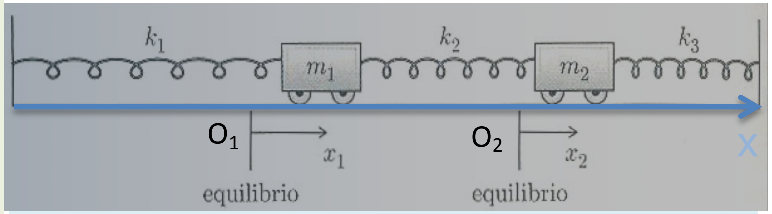
Oscillatori accoppiati e modi normali di vibrazione, 1

Abbiamo due carrelli, di massa m_1 ed m_2, capaci di muoversi senza attrito lungo la direzione x, connessi fra di loro da una molla con costante elastica k_2 ed a due vincoli rispettivamente dalle molle con costanti elastiche k_1 e k_3.
I Punti O_1 ed O_2 rappresentano le posizioni degli estremi delle molle k1 e k2 se non deformate, quindi x_1 e x_2 sono gli spostamenti dalla posizione di equilibrio rispettivamente del carrello 1 e 2.



Deformazione della molla 1: $\vec{x}_1$
forza applicata ad m_1: $-k_1\vec{x}_1$

Deformazione della molla 3: $\vec{x}_2$
forza applicata ad m_2 $-k_3\vec{x}_2$

Deformazione della molla 2 : $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$
forza applicata ad m_1 : $-k_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$
forza applicata ad m_2 : $-(-k_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) = k_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$

Proiettando quindi il moto sull'asse x abbiamo:
-sul carrello 1 agisce quindi la forza $-k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$
-sul carrello 2 agisce la forza $k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 = -(k_2 + k_3)x_2 + k_2x_1$

Possiamo quindi scrivere le equazioni che regolano il moto di m_1 ed m_2

$$m_1\ddot{x}_1(t) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \quad ; \qquad m_2\ddot{x}_2(t) = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

che possono essere espresse in forma matriciale introducendo

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \; ; \ddot{X}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} \; ; M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \; ; K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \text{ nella forma } M\ddot{X}(t) = -KX(t)$$

La matrice *M* è diagonale, la matrice *K* contiene termini al di fuori della diagonale principale: i due moti sono accoppiati. Se la costante k_2 fosse nulla torneremmo a due equazioni che, separatamente, rappresenterebbero i moti delle due masse.

Oscillatori accoppiati e modi normali di vibrazione, 2

Come già dimostrato per il semplice moto dell'oscillatore armonico possiamo ipotizzare che la legge oraria del moto delle due masse sia descritta da:

$per\ \mathrm{m}_1 : a_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega t - \delta_1)\ \ ;\ per\ \mathrm{m}_2 : a_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega t - \delta_2)$ ed anche da $per\ \mathrm{m}_1 :\ b_1(t) = \alpha_1 \sin(\omega t - \delta_1)\ \ ; per\ \mathrm{m}_2 :\ b_2(t) = \alpha_2 \sin(\omega t - \delta_2)$

quindi anche una combinazione lineare delle due soluzioni è ancora soluzione, in particolare assumiamo:

$$s_1(t) = a_1(t) + ib_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega t - \delta_1) + i\alpha_1 \sin(\omega t - \delta_1) \quad ; \quad s_2(t) = a_2(t) + ib_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega t - \delta_2) + i\alpha_2 \sin(\omega t - \delta_2)$$

Tali soluzioni possono essere scritte nella forma esponenziale

$$s_1(t) = \alpha_1 e^{i(\omega t - \delta_1)} = \alpha_1 e^{-i\delta_1} e^{i\omega t} \quad ; \quad s_2(t) = \alpha_2 e^{i(\omega t - \delta_2)} = \alpha_2 e^{-i\delta_2} e^{i\omega t}. \text{ In forma matriciale: } S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathrm{A} e^{i\omega t}$$

Ricordiamo che stiamo cercando la soluzione "reale" della coppia di equazioni differenziali del II ordine che, in forma matriciale abbiamo messo nella forma:

$$M\ddot{X}(t) = -KX(t) \text{ avendo definito } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \text{ e } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Possiamo provare ad inserire la soluzione ipotizzata, il "vettore" *S(t)*, nella equazione e, verificare le condizioni per cui *S(t)* soddisfa l'equazione differenziale. La legge oraria del moto, "reale" si otterrà prendendo la parte reale di S(t).

