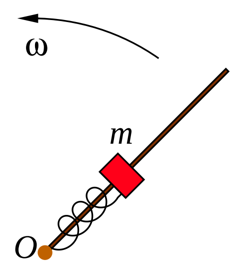
Problema 1: Una massa m è sospesa mediante una molla di lunghezza a riposo nulla, di costante elastica k e di massa trascurabile avvolta su di una puleggia. La puleggia può ruotare attorno ad un asse orizzontale, fisso, passante per O. Inizialmente, a causa di attriti sull'asse, la puleggia ruota con velocità angolare costante facendo svolgere la fune; inoltre la lunghezza della molla è costante, pari a x_0, e la sua velocità di discesa è v_0. a) Si calcoli l'allungamento x_0.
Ad un certo istante la puleggia viene bloccata improvvisamente. b) Si calcoli l'allungamento massimo della molla a seguito dell'arresto della puleggia. c) Si calcoli il valore massimo della forza che agisce sulla fune. Valori numerici: $m = 150$ kg, $k = 2.00 \cdot 10^4$ N/m, $v_0 = 0.500$ m/s.



Problema 2: Si consideri una sbarra sottile, il cui estremo è vincolato in un punto O, libera di ruotare in un piano orizzontale. Lungo la sbarra si può muovere senza attrito una massa m connessa al punto O tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0. La sbarra viene fatta ruotare tramite un motore esterno con velocità angolare costante ω (questa condizione si applica a tutto l'esercizio). (a) Inizialmente la massa ruota mantenendo costante la lunghezza della molla, pari a L. Si calcoli L.



Successivamente la molla viene compressa alla lunghezza $L/2$ e, al tempo $t = 0$, la massa viene lasciata libera di muoversi lungo la sbarra (in questo istante la velocità radiale è nulla). Si calcoli: (b) la massima (in valore assoluto) velocità radiale $v_{\max}$ raggiunta nel moto successivo; (c) dopo quanto tempo il valore $v_{\max}$ viene raggiunto per la prima volta; (d) la reazione vincolare esercitata dalla sbarra sulla massa quando la velocità è pari a $v_{\max}$; in particolare, si riportino la sua componente radiale, quella tangenziale, e quella verticale (ossia parallela all'asse di rotazione della sbarra). Valori numerici: $l_0 = 5.20$ cm, $m = 127$ g, $k = 16.3$ N/m, $\omega = 9.15$ rad/s.
(compito B): $l_0 = 8.20$ cm, $m = 172$ g, $k = 2.80$ N/m, $\omega = 2.27$ rad/s.

SOLUZIONI

Problema 1. a) Poichè l'accelerazione è nulla, la risultante delle forze è nulla. Quindi abbiamo $mg - kx_0 = 0$, da cui si ricava

$$x_0 = mg/k = 7.36 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 7.36\,\mathrm{cm}.$$

b) Si può rispondere a tale domanda seguendo due diversi procedimenti.
b1) Sia $x_{\max}$ l'allungamento massimo della molla. Tale condizione si raggiunge quando la velocità della massa m è nulla. Subito dopo l'arresto della puleggia agiscono solo forze conservative per cui possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica:

$$K_f + U(\mathrm{molla})_f + U(\mathrm{grav})_f = K_i + U(\mathrm{molla})_i + U(\mathrm{grav})_i$$

da cui

$$\begin{aligned} K_i - K_f &= U(\mathrm{molla})_f - U(\mathrm{molla})_i + U(\mathrm{grav})_f - U(\mathrm{grav})_i \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 &= \frac{1}{2}k(x_{\max}^2 - x_0^2) - mg(x_{\max} - x_0). \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione per x_0 si ottiene l'equazione di secondo grado

$$kx_{\max}^2 - 2mgx_{\max} + (mg/k)^2 - mv_0^2 = 0.$$

Le soluzioni sono

$$x_{\max} = x_0 \pm v_0\sqrt{m/k} = \begin{cases} 3.03\,\mathrm{cm} \\ 11.7\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

La soluzione rilevante è chiaramente la maggiore per cui

$$x_{\max} = 11.7\,\mathrm{cm}.$$

b2) Subito dopo l'arresto della puleggia sulla massa m agiscono la forza elastica e la forza peso. Prendendo un asse x verticale orientato come la forza peso e con origine nell'estremo della corda connesso alla molla, abbiamo

$$ma(t) = mg - kx(t) = mg - k[x_0 + \delta_x(t)],$$

dove con $\delta_x(t) = x(t) - x_0$ indichiamo l'allungamento della molla rispetto alla condizione di equilibrio statico. Utilizzando il valore di x_0 ne segue

$$ma(t) = mg - k(mg/k) - k\delta_x(t) \quad \Rightarrow \quad ma(t) + k\delta_x(t) = 0.$$

Il moto del corpo connesso alla molla, rispetto ad un sistema di riferimento con origine nella posizione d'equilibrio, è quindi un moto armonico con legge oraria

$$\delta_x(t) = A\sin(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{k/m},$$

e quindi

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + x_0 = A\sin(\omega t + \phi) + mg/k.$$

