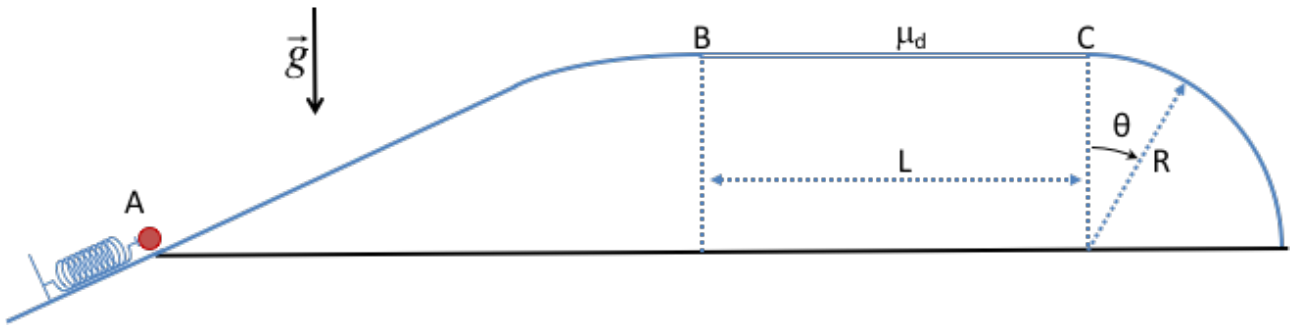
Esercizio n. 1

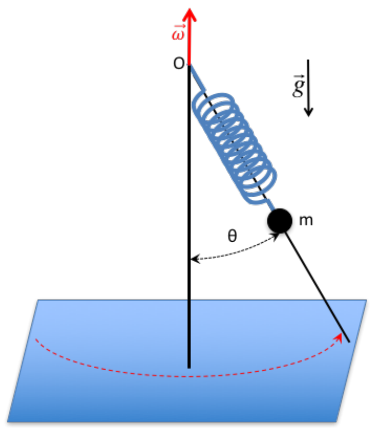
Un corpo di massa m comprime di Δx una molla di costante elastica k posta alla base (punto A) di una guida liscia inclinata. Nel punto B, posto ad una quota R rispetto ad A, la guida si raccorda con un piano orizzontale scabro di coefficiente di attrito dinamico μ_d e di lunghezza L, a sua volta raccordato nel punto C con una seconda guida circolare liscia di raggio R.
Si determini.

1) Il valore di k (k_1) per il quale il punto materiale raggiunge il punto B con velocità nulla.
2) Il valore di k (k_2) per il quale il punto materiale raggiunge il punto C con velocità nulla.
3) Se la molla ha una costante elastica k_3=1.2×k_2, determinare quanto spazio viene percorso dal punto materiale lungo la seconda guida liscia prima che si abbia il distacco.
4) La velocità v_f con cui il punto materiale raggiunge il suolo nelle condizioni del punto 3).

Dati numerici: m=1.2 kg; Δx=3.4cm; R=12.5cm; μ_d =0.3; L =21cm;



Esercizio n. 2



Una pallina di massa m è vincolata a muoversi su una guida rettilinea inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale. La guida è fissata nel punto O ad un asse verticale ed è mantenuta in rotazione, con velocità angolare ω costante, attorno all'asse stesso. La guida ha massa trascurabile ed è liscia, cioè non sono presenti forze di attrito.
La pallina è connessa all'estremità di una molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla fissata, all'altro estremo, al punto O (figura).
Calcolare:

1. la posizione di equilibrio (distanza da O) quando la pallina è ferma rispetto al sistema di riferimento in moto;
2. la reazione vincolare esercitata dalla guida sulla pallina nella posizione di equilibrio;
3. il periodo delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Supponendo infine che la pallina oscilli con ampiezza A_0 intorno alla posizione di equilibrio calcolare:

4. la reazione vincolare, applicata dalla guida alla pallina, quando la velocità della pallina (in modulo) nel sistema di riferimento mobile è massima.

Dati numerici: m = 20 g, θ = 30°, ω = 2,0 rad/s, k = 1,0 N/m, A_0 = 3,0 cm.

