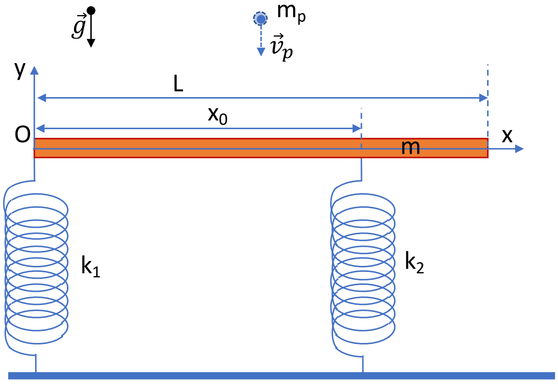
Una sbarra omogenea di massa m e lunghezza L è sorretta da due molle di costanti elastiche k_1 e k_2, la prima è attaccata ad un estremo della sbarra, la seconda in un punto a distanza x_0 dall'estremità, come mostrato in figura. Entrambe le molle hanno lunghezza a riposo l. Si calcoli:



1) il punto di applicazione x_0 della seconda molla, affinché la sbarra risulti perfettamente orizzontale
2) la compressione delle molle nelle condizioni indicate al punto 1).
3) All'istante iniziale un corpo puntiforme di massa m_p urta, con velocità v_p verticale, la sbarra nel suo centro, rimanendovi incastrato. Determinare il moto del sistema dopo l'urto.
4) Si sostituisca la prima molla (k_1) con un vincolo rigido (un perno orizzontale) attorno a cui la sbarra può ruotare senza attrito. Anche in questo caso la sbarra sia inizialmente orizzontale, con la molla 2 allungata come nel punto 2. La sbarra subisce un urto con m_p nelle stesse condizioni indicate al punto 3. Si determini nuovamente la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto.

Dati numerici
m = 12.4 kg ; L = 80 cm ; k_1 =157 Nm^{-1} ; k_2= 350 Nm^{-1} ; m_p = 5.6 kg ; v_p = 4.5 ms^{-1} ;

1,2) Affinché l'asta rimanga in equilibrio devono verificarsi le due condizioni $\sum \vec{F} = 0$ e $\sum \vec{M} = 0$. Assumiamo un asse x orizzontale con origine in O, orientato come in figura, e l'asse y verticale. Proiettando la prima equazione lungo l'asse y otteniamo:

$$k_1 \Delta y_1 + k_2 \Delta y_2 - mg = 0$$

Calcolando i momenti delle forze rispetto la punto O, dalla seconda equazione otteniamo

$$x\, k_2 \Delta y_2 - mg\, L/2 = 0.$$

Se l'asta deve essere orizzontale $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$ e pertanto dalla prima equazione ricaviamo $\Delta y = \frac{mg}{(k_1+k_2)}$ =0.24 m e quindi $x = \frac{mgL/2}{\frac{mg\, k_2}{(k_1+k_2)}} = \frac{L}{2}(1+\frac{k_1}{k_2})$= 0.58 m

3) Durante l'urto non ci sono forze impulsive per cui si conservano sia la quantità di moto che il momento della quantità di moto. Quest'ultimo, se calcolato rispetto al centro di massa della sbarra, è inizialmente nullo: l'asta dopo l'urto non ruota. Possiamo quindi calcolare la velocità del centro di massa del sistema immediatamente dopo l'urto (un vettore orientato come $-\hat{\jmath}$): $m_p v_p = (m+m_p) v_{CM}$ ossia $\vec{v}_{CM} = -\frac{m_p v_p}{m+m_p}\hat{\jmath}$ = -1.4 ms^{-1}.

Immediatamente dopo l'urto il sistema inizia ad oscillare come un corpo di massa $m+m_p$ connesso ad una molla con costante elastica $k = k_1+k_2$ il quale al tempo t=0 si trova al centro dell'oscillazione con velocità pari a v_{CM}. Se definiamo t=0 il tempo al momento dell'urto la legge del moto del centro di massa è data da:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

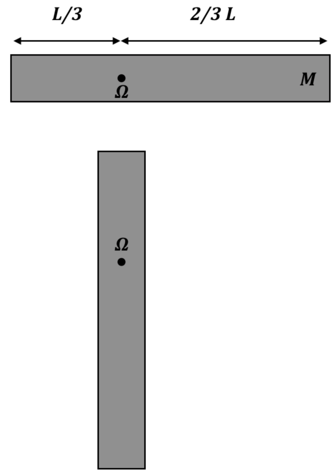
dove $\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+m_p}}$ =5.31 rad/s; $\varphi = \pi$; $A = \frac{v_{CM}}{\omega} = \frac{m_p v_p}{\sqrt{(k_1+k_2)(m+m_p)}}$ = 26.4·10^{-2} m