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(S(t)) = \mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo quindi la derivata prima e seconda di *S(t)* ed inseriamola nell'equazione differenziale del II ordine

$$\dot{S}(t) = \begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix} e^{i\omega t} = i\omega \mathrm{A} e^{i\omega t} = i\omega S(t) \quad ; \quad \ddot{S}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{s}_1(t) \\ \ddot{s}_2(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix} e^{i\omega t} = -\omega^2 \mathrm{A} e^{i\omega t} = -\omega^2 S(t)$$

Otteniamo: $-M\omega^2 S(t) + KS(t) \ = 0 \ = \left(K - M\omega^2\right) A e^{i\omega t} = 0\ che\ \grave{e}\ soddisfatta\ per\ ogni\ t\ se \left(K - M\omega^2\right) A = 0$

Ciò è vero se $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix} = 0$ (soluzione non significativa) o se $\det\left(K - M\omega^2\right) = 0$

Oscillatori accoppiati: modi normali di vibrazione nel caso di masse e molle uguali

$$\det\left(K - M\omega^2\right) = 0 = \det\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0 = (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2{}^2$$

L'equazione del II ordine in ω^2 ammette due soluzioni, ω_1^2 ed ω_2^2 Possiamo calcolare i valori di tali "pulsazioni" partendo da "casi semplici".
Supponiamo che $m_1 = m_2 = m$ ed ancora $k_1 = k_2 = k_3 = k$ In tali condizioni

$$\det\left(K\text{-}M\omega^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = (2k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 m) - k^2 = 3k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2 = 0$$

che, con pochi passaggi algebrici può essere messo nella forma: $(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) = 0$.

Il vettore *S(t)* è quindi soluzione delle equazioni differenziali per $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$ $e\ per$ $\omega = \omega_2 = \sqrt{3k/m}$.

Soluzioni con tali valori delle pulsazioni (gli "autovalori" ω_1 ed ω_2) sono le uniche possibili per un moto puramente oscillatorio: rappresentano *i Modi Normali di vibrazione* .

Abbiamo quindi trovato due soluzioni per le quali le due masse si muovono con moti oscillatori caratterizzati dalla stessa pulsazione: il **Modo Normale** (il **primo modo normale**) per cui **entrambe le masse oscillano con pulsazione** ω_1 e quello, (il **secondo modo normale**) per cui **entrambe le masse oscillano con pulsazione** ω_2 **.**

$$S_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}_{1,2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{bmatrix}_{1,2} e^{i\omega_{1,2}t} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{1,2} e^{i\omega_{1,2}t}$$

Dobbiamo ora determinare le costanti del moto, c_1 e c_2, per ognuno dei due modi normali.

Il primo modo normale di vibrazione

Prendiamo in esame il **Primo Modo Normale di Vibrazione**, caratterizzato da $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$. Ricordiamo che abbiamo supposto: $m_1 = m_2 = m$ ed ancora $k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$\left(K - M\omega_1^2\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega_1^2 m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega_1^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - \left(k/m\right)m & -k \\ -k & 2k - \left(k/m\right)m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} kc_1 - kc_2 = 0 \\ -kc_1 + kc_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = ce^{-i\delta}$$

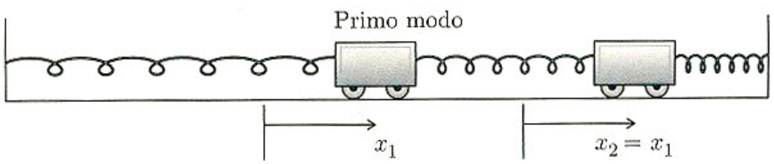
Quindi la soluzione generale, complessa, per il primo modo normale di vibrazione è data da $S_1(t) = \begin{bmatrix} ce^{-i\delta} \\ ce^{-i\delta} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} e^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \delta\right)}$