Esercizio n. 1 – Soluzione

1) Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B si ricava direttamente il valore di k_1:

$$k_1 = \frac{2mgR}{\Delta x^2} = 2546 N/m$$

2) Uguagliando il lavoro fatto dalle forze di attrito nel tratto BC alla variazione di energia meccanica tra A e C si ottiene direttamente il valore di k_2:

$$k_2 = \frac{2mg}{\Delta x^2}\left(R + \mu_d L\right) = 3829 N/m$$

3) Introducendo l'angolo θ per individuare la posizione della massa oltre il punto C (θ=0 nella posizione C) si ha il distacco in corrispondenza di qual valore di θ per cui si annulla e cambia di segno la reazione vincolare fornita dal profilo. La condizione da imporre è dunque:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2(\theta)}{R}$$

Determiniamo $v^2(\theta)$ applicando la conservazione dell'energia meccanica tra il punto C e la generica posizione corrispondente all'angolo θ.

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR\cos\theta$$

da cui

$$v^2(\theta) = v_C^2 + 2gR(1-\cos\theta)$$

Per determinare il valore di v_c utilizziamo di nuovo l'uguaglianza tra il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto BC e la differenza delle energie meccaniche tra A e C utilizzando in questo caso la molla con costante k_3.

$$-\mu_d mgL = mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}k_3\Delta x^2$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}(k_3 - k_2)\Delta x^2$$

$$v_C = \sqrt{\frac{0.2k_2\Delta x^2}{m}} = 0.858 m/s$$

Sostituendo nell'equazione iniziale ricaviamo direttamente il valore di $\cos\theta_d$ per cui si ha il distacco:

$$\cos\theta_d = \frac{v_C^2}{3Rg} + \frac{2}{3} = 0.867$$

$$\theta_d = 29.9^o$$

Allo stesso risultato si giunge uguagliando la variazione di energia meccanica tra il punto A e il punto di distacco al lavoro negativo fatto dalla forza di attrito dinamico:

$$mgR\cos\theta_d + \frac{1}{2}mv^2(\theta_d) - \frac{1}{2}k_3\Delta x^2 = -\mu_d mgL$$

da cui

$$v^2(\theta_d) = \frac{k_3\Delta x^2}{m} - 2g(R\cos\theta_d + \mu_d L)\ .$$

Uguagliando questa alla relazione ottenuta per il distacco $v^2(\theta) = gR\cos\theta$

si ottiene:

$$\cos\theta_d = \frac{k_3 \Delta x^2}{3Rgm} - \frac{2\mu_d L}{3R} = 0.867$$

Lo spazio percorso lungo la guida prima del distacco sarà dunque:

$$l_d = \theta_d R = 6.5cm$$

4) La velocità v_f con cui la massa tocca terra non dipende dalla traiettoria ma solo dalla conservazione dell'energia meccanica. La applichiamo di nuovo tra il punto C e il punto di contatto a terra.

$$\frac{1}{2} m v_C^2 + mgR = \frac{1}{2} m v_f^2$$

da cui ricaviamo:

$$v_f = \sqrt{v_C^2 + 2gR} = 1.78 m/s$$

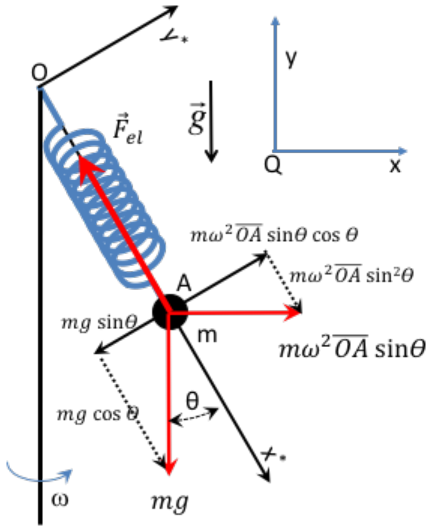
Anche in questo caso si ottiene lo stesso risultato uguagliando la variazione di energia meccanica tra il punto A e il suolo al lavoro negativo fatto dalla forza di attrito dinamico:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k_3 \Delta x^2 = -\mu_d mgL$$

da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{k_3 \Delta x^2}{m} - 2\mu_d gL} = 1.78 m/s \ .$$

Esercizio n. 2 – Soluzione



Assumiamo due sistemi di assi cartesiani: il sistema (Q, x, y) inerziale ed il sistema (O, x*, y*) in rotazione solidale con la guida, e quindi non inerziale.

