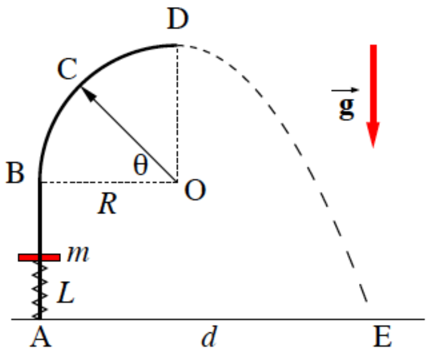
Esercizio 1. Si consideri la guida riportata in figura, formata da un tratto verticale AB di lunghezza h, seguito da un quarto di circonferenza di raggio R (tratto BD). Sulla guida è avvolta una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0. Inizialmente la molla è tenuta compressa (la sua lunghezza è pari a L) e spinge un anellino di massa m e dimensioni trascurabili. La molla viene lasciata libera di estendersi e lancia verso l'alto l'anello. Non vi è attrito tra la guida e l'anello.



Si calcoli: a) la velocità dell'anello e la reazione vincolare della guida nel punto C (il raggio OC forma un angolo θ con l'orizzontale); b) la velocità della pallina nel punto D in cui l'anello lascia la guida; c) la distanza $d = AE$, dove E è il punto di ricaduta dell'anello alla stessa quota di A. Dati numerici: $g = 9.81$ m/s^2, $h = 60.0$ cm, $R = 19.5$ cm, $k = 800$ N/m, $l_0 = 12.0$ cm, $L = 9.0$ cm, $m = 40.0$ g, $\theta = 45°$.

Esercizio 1. a) Si conserva l'energia meccanica. Quindi

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mg(h + R\sin\theta) = mgL + \frac{1}{2}k(L - l_0)^2 ,$$

da cui

$$v_C = \sqrt{2g(L - h - R\sin\theta) + k(L - l_0)^2/m} = 2.30\,\mathrm{m/s}.$$

Per calcolare la reazione vincolare R_n, notiamo innanzitutto che il moto è circolare per cui l'accelerazione radiale è pari a v_c^2/R. Assumendo che la reazione vincolare R_n sia centripeta, proiettando l'equazione di Newton sul versore radiale, otteniamo

$$R_n + mg\sin\theta = mv_C^2/R,$$

da cui

$$R_n = mv_C^2/R - mg\sin\theta = 0.81\,\mathrm{N}.$$

b) Il calcolo è analogo a quello svolto al punto a):

$$v_D = \sqrt{2g(L - h - R) + k(L - l_0)^2/m} = 2.04\,\mathrm{m/s}.$$

c) Prendiamo un sistema di coordinate con origine in A. La legge oraria è

$$x = R + v_D t, \qquad y = R + h - \frac{1}{2}gt^2.$$

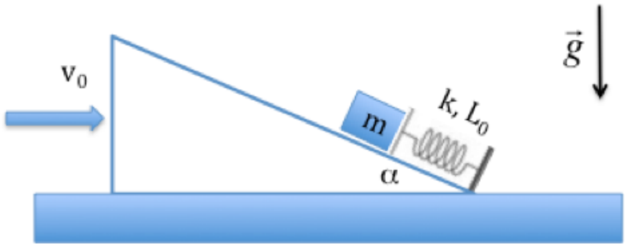
Dato che $y_E = 0$, l'anello passa per E al tempo

$$t_E = \sqrt{2(R + h)/g} = 0.40\,\mathrm{s}.$$

Quindi

$$d = x_E = R + v_D t_E = 1.02\,\mathrm{m}.$$

Un cuneo triangolare con angolo alla base α si muove su un piano orizzontale liscio inizialmente con velocità costante v_0. Dall'istante t_o=0 e fino all'istante t_f il cuneo viene bruscamente frenato, con accelerazione costante, fino a fermarsi. All'estremità inferiore del cuneo una molla ideale di costante k e lunghezza a riposo L_0 è fissata ad un supporto solidale al cuneo come in figura, ed un corpo di massa m è fissato all'estremità libera della molla.



Si determini:

1. la contrazione δL della molla e la reazione vincolare N del cuneo durante la fase di moto a velocità costante sapendo che durante tale moto la massa m è inizialmente ferma, e rimane ferma, rispetto al cuneo stesso;
2. la reazione vincolare N^* del cuneo durante la fase di frenamento e la contrazione δL^* della molla che fornirebbe per la massa m, durante la fase di frenamento, la condizione di equilibrio rispetto al cuneo;
3. il periodo delle oscillazioni, T, della massa m
4. la quota h rispetto al piano orizzontale della massa m al tempo t*=T/2.

Dati numerici: α=30°, v_0=25 m/s, k=60 N/m, L_0=15 cm, m=250 g, t_f=2 s

Soluzione

Assumiamo un sistema di assi cartesiani, solidale con il cuneo, con x orizzontale e verso concorde a $\vec{v}_0$ ed asse y verticale rivolto verso l'alto.

