All'interno del pianeta terra è praticato un tunnel diametrale di sezione trascurabile. Un corpo puntiforme di massa m può cadere senza attrito all'interno del tunnel. Tale corpo viene abbandonato all'entrata del tunnel a velocità nulla.

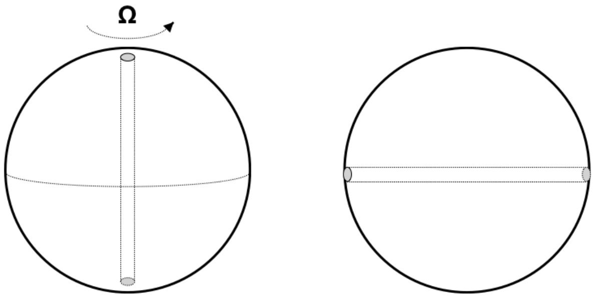
1. Se il tunnel è parallelo all'asse di rotazione della terra, calcolare l'equazione oraria del punto materiale.

Se invece il tunnel è scavato parallelamente al piano equatoriale, calcolare:

2. la nuova equazione oraria;
3. la velocità del corpo quando esso giunge al centro della terra;
4. la reazione vincolare esercitata dalle pareti del tunnel quando il corpo si trova a $R_T/2$ dal centro della terra.

Nota: la forza gravitazionale all'interno della terra è radiale e ha la forma $F(r) = -\frac{GM_T m}{{R_T}^3} r$

[G$\boldsymbol{M_T/R_T^3}$=1.52 10^{-6} s^{-2} ; $\boldsymbol{R_T}$=6.4 10^6 m; $\boldsymbol{m}$ = 80 kg; $\boldsymbol{\Omega}$ = 2π / giorno]



Soluzione

Prendiamo un S.R. con asse x parallelo all'asse di rotazione terrestre con verso orientato come la velocità iniziale del punto materiale ed origine nel centro della Terra. Al tempo t=0 sia *x(t=-R)*=0 e $\dot{x}(t=0)=0$. Sul punto agisce solo la forza gravitazionale $\vec{F} = m\vec{a}$ che proiettata sull'asse del moto fornisce $F_x = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T^3}x(t) = m\ddot{x}(t)$. Definendo $k = \frac{G\,M_T\,m}{R_T^3}$ possiamo scrivere l'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$ la cui soluzione ci fornisce la legge del moto del punto materiale $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo $A = R_T$; $\varphi = 0$ per cui la legge oraria del moto è data da:

1) $x(t) = R_T cos(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T^3}}$ = 1,23 10^{-3} rad/s quindi $T = \frac{2\pi}{\omega}$=5,1 10^3s
2) Ora il tunnel, e quindi l'asse x, è lungo un diametro orizzontale della Terra. Il sistema di riferimento in cui studiamo il moto ha quindi assi x ed y orizzontali, asse z verticale, origine nel centro della Terra. Tale S.R. ruota, con velocità angolare Ω=7,27 ·10^{-5} rad/s assieme alla Terra quindi è non inerziale. In tale S.R. la seconda equazione della meccanica può essere scritta tenendo conto anche della forza apparente (centrifuga) $m\Omega^2 x(t)$:
   $-\frac{G\,M_T\,m}{R_T^3}x(t) + m\Omega^2 x(t) = m\ddot{x}(t)$ che può essere riscritta nella forma :
   $\ddot{x}(t) + \left(\frac{G\,M_T}{R_T^3} - \Omega^2\right)x(t) = 0$ Il moto del punto materiale in questo tunnel "orizzontale" quindi è nuovamente quello di un oscillatore armonico con pulsazione
   $\omega_H = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T^3} - \Omega^2}$=1,23 10^{-3} rad/s e legge oraria $x_H(t) = R_T cos(\omega_H t)$
3) La legge con cui varia velocità del punto materiale nel suo moto verso il centro della terra è $\dot{x}_H(t) = -\omega_H R_T sin(\omega_H t)$ che, in modulo, raggiunge il valore massimo quando $x_H(t)$=0, cioè quando $|\dot{x}_H(t)| = \omega_H R_T$=7,84 10^3m/s
4) Il punto materiale è in moto in un sistema di riferimento in rotazione e pertanto su di esso agisce la Forza di Coriolis: $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ dove v è la velocità con cui il punto

si muove quando ha raggiunto la posizione $x = \frac{R_T}{2}$. $\vec{F}_{Coriolis}$ sarà ortogonale ad x e z quindi perpendicolare al tunnel. Per calcolare la velocità nella posizione $x = \frac{R_T}{2}$ possiamo calcolare per quale tempo (t^*) tale posizione è raggiunta $\frac{R_T}{2} = R_T cos(\omega_H t^*)$ da cui $t^* = \frac{1}{\omega_H} arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3\omega_H}$=8,51 10^2s . La velocità assume il valore $\dot{x}_H(t^*) = -\omega_H R_T sin(\frac{\pi}{3})$=-6,78 10^3m/s . Pertanto la reazione del tunnel, opposta alla Forza di Coriolis, ha modulo $\left|\vec{N}\right| = |2m\Omega\dot{x}_H(t^*)|$=78,9 N