La prima equazione cardinale della meccanica applicata alla pallina fornisce (in un sistema di riferimento inerziale):

$\vec{F}_{el} + m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$

Nel sistema di riferimento ruotante l'accelerazione è pari a:

$\vec{a}^* = \vec{a} - \vec{a}_\tau = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_{el} + m\vec{g} + \vec{R}\right) - \vec{a}_\tau$ dove "l'accelerazione trascinamento" $\vec{a}_\tau$ è l'accelerazione centripeta che caratterizza, nel S.R. inerziale, il moto della massa m in rotazione attorno all'asse verticale lungo una circonferenza di raggio $r = \overline{OA}\sin\theta$:

$\vec{a}_\tau = -\omega^2 r\,\hat{\imath} = -\omega^2\overline{OA}\sin\theta\,\hat{\imath}$.

La pallina è ferma rispetto al sistema di riferimento in moto ($v_x^* = 0$) ed in condizioni di equilibrio ($a_x^* = 0$). Nel S.R. (O, x*, y*) abbiamo quindi:

$$0 = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_{el} + m\vec{g} + \vec{R}\right) - \vec{a}_\tau = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_{el} + m\vec{g} + \vec{R}\right) + \omega^2\overline{OA}\sin\theta\,\hat{\imath}$$

1) Proiettando tale equazione sull'asse x* abbiamo

$$-kx_{eq}^* + m\omega^2 x_{eq}^* sin^2\theta + mg\cos\theta = 0$$

da tale relazione ricaviamo $x_{eq}^* = \frac{mg\cos\theta}{k - m\omega^2 sin^2\theta}$ = 0,17 m

2) Proiettando la relazione vettoriale sull'asse y* otteniamo:

$$R = m\omega^2 x_{eq}^*\sin\theta\,\cos\theta - mg\sin\theta = -9{,}2\cdot10^{-2}\ \text{N}$$

3) Se la pallina è in moto lungo la guida la proiezione dell'equazione per le forze lungo l'asse x* fornisce: $m\ddot{x}^* = -kx^* + m\omega^2 x^* sin^2\theta + mg\cos\theta$ da tale formula si ricava :

$m\ddot{x}^* + kx^* - m\omega^2 x^* sin^2\theta - mg\cos\theta = 0$ e sostituendo

$mg\cos\theta = x_{eq}^*(k - m\omega^2 sin^2\theta)$ si ottiene

$m\ddot{x}^* + x^*(k - m\omega^2 sin^2\theta) - x_{eq}^*(k - m\omega^2 sin^2\theta) = 0$ quindi :

$m\ddot{x}^* + \left(x^* - x_{eq}^*\right)(k - m\omega^2 sin^2\theta) = 0$

che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{k - m\omega^2 sin^2\theta}{m}}$ =7,0 rad/s e periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ = 0,90 s e con legge oraria $x^*(t) = A_0\sin(\Omega t + \varphi)$.

4) Nel sistema di riferimento ruotante (O, x*, y*), sulla massa *m* in moto lungo la guida agisce anche la forza di Coriolis $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}^*$ normale al piano (x*, y*):