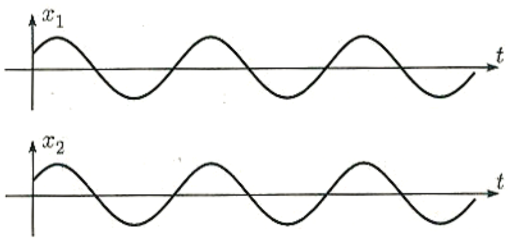
Ricordiamo che stiamo cercando una soluzione reale che descriva il moto, comune, dei due carrelli. Tale soluzione è data

da $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(S_1(t)) = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \delta\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1(t) = c \cdot \cos\left(\sqrt{k/m}\,t - \delta\right) \\ x_2(t) = c \cdot \cos\left(\sqrt{k/m}\,t - \delta\right) \end{cases}$$

I due carrelli oscillano in fase con la stessa pulsazione $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$ quindi è come se la molla 2 non ci fosse !!!, non viene né compressa né allungata.





Il secondo modo normale di vibrazione

Prendiamo in esame $m_1 = m_2 = m$ ed ancora $k_1 = k_2 = k_3 = k$ **e**, caratterizzato da $\omega = \omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Ricordiamo che

$$\left(K - M\omega_2^{\,2}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega_2^{\,2} m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega_2^{\,2} m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - \left(3k/m\right)m & -k \\ -k & 2k - \left(3k/m\right)m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

Quindi la soluzione generale, compl

$$\begin{cases} -kc_1 - kc_2 = 0 \\ -kc_1 - kc_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -c_2 = ce^{-i\delta}$$

$$S_1(t) = \begin{bmatrix} ce^{-i\delta} \\ -ce^{-i\delta} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t} = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} e^{i\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \delta\right)}$$

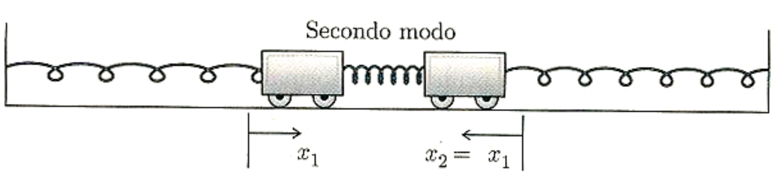
Ricordiamo che stiamo cercando una soluzione reale che descriva il moto, comune, dei due carrelli. Tale soluzione è data da

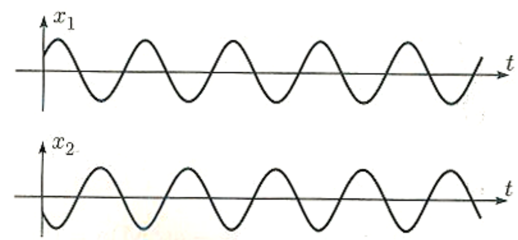
$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(S_1(t)) = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \delta\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = c \cdot \cos\left(\sqrt{3k/m}\,t - \delta\right) \\ x_2(t) = -c \cdot \cos\left(\sqrt{3k/m}\,t - \delta\right) \end{cases}$$

I due carrelli oscillano con fase opposta con la stessa pulsazione $\omega = \omega_2 = \sqrt{3k/m}$, il moto dei due carrelli è simmetrico.

La molla 2 viene periodicamente compressa ed allungata.
In ogni istante $x_1(t) = -x_2(t)$.