1) Quando il cuneo si muove a velocità costante il sistema di riferimento è inerziale. In tale sistema di riferimento le forze agenti sulla massa m sono la forza peso $m\vec{g}$, la forza elastica fornita dalla molla $\vec{f}_{el} = -k\overrightarrow{\delta L}$ e la reazione normale del cuneo $\vec{N}$; si ha cioè:
$m\vec{g} + \vec{N} - k\overrightarrow{\delta L} = m\vec{a}$. Visto che la massa è, e resta, ferma rispetto al cuneo si deve avere $m\vec{g} + \vec{N} - k\overrightarrow{\delta L} = 0$; proiettando tale relazione vettoriale lungo l'ipotenusa del cuneo e lungo la direzione ortogonale abbiamo:
$mg\ sin\alpha - k\delta L = 0 \ \rightarrow\ \delta L = \frac{mg\ sin\alpha}{k}$=2,04•10^{-2} m
$N - mg\ cosa = 0 \rightarrow N = mg\ cos\alpha$=2,12 N.

2) Durante il moto frenato, che dura ΔT, il cuneo subisce una accelerazione costante, orizzontale $\vec{a}_\tau = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta T} = -\frac{v_0}{\Delta T}\hat{\imath}$. Il sistema di riferimento connesso al cuneo ora non è più inerziale: se $\vec{a}$ è l'accelerazione della massa m in un sistema di riferimento inerziale, nel sistema di riferimento connesso al cuneo l'accelerazione è $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_\tau$ cioè in tali condizioni $\vec{a}' = \frac{m\vec{g}+\vec{N}-k\overrightarrow{\delta L}}{m} - \vec{a}_\tau$. Durante il frenamento quindi la condizione di equilibrio della massa m rispetto al cuneo è garantita da
$\vec{a}' = 0 = \frac{m\vec{g}+\vec{N}-k\overrightarrow{\delta L}}{m} - \vec{a}_\tau = \frac{m\vec{g}+\vec{N}-k\overrightarrow{\delta L}}{m} + \frac{v_0}{\Delta T}\hat{\imath} = 0.$
Assumiamo un S.R. con asse ξ parallelo alla superficie del cuneo, asse η ortogonale ed origine nella posizione in cui la molla è a riposo a distanza L_0 dal punto più basso del piano inclinato (ξ misura la deformazione della molla). Definiamo $\delta L^* = \xi^* - L_0$ la compressione della molla che garantisce l'equilibrio fra le forze.

Proiettando la relazione vettoriale $\vec{f}^{tot} = m\vec{a}'$ lungo ξ ed η abbiamo:
$mg\ sin\alpha - k\delta L^* + m\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha = 0$ e $-mg\ cos\alpha + N^* + m\frac{v_0}{\Delta T}sin\alpha = 0.$
Dalla prima relazione otteniamo $\delta L^* = \frac{m}{k}\left(\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha + g\ sin\alpha\right)$=6,55•$10^{-2}$ m
dalla seconda otteniamo $N^* = m\left(g\ cos\alpha - \frac{v_0}{\Delta T}sin\alpha\right)$=0,56 N.

3) Nel sistema di riferimento ξ, η scriviamo $mg\ sin\alpha - k\xi + m\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha = m\ddot{\xi}$ da cui otteniamo $\ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = g\ sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha$ e quindi la legge oraria del moto, durante il frenamento del cuneo, è $\xi(t) = A\ cos(\omega t + \varphi) + \frac{m}{K}\left(g\ sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha\right)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$=15.5 rad/s. Il periodo delle oscillazioni della massa m è $T = \frac{2\pi}{\omega}$=0,41s. Le costanti A e φ per tale legge oraria del moto si trovano in base alle condizioni iniziali: al tempo t_0=0, quando inizia il frenamento del cuneo, $\xi(t_0) = \delta L$ e $\dot{\xi}(t_0) = 0.$
Dalla prima condizione otteniamo $\frac{mg\ sin\alpha}{k} = Acos\varphi + \frac{m}{K}\left(g\ sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha\right)$, dalla seconda $-\omega A\ sin\varphi = 0$ e quindi $\varphi = \pi$ ed $A = \frac{m}{K}\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha$=4,51•$10^{-2}$ m.
Si noti che $A = \delta L^* - \delta L$.
La legge del moto è $\xi(t) = \frac{m}{K}\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha\ cos(\omega t + \pi) + \frac{m}{K}\left(g\ sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha\right).$

4) Per t*=T/2 (si noti che t*<t_f siamo nella fase in cui il cuneo è accelerato) si ha $\omega t^* = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = \pi$ quindi $\cos(\omega t^* + \pi) = 1$ e $\sin(\omega t^* + \pi) = 0$: la massa m cioè ha compiuto una semi-oscillazione.
Ne segue che $\xi(t^*) = \frac{m}{K}\frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha + \frac{m}{K}\left(g\ sin\alpha + \frac{v_0}{\Delta T}cos\alpha\right) = 2\delta L^* - \delta L$ e
$\dot{\xi}(t^*) = \omega A\ \sin(\omega t^* + \pi) = 0$.
La quota della massa m rispetto alla base del cuneo è quindi
$h = [L_0 - \xi(t^*)] * \sin(\alpha) = [L_0 - 2\delta L^* + \delta L] * \sin(\alpha)$ = 2.0•10^{-2} m