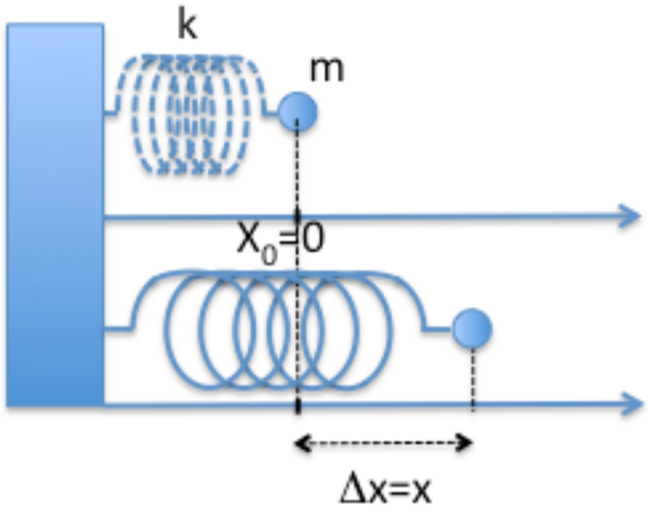
Supponiamo di avere una massa m connessa ad una molla. L'altro estremo della molla è connesso ad un vincolo. Quando la molla non è deformata il suo estremo libero si trova nella posizione $x_0 = 0$. Quando la molla è deformata applica sulla massa una forza proporzionale alla deformazione



$$\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta s}$$
$$F = -k\Delta x = -k(x - x_0).$$

Avendo assunto $x_0 = 0$ la variabile x rappresenta la deformazione della molla

$$F(t) = -kx(t).$$

Sulla massa m connessa all'estremo libero della molla tale forza provoca una accelerazione

$$F(t) = m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

ovvero abbiamo una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

Nel caso più generale tale equazione può essere del tipo

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

ed ammette due soluzioni del tipo

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove λ_1 e λ_2 sono le soluzioni della equazione caratteristica associata all'equazione differenziale

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

mentre C_1 e C_2 sono costanti da determinare in base alle condizioni specifiche del moto in esame.
Abbiamo quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nel nostro caso *a=m, b=0, c=k* e quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4km}}{2m} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La legge oraria del moto della massa *m* è quindi del tipo

$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ avendo definito $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. E' semplice verificare che la quantità $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ha le dimensioni di T^{-1}.

Ricordiamo che $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ e $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$. Sostituendo abbiamo

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = C_1(cos(\omega t) + i\, sin\,(\omega t)) + C_2(cos(\omega t) - i\, sin(\omega t)) = (C_1 + C_2)cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\, sin(\omega t)$$

La funzione x(t) rappresenta la legge oraria del moto della massa m e quindi deve essere reale. Dobbiamo quindi scegliere le costanti arbitrarie C_1 e C_2 in modo tale che nella x(t) non appaia alcun termine immaginario. In particolare scegliendo C_1 e C_2 complessi coniugati

$C_1 = A + iB$ e $C_2 = A - iB$ (abbiamo sostituito due costanti arbitrarie con altre due costanti)

otteniamo:

$$C_1 + C_2 = 2A \quad e \quad C_1 - C_2 = i2B$$

per cui sostituendo abbiamo

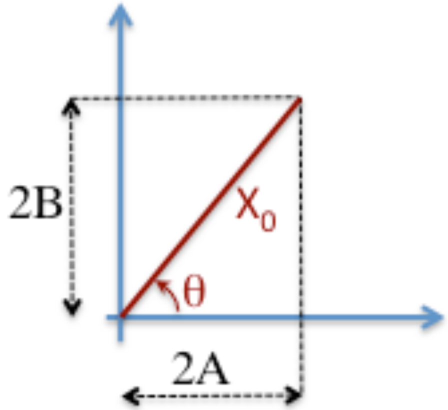
$$x(t) = (C_1 + C_2)cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\, sin(\omega t) = 2Acos(\omega t) - 2Bsin(\omega t)$$

A e B sono nuovamente costanti arbitrarie che possono essere espresse in coordinate polari con altre due costanti del tipo

$$2A = X_0 cos\theta \quad e \quad 2B = X_0 sin\theta$$

in tal modo arriviamo a scrivere

$$\boldsymbol{x(t) = 2Acos(\omega t) - 2Bsin(\omega t) = X_0[cos(\omega t)cos\theta - sin(\omega t)sin\theta] = X_0 cos(\omega t + \theta)}$$

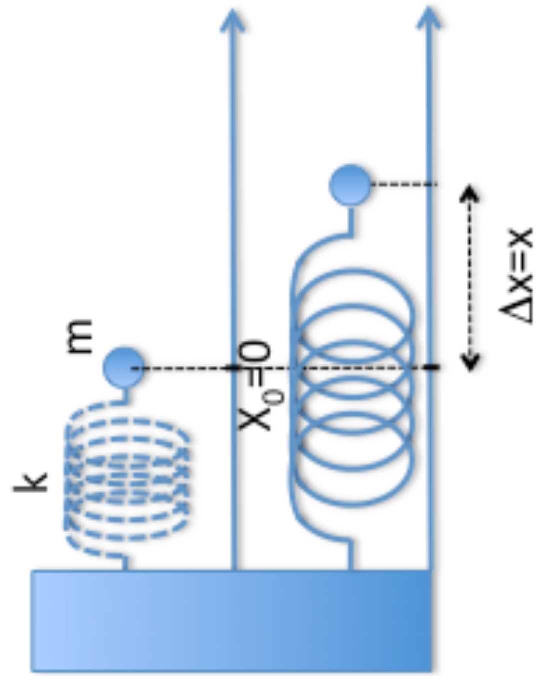


Dobbiamo ora verificare se la funzione $x(t) = X_0 cos(\omega t + \theta)$ può essere soluzione della equazione differenziale del II ordine $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$ che caratterizza il moto della massa m connessa alla molla.
Dobbiamo inoltre calcolare le due costanti X_0 e θ.
Calcoliamo la derivata seconda $\ddot{x}(t)$.
$\dot{x}(t) = -X_0\, \omega\, sin(\omega t + \theta)$ e quindi $\ddot{x}(t) = -X_0\, \omega^2\, cos(\omega t + \theta)$. Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo $-mX_0\, \omega^2\, cos(\omega t + \theta) + k\, X_0\, cos(\omega t + \theta) = 0$. Tale equazione è verificata per ogni valore di t se e solo se: $-m\omega^2 + k = 0$ e cioè se $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ma tale identità è verificata.

Per definire le due costanti arbitrarie X_0 e θ dobbiamo conoscere almeno due condizioni del moto. Se ad esempio sappiamo che all'istante iniziale la velocità della massa è=0 (massa ferma) e l'elongazione della molla è pari ad L allora possiamo scrivere:
$x(0) = X_0 cos(\theta) = L$ e $\dot{x}(0) = -X_0\, \omega\, sin(\theta) = 0$. Dalla seconda equazione ricaviamo $\theta = 0$ per cui dalla prima otteniamo $X_0 = L$.

La legge oraria del moto cercata è quindi:

$$\boldsymbol{x(t) = L\, cos(\omega t)}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$