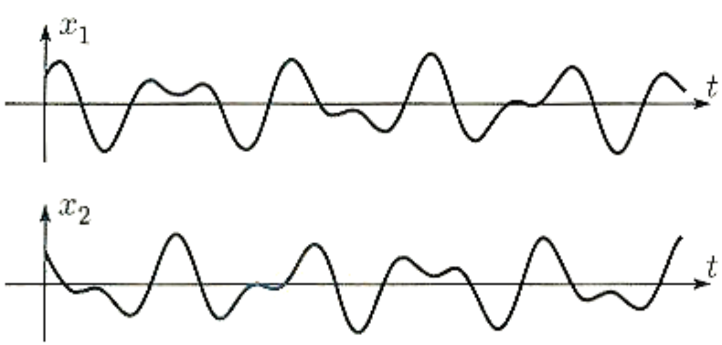
Il caso più generale

Entrambe le soluzioni $X(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \delta_1\right)$ e $X(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \delta_2\right)$ soddisfano l'equazione del moto. Le quattro costanti vanno determinate, come al solito, in base alle condizioni del moto specificate ad un istante qualsiasi.

Anche la combinazione lineare delle due soluzioni descrive il moto, non puramente oscillatorio, del sistema. In generale tale soluzione non è facile da descrivere ma è data da:

$$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \delta_1\right) + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \delta_2\right)$$

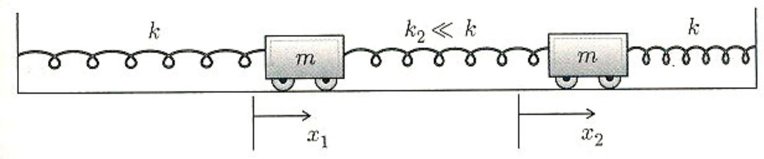
Tanto per fare un esempio, se *$C_1 = 1$, $C_2 = 0.7$, $\delta_1 = 0$ e $\delta_2 = \pi/2$* il moto dei due carrelli è rappresentato dal diagramma orario:



Moti che non corrispondono a puri modi normali di vibrazione sono meno semplici da trattare.

Oscillatori debolmente accoppiati, 1

Supponiamo ora che $m_1 = m_2 = m$, che $k_1 = k_3 = k$ e che $k_2 << k$
Ricordiamo che abbiamo scritto le equazioni del moto nel caso più generale:



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \;;\; \ddot{X}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} \;;\; M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \;;\; K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \text{ nella forma } M\ddot{X}(t) = -KX(t)$$

nel caso attuale abbiamo: $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \;;\; K = \begin{bmatrix} k + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k \end{bmatrix}$ e quindi $\left(K - M\omega^2\right) = \begin{bmatrix} k + k_2 - \omega^2 m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k - \omega^2 m \end{bmatrix}$

le condizioni che annullano il determinante di *(K-ω²M)* sono date da: $(k + k_2 - \omega^2 m)(k_2 + k - \omega^2 m) - k_2^{\,2} = (k - m\omega^2)(k + 2k_2 - m\omega^2) = 0$
e cioè:

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m} \quad e \quad \omega = \omega_2 = \sqrt{(k + 2k_2)/m}$$

Il primo modo normale coincide con quello già studiato (k_2 non interveniva, è irrilevante il suo valore !!).

Nel secondo modo normale i carrelli ancora oscillano in opposizione di fase, la "rigidezza" della molla centrale ne caratterizza la pulsazione. Ovviamente se $k_2 << k$ le due pulsazioni ω_1 ed ω_2 differiscono di poco.

Definendo: $\omega_0 = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ possiamo scrivere $\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon$ ed ancora $\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon$ e quindi possiamo esprimere i due modi normali
di vibrazione, in modo analogo a quanto fatto in precedenza, con $S_1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 - \varepsilon)t}$ e $S_2(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 + \varepsilon)t}$.
La combinazione lineare delle due soluzioni è ancora soluzione:

$$S(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 - \varepsilon)t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 + \varepsilon)t} = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\varepsilon t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\varepsilon t} \right\} e^{i\omega_0 t}$$

Il termine fra parentesi graffe, visto che ε≈0, varia molto poco lentamente con il tempo. Se il termine fra parentesi graffe ≈costante i due carrelli oscillano in modo quasi sinusoidale con pulsazione ω_0 . Ovviamente se C_1 o C_2 sono nulli il moto coincide con uno dei due modi normali di vibrazione.

