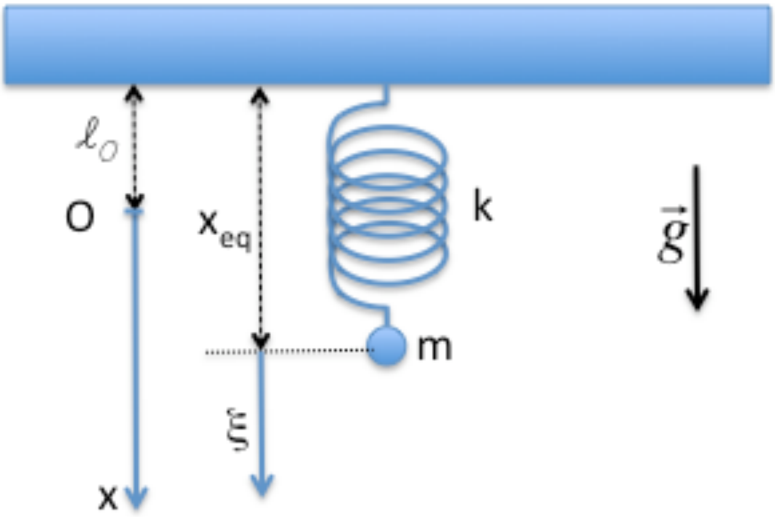
Un punto materiale di massa **m=5.5 kg** è connesso all'estremo libero di una molla che, all'altro estremo, è fissata al soffitto. La molla ha lunghezza a riposo pari ad **l_0 =30.5cm** e costante elastica **k=125N/m**.
Supponendo che per **t=0** il punto si trovi nella posizione **x(t=0)=55cm** e si muova con velocità $\dot{x}(t=0)=20cm/s$ si descriva la legge oraria del moto della massa m.



Assumiamo un sistema di riferimento con asse x verticale (come in figura) e con origine in corrispondenza della lunghezza a riposo della molla.

Sulla massa m agiscono la forza peso $m\vec{g}$ e la forza elastica $-kx\hat{x}$ (dove, per la scelta fatta, x rappresenta la deformazione della molla).

In generale quindi $m\vec{g}-kx\hat{x}=m\ddot{\vec{x}}$. Proiettando sull'asse x otteniamo $mg-kx=m\ddot{x}$.

Si ha equilibrio ($\ddot{x}=0$) quando $mg-kx_{eq}=0$ cioè per $x_{eq}=\frac{mg}{k}$=43.2cm.

Abbiamo quindi l'equazione $mg-kx=m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=g$ differenziale del II ordine a coefficienti costanti **non omogenea**. Tale equazione ammette una soluzione (x(t)) data dalla somma della soluzione **generale** della equazione differenziale del II ordine omogenea (la $x(t)=X_0\sin(\omega t+\varphi)$, con $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$=4.8 rad/s, soluzione di $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$) e la soluzione **particolare** della equazione "non omogenea" che si ottiene ponendo $\ddot{x}=0 \rightarrow \frac{k}{m}x=g \rightarrow x=\frac{mg}{k}$.

La soluzione della nostra equazione differenziale quindi è

$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{mg}{k}=A\sin(\omega t+\varphi)+x_{eq}$ con A e φ da determinare in base alla conoscenza delle condizioni iniziali del moto.

Possiamo altrimenti riscrivere la $mg-kx=m\ddot{x}$ nella forma

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x-g=0=\ddot{x}+\frac{k}{m}x-\frac{mg}{k}\cdot\frac{k}{m}=\ddot{x}+\frac{k}{m}x-x_{eq}\cdot\frac{k}{m}=\ddot{x}+\frac{k}{m}(x-x_{eq})=0.$$

Potremmo quindi decidere di cambiare variabile $\xi(t)=x(t)-x_{eq}$ ottenendo una nuova equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti $\ddot{\xi}(t)+\frac{k}{m}\xi(t)=0$ (ovviamente $\dot{\xi}(t)=\dot{x}(t)$ e $\ddot{\xi}(t)=\ddot{x}(t)$) che ammette come soluzione $\xi(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ con $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Quindi $x(t)=\xi(t)+x_{eq}=A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{mg}{k}$, la funzione già ottenuta.

La conoscenza della posizione e della velocità del punto materiale all'istante t=0 ci permette di definire le due costanti A e φ.

$$x(t=0)=A\sin(\varphi)+\frac{mg}{k}=0.55m \quad ; \quad \dot{x}(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}A\cos(\varphi)=0.2m/s$$

$$A\sin(\varphi)=0.55-\frac{mg}{k} \quad ; \quad A\cos(\varphi)=0.2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad ; \quad tg(\varphi)=\frac{0.55-0.432}{0.2}\sqrt{\frac{k}{m}}=2.82; \quad \varphi\cong 70^0 29'$$

e quindi A=0.126m.

Saremmo arrivati allo stesso risultato imponendo la conservazione della energia meccanica totale. Usiamo come riferimento l'asse x verticale con origine in corrispondenza della lunghezza a riposo della molla.

Quando il punto materiale è nella generica posizione x(t) con velocità $\dot{x}(t)$ la sua energia cinetica è data da $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$, l'energia potenziale elastica è data da $U_{el}=\frac{1}{2}kx^2(t)$ e l'energia potenziale gravitazionale $U_{peso}=-\mathrm{mgx(t)}$. Il segno negativo deriva dal fatto cha al crescere di *x* la U_{el} diminuisce. Infatti assumendo $U_{peso}=0$ per $x(t)=0$ si ha che per $x(t)>0$, spostamenti verso il basso, $U_{peso}=-mgx(t)$; per spostamenti verso l'alto, $x(t)<0$ la U_{peso} aumenta e vale $U_{peso}=mg|x(t)|$ oppure utilizzando il valore di $x(t)<0$ possiamo scrivere ancora $U_{peso}=-\mathrm{mgx(t)}$.

Applicando la conservazione della energia meccanica possiamo scrivere:

$$U_{peso}(t)+U_{el}(t)+K(t)=cost=-mgx(t)+\frac{1}{2}kx^2(t)+\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

Derivando questa eguaglianza si ha $-mg\dot{x}(t)+\frac{1}{2}k2x(t)\dot{x}(t)+\frac{1}{2}m2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)=0$ e quindi $\dot{x}(t)(-mg+kx(t)+m\ddot{x}(t))=0$ che è soddisfatta sempre per $\dot{x}(t)=0$ (caso banale) o per $-mg+kx(t)+m\ddot{x}(t)=0$ che ci riporta all'equazione inizialmente scritta partendo da $\vec{f}_{tot}=m\vec{a}$.