4) In questo caso il vincolo produce una reazione impulsiva e pertanto la quantità di moto del sistema non si conserva. Essendo il punto d'appoggio l'unica sorgente di forze impulsive si conserva invece il momento della quantità di moto calcolato rispetto al polo "O". Inizialmente la quantità di moto totale del sistema è data da $\vec{P}(t=0) = -m_P \frac{L}{2} v_P \hat{k}$. Subito dopo l'urto il sistema asta+proiettile ruota attorno al perno O e possiede un momento angolare $\vec{P}(t>0) = -I_{Tot_0}\omega_0 \hat{k}$ dove $I_{Tot_0} = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}m_p L^2$ e quindi $\omega_0 = \frac{m_P \frac{L}{2} v_P}{I_{Tot_0}}$ = 2.85 rad/s

Una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L può ruotare senza attrito intorno ad un asse orizzontale che dista $L/3$ da un suo estremo. Inizialmente la sbarretta è in posizione orizzontale e ferma. Ad un certo istante viene lasciata libera di ruotare e, poiché soggetta alla forza di gravità, raggiunge la quota minima. Si calcoli:

1) il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione;
2) la velocità angolare della sbarretta quando essa raggiunge la quota minima;
3) l'accelerazione del centro di massa della sbarretta all'istante iniziale (quando la sbarretta inizia a muoversi) e quando esso passa per la quota minima;
4) la reazione vincolare offerta dal perno all'istante iniziale (quando la sbarretta inizia a muoversi) e quando esso passa per la quota minima.

M=2 kg ; $L=0.15$ m



1) Il momento di inerzia è una grandezza estensiva. Quindi il momento di inerzia della sbarretta può essere calcolato come la somma del momento di inerzia di una sbarretta di lunghezza $L/3$ e quello di una sbarretta di lunghezza $2L/3$ che ruotano attorno ad un estremo. Dunque
$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}\frac{M}{3}(L/3)^2 + \frac{1}{3}\frac{2M}{3}(2L/3)^2 = \frac{1}{9}ML^2 = 5.00\ 10^{-3}\ kg\, m^2$$
Allo stesso risultato si arriva applicando il teorema di Huygens-Steiner $I=I_{CM} + Md^2$ dove
$I_{CM} = \frac{M}{12}L^2$ e $d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$ $\quad I = \frac{M}{12}L^2 + \frac{M}{36}L^2 = \frac{1}{9}ML^2$

2) L'energia meccanica si conserva. Il centro di massa della sbarretta cambia la propria quota di $L/6$ mentre l'energia cinetica è tutta rotazionale se il momento di inerzia è calcolato rispetto all'asse di rotazione. Quindi
$$\frac{MgL}{6} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 14.0\ rad/s$$

3) La sbarretta è soggetta a due sole forze: quella di reazione vincolare e quella peso. Il centro di massa compie una traiettoria circolare.
Nella posizione iniziale l'accelerazione centripeta è nulla perché la velocità è nulla. Quella tangenziale è legata all'accelerazione angolare secondo la relazione $a = \frac{L}{6}\alpha$. La seconda equazione cardinale per un polo sull'asse di rotazione si scrive come
$\frac{L}{6}Mg = I\alpha = \frac{1}{9}ML^2 a_i \frac{6}{L} = \frac{2}{3}MLa_i$ poiché la reazione vincolare ha momento nullo.
Si ottiene quindi
$a_i = \frac{g}{4} = 2.45\ m/s^2$.
Nel punto di minima quota, invece, è l'accelerazione tangenziale ad essere nulla perché non ci sono forze che fanno momento. Dunque l'accelerazione è centripeta e vale
$$a_f = \frac{L}{6}\omega^2 = 4.90\ m/s^2$$

4) Nella posizione orizzontale forza peso e reazione vincolare sono entrambe verticali poiché non c'è accelerazione centripeta orizzontale. Quindi il secondo principio si scrive come
$-N_i + Mg = Ma_i$ da cui si ottiene
$N_i = M(g - a_i) = 14.7\ N$
Anche nella posizione di minima quota forza peso e reazione vincolare sono entrambe verticali, poiché non c'è accelerazione tangenziale orizzontale. Quindi abbiamo
$-N_f + Mg = -Ma_f$ da cui si ottiene
$$N_f = M(g + a_f) = 29.4\ N$$