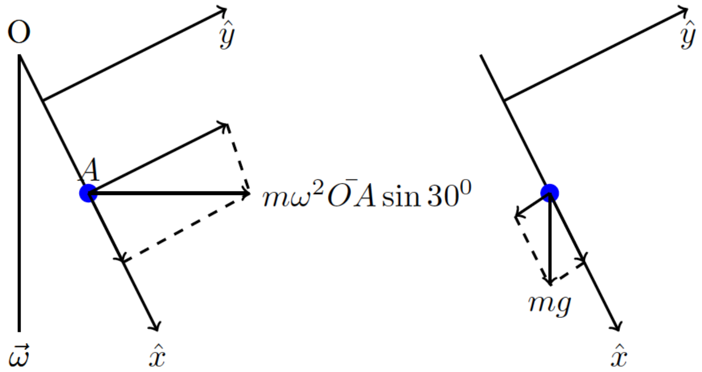
$\vec{F}_{Cor} = 2m\omega v^*\sin(\pi - \theta)\,\hat{k}^* = 2m\omega v^*\sin\theta\,\hat{k}^*$. La legge con cui varia la velocità nel S.R. (O, x*, y*) si ottiene derivando la legge oraria del moto: $v^*(t) = \Omega A_0\cos(\Omega t + \varphi)$ per cui il suo valore massimo è $v_{max}^* = \Omega A_0$=0,21 m/s

La massa *m* assume la massima velocità quando transita (durante l'oscillazione) nel punto a distanza x_{eq}^* dal punto O. In tal punto abbiamo già calcolato la reazione della guida sulla massa in caso di $\vec{v}^* = 0$, quando invece la massa *m* è in moto la guida deve compensare anche la Forza di Coriolis pertanto la reazione totale delle guida è

$\vec{R}_{tot} = m\sin\theta\left(\omega^2 x_{eq}^*\cos\theta - g\right)\hat{\jmath}^* - 2m\omega\,\Omega A_0\sin\theta\,\hat{k}^* = -92\cdot10^{-3}\hat{\jmath}^* - 8{,}4\cdot10^{-3}\hat{k}^*$.

La reazione totale che la guida esercita sulla massa *m* ha quindi modulo $R_{tot} = 92{,}4\cdot10^{-3}$ N

Esercizio n. 2 – Soluzione



Quando la pallina e' in equilibrio nel sistema di riferimento mobile, su di essa agiscono la forza peso, la forza centrifuga, la forza di richiamo della molla e la reazione vincolare.

La risultante di queste forze deve essere nulla sia lungo la guida (asse $\hat{x}$) che in direzione perpendicolare ad essa (asse $\hat{y}$).

---

1. Lungo $\hat{x}$ abbiamo:
   $-k\bar{OA} + m\omega^2\bar{OA}\sin 30^0 \cos 60^0 + mg\cos 30^0 = 0$,
   da cui si ricava imediatamente la risposta al primo quesito:
   $x_{eq} = \bar{OA} = \frac{mg\cos 30^0}{k - m\omega^2(\sin 30^0)^2} = 0.17$ m

2. Detta R la reazione vincolare della guida, proiettando l'equaiuone delle forze lungo $\hat{y}$ otteniamo:
   $R = m\omega^2\bar{OA}\sin 30^0 \cos 30^0 - mg\sin 30^0 = -0.094$ N.

3. Per rispondere al terzo quesito scriviamo l'equazione del moto:

   $-kx + m\omega^2 x\sin 30^0 \cos 60^0 + mg\cos 30^0 = m\ddot{x}$,
   che e' equivalente a:

   $m\ddot{x} + [k - m(\omega\sin 30^0)^2](x - x_{eq}) = 0$.

   Questa e' l'equazione del moto di un oscillatore con frequenza
   $\Omega = \sqrt{\frac{k - m(\omega\sin 30^0)^2}{m}} = 7.0$ rad/s.

4. Per rispondere all'ultimo quesito basta aggiungere la forza di Coriolis $F_c = -2m\omega \times v'$ al computo della reazione vincolare R. $\vec{R'} = R\hat{y} + 2m\omega v' sin(30^0)\hat{z}$.

   Per calcolare $v' = |\vec{v}'|$ scriviamo la soluzione dell'equazione del moto : $x(t) = A_0\sin(\Omega t + \phi)$

   Quindi $v'(t) = |\vec{v}'(t)|$ risulta essere: $\dot{x} = A_0\Omega\cos[\Omega t + \arcsin(\frac{x_{eq}}{A_0})]$, il cui valore massimo é $v'_{max} = \Omega A_0$.

   Perciò:
   $\vec{R'} = R\hat{y} + m\omega\Omega A_0\hat{z}$
   con $m\omega\Omega A_0 = 0.0084$ N.