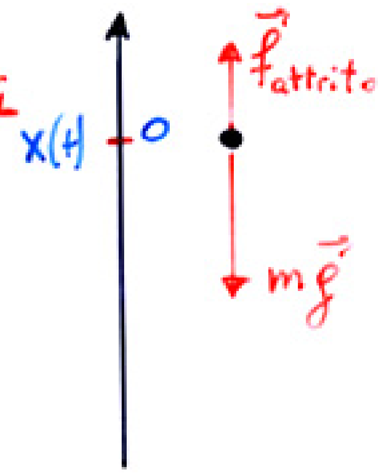
Un grave di massa m viene Lasciato cadere con velocità iniziale nulla $(v(t=0)=0)$ sotto l'azione del peso da una quota h

Supponiamo che la forza di resistenza dell'aria sia proporzionale alla velocità, con costante di proporzionalità K.

Trascurando la spinta di Archimede, calcolare:

1) La velocità limite v_L



$m = 100\ g \qquad h = 200\ m$

$K = 0.05\ N\ m^{-1} s^{+1}$

$g = 9.81\ m/s^2$

$x(t=0) = 0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0 \qquad \vec{f}_{attrito} = -K\vec{v}$

• • •

Se non ci fosse la resistenza dell'aria essendo il campo gravitazionale conservativo in ogni istante $K + U = cost \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$

quindi essendo $\dot{x}_i = 0$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}_f^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = -(mgx_f - mgx_i) =$$

$$= mg(x_i - x_f) = mg\Delta x$$

$$\dot{x}_f = \sqrt{2g\Delta x}$$

per la nostra ipotesi però

$$m\vec{a} = m\vec{\ddot{x}} = m\vec{g} + \vec{f}_{att} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{dove} \\ \vec{f}_{att} = -K\vec{\dot{x}}\end{array}\right)$$

proiettando sull'asse x

$$-m\ddot{x} = -mg + K\dot{x}$$

vediamo le dimensioni di K

$$K = \frac{f}{\dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{\dot{x}} = [M L T^{-2} (L T^{-1})^{-1}]$$

$$= [M L T^{-2} L^{-1} T] = [M T^{-1}]$$

$$m \frac{d}{dt}\dot{x} = mg - K\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{x} = g - \frac{K}{m}\dot{x}$$

$$d\dot{x} = \left(g - \frac{K}{m}\dot{x}\right) dt$$

vogliamo conoscere come varia $\dot{x}(t)$ quindi dobbiamo integrare. Dobbiamo separare le variabili

$$\frac{d\dot{x}}{g - \frac{K}{m}\dot{x}} = dt \qquad \left(\begin{array}{l}\text{INTEGRALE DA} \\ \dot{x} = 0 \quad \text{a} \\ \dot{x} = \dot{x}(t)\end{array}\right)$$

Cambio la variabile per semplicità

chiamiamo $\alpha = g - \frac{K}{m}\dot{x}$ $\left(\begin{array}{l}\text{per } \dot{x} = 0 \Rightarrow \alpha = g \\ \dot{x} = \dot{x}(t) \Rightarrow \alpha = g - \frac{K}{m}\dot{x}(t)\end{array}\right.$

allora

$$d\alpha = -\frac{K}{m} d\dot{x} \Rightarrow d\dot{x} = -\frac{m}{K} d\alpha$$

sostituendo

$$\frac{-\frac{m}{K} d\alpha}{\alpha} = dt$$

Integrando nei limiti di variabilità di α

$$\int_g^{g-\frac{K}{m}\dot{x}(t)} -\frac{m}{K}\frac{d\alpha}{\alpha} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{m}{K}\int_g^{g-\frac{K}{m}\dot{x}(t)} \frac{d\alpha}{\alpha} = t \Rightarrow \left[\ln\alpha\right]_g^{g-\frac{K}{m}\dot{x}(t)} = -\frac{K}{m}t$$

$$\ln\left(g-\frac{K}{m}\dot{x}(t)\right) - \ln g = -\frac{K}{m}t$$

$$\ln\left(\frac{g-\frac{K}{m}\dot{x}(t)}{g}\right) = -\frac{K}{m}t$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\ln\left(1-\frac{K}{mg}\dot{x}(t)\right)} = e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$1-\frac{K}{mg}\dot{x}(t) = e^{-\frac{K}{m}t}$$

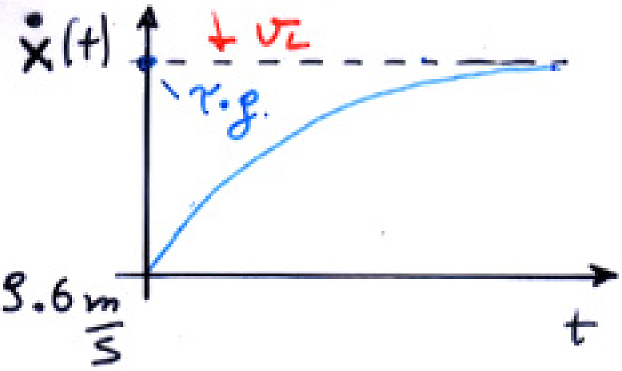
$$\dot{x}(t) = \frac{mg}{K}\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

chiamando $\tau = \frac{m}{K}$ $\quad [M\,M^{-1}T] = [T]$

si ottiene

$$\dot{x}(t) = \tau g\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \tau g \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



per $t \to \infty$

$$\dot{x}(t=\infty) = \tau g = \frac{mg}{K} = 19.6 \, \frac{m}{s}$$

Si raggiunge la velocita v_L tale che

$$\vec{f}_{attrito} = -m\vec{g}$$

$$-K\vec{v}_L = -m\vec{g}$$

$$\Rightarrow v_L = \frac{m}{K} g = \frac{0{,}1}{0{,}05} \cdot 9{,}81 = 19.62 \, \frac{m}{s}$$

$$\cong 70{,}6 \; Km/h$$

Integrando ancora

$$\frac{dx}{dt} = \tau g \left(1 - e^{t/\tau}\right)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\tau g} = \int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt = \int_0^t dt - \int_0^t e^{-t/\tau} dt$$

$$\int_0^t e^{-t/\tau} dt$$

cambiamo variabile

$$\alpha = t/\tau \Rightarrow \begin{array}{ll} t = 0 & \alpha = 0 \\ t = t & \alpha = t/\tau \end{array}$$

$$\int_0^t e^{-t/\tau} dt = \tau \int_0^{t/\tau} e^{-\alpha} d\alpha = \tau \left[-e^{-\alpha}\right]_0^{t/\tau} \qquad \boxed{dt = \tau \, d\alpha}$$

$$= -\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

$$x(t) = \tau g \left[t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right]$$

per $t \to \infty$ MOTO UNIFORME!