Oscillatori debolmente accoppiati, 2

Supponiamo ora $C_1 = C_2 = 0.5\ C$.

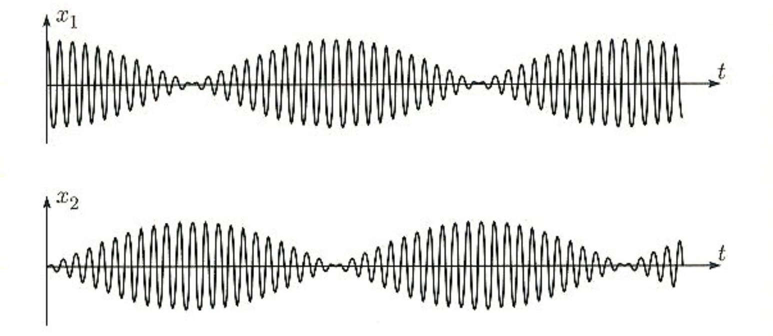
Allora dalla:

$$S(t) = C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{i(\omega_0-\varepsilon)t} + C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{i(\omega_0+\varepsilon)t} = \frac{C}{2}\left\{\begin{bmatrix}e^{-i\varepsilon t}+e^{i\varepsilon t}\\ e^{-i\varepsilon t}-e^{i\varepsilon t}\end{bmatrix}\right\}e^{i\omega_0 t} = C\begin{bmatrix}\cos\varepsilon t\\ -i\sin\varepsilon t\end{bmatrix}e^{i\omega_0 t}$$

Possiamo ricavare la legge del moto (funzione reale) prendendo la parte reale della soluzione $X(t)= Re\ S(t)$
e quindi possiamo scrivere

nel caso attuale avremo:

$$\begin{cases} x_1(t) = C\cdot\cos\varepsilon t\cdot\cos\omega_0 t \\ x_2(t) = C\cdot\sin\varepsilon t\cdot\sin\omega_0 t \end{cases}$$



ossia il moto di ogni carrello può essere descritto dalla convoluzione di un moto oscillatorio con pulsazione $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$
ed una funzione armonica caratterizzata da una pulsazione $\varepsilon << \omega_0$ e quindi da un periodo

$$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\varepsilon} >> T_{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Energia meccanica del sistema dei due oscillatori accoppiati

L'energia meccanica di ciascun oscillatore è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. L'energia potenziale è determinata, rispettivamente per m_1 e m_2, dalla deformazione delle molle con costanti elastiche k_1 e k_3 e dalla energia potenziale dovuta alla molla che comporta l'accoppiamento fra I due oscillatori :

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2(t)+\frac{1}{2}k_1 x_1^2(t)+\frac{1}{2}k_2\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2(t)+\frac{1}{2}k_3 x_2^2(t)$$

Pertanto l'energia meccanica totale sarà, nell'ipotesi che $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_3 = k$

$$E_{Tot}=\frac{1}{2}mv_1^2(t)+\frac{1}{2}kx_1^2(t)+\frac{1}{2}k_2\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2+\frac{1}{2}mv_2^2(t)+\frac{1}{2}kx_2^2(t)=$$

dove

$$E_1=\frac{1}{2}mv_1^2(t)+\frac{1}{2}\left(k+k_2\right)x_1^2(t)$$

$$E_2=\frac{1}{2}mv_2^2(t)+\frac{1}{2}\left(k+k_2\right)x_2^2(t)$$

$$E_{1,2}=-k_2x_1(t)x_2(t)\quad \text{termine di "accoppiamento"}$$

Se, per controllo, deriviamo parzialmente rispetto ad x_1 l'energia potenziale totale otteniamo la forza agente su m_1,

$$f_1=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k_1x_1^2(t)+\frac{1}{2}k_2\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2+\frac{1}{2}k_3x_2^2(t))\right)=-\left(k_1x_1+k_2(x_1-x_2)\right)=-(k_1+k_2)x_1+k_2x_2$$

ed analogamente derivando parzialmente rispetto ad x_2 otterremmo l'espressione della forza agente sulla massa m_2