Dalla condizioni iniziale $x(t=0) = x_0 = mg/k$ otteniamo $\phi = 0$. Dalla condizione $v(t = 0) = v_0 = A\omega = A\sqrt{k/m}$ otteniamo

$$A = v_0\sqrt{m/k}$$

per cui la legge oraria del moto è

$$x(t) = v_0\sqrt{m/k}\sin(\omega t) + mg/k.$$

Il valore massimo di $x(t)$ si ottiene per $\sin(\omega t) = 1$. Il risultato è uguale a quello trovato prima.
c) La massima tensione applicata alla fune equivale, in modulo, al massimo valore della forza elastica applicata alla massa m. Tale valore è dato da

$$F_{\max} = kx_{\max} = 2.34 \cdot 10^3\,\mathrm{N}.$$

Problema 2.
a) In queste condizioni la massa compie un moto circolare di raggio L e velocità angolare ω. L'unica forza radiale è la forza della molla. Quindi

$$m\omega^2 L = k(L - l_0) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}.$$

Numericamente abbiamo

$$L = \begin{cases} 15\,\mathrm{cm} & \text{Compito A,} \\ 12\,\mathrm{cm} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

b) Sul sistema agiscono la forza elastica $\mathbf{F}_{\mathrm{el}}$, la reazione vincolare della sbarra $\mathbf{R}_{\mathrm{sb}}$ e la forza peso $m\mathbf{g}$. L'equazione di Newton è quindi

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{el}} + \mathbf{R}_{\mathrm{sb}} + m\mathbf{g}. \tag{1}$$

È opportuno studiare il problema nel sistema noninerziale che ruota con velocità angolare ω nel quale la sbarra è ferma. La relazione tra le grandezza cinematiche nei due sistemi di riferimento sono date da (le grandezze con ' si riferiscono al sistema di riferimento ruotante)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{2}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2\mathbf{r}. \tag{3}$$

Calcoliamo da queste espressioni le componenti radiali. Per la velocità, dato che $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ha solo la componente tangenziale, abbiamo

$$v_r = v'_r.$$

Per le accelerazioni notiamo che $\mathbf{v}'$ ha solo la componente radiale (il moto avviene lungo la sbarra ferma) e quindi $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ha solo componente tangenziale. Quindi

$$a_r = a'_r - \omega^2 r.$$

Utilizziamo ora (1), notando che né la reazione vincolare (non vi è attrito) né la forza peso hanno componenti radiali. Quindi

$$m(a'_r - \omega^2 r) = -k(r - l_0).$$

Nel sistema rotante il moto è unidimensionale per cui

$$a'_r = \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Otteniamo quindi

$$m\frac{d^2r}{dt^2} + (k - m\omega^2)r = kl_0,$$

la cui soluzione è

$$r = \overline{r} + A\cos(\Omega t + \phi), \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}.$$

La quantità $\overline{r}$ è la posizione di equilibrio. Quindi, utilizzando il risultato calcolato al punto a), $\overline{r} = L$. La condizione $v_r(t=0) = v'_r(t=0) = 0$ implica $\phi = 0$. Infine $r(t=0) = L/2$ fornisce $A = -L/2$. Segue

$$r(t) = L - \frac{L}{2}\cos\Omega t.$$

Abbiamo quindi

$$v_r(t) = v'_r(t) = \frac{L\Omega}{2}\sin\Omega t$$

Il valore massimo richiesto si ottiene per $\sin\Omega t = 1$:

$$v_{\max} = \frac{L\Omega}{2} = \begin{cases} 0.50\,\mathrm{m/s} & \text{Compito A,} \\ 0.20\,\mathrm{m/s} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

c) Il massimo è raggiunto per $\sin\Omega t = 1$, ossia per

$$t_{\max} = \frac{\pi}{2\Omega}.$$

Numericamente

$$\Omega = \begin{cases} 6.68\,\mathrm{s}^{-1} & \text{Compito A,} \\ 3.34\,\mathrm{s}^{-1} & \text{Compito B,} \end{cases} \qquad t_{\max} = \begin{cases} 0.235\,\mathrm{s} & \text{Compito A,} \\ 0.471\,\mathrm{s} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

d) Calcoliamo le componenti tangenziali e verticali dell'accelerazione. Utilizzando (3) abbiamo

$$a_z = a'_z, \qquad a_{\mathrm{tg}} = a'_{\mathrm{tg}} + 2\omega v'_r$$

Nel sistema rotante il moto è lungo il raggio per cui

$$a'_z = 0, \qquad a'_{\mathrm{tg}} = 0,$$

per cui

$$a_z = 0, \qquad a_{\mathrm{tg}} = 2\omega v'_r.$$

Utilizziamo ora l'equazione di Newton (1). Dato che la forza elastica ha solo la componente radiale e la forza peso solo quella verticale otteniamo

$$0 = -mg + R_z, \qquad 2m\omega v'_r = R_{\mathrm{tg}}.$$

Possiamo quindi calcolare le componenti della reazione vincolare. La reazione vincolare radiale è nulla dato che non c'è attrito. Per le altre otteniamo

$$R_z = mg = \begin{cases} 1.25\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 1.69\,\mathrm{N} & \text{Compito B,} \end{cases} \qquad R_{\mathrm{tg}} = 2m\omega v_{\max} = \begin{cases} 1.16\,\mathrm{N} & \text{Compito A,} \\ 0.16\,\mathrm{N} & \text{Compito B.} \end{cases}$$

La reazione vincolare tangenziale può anche essere calcolata utilizzando l'equazione per il momento angolare. Il momento angolare assiale della massa è $p_z = m\omega r^2$. Quindi

$$\frac{dp_z}{dt} = 2m\omega r v_r.$$

L'unica forza che contribuisce al momento assiale è la reazione vincolare:

$$M_z = R_{\mathrm{tg}} r.$$

Quindi

$$\frac{dp_z}{dt} = M_z \qquad \Rightarrow \qquad 2m\omega r v_r = R_{\mathrm{tg}} r,$$

che è equivalente a quanto già trovato.