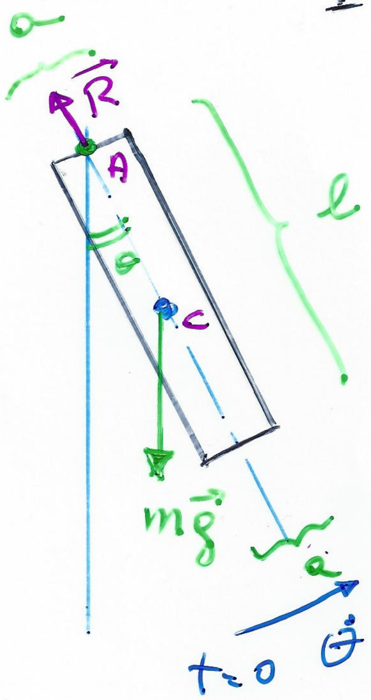
Il pendolo fisico



È un sistema rigido che ruota attorno al punto A in un piano verticale.

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\vec{M}^e_\Omega = \frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I_\Omega \vec{\omega})$$

dove Ω = generico punto fisso

Calcoliamo il $\vec{M}^e$ rispetto al punto fisso A

$$\vec{M}^e_A = \vec{AC} \times m\vec{g}$$

Proiettiamo ora tale momento sull'asse $\hat{a}$ (normale al piano del disegno ed uscente)

$$\left|(\vec{M}^e)_{\hat{a}}\right| = -mg\frac{l}{2}\sin\theta = +I_A\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{M}^e_{\hat{a}} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{\hat{a}}$$

ricordiamo $P_{\hat{a}} = I_A\omega_A$

Abbiamo già calcolato (sbarra sottile)

$$I_A = \frac{ml^2}{12}$$

Se la sbarra non fosse sottile il momento d'inerzia sarebbe rispetto ad un asse passante per C : $I_C = \frac{1}{12}(a^2+l^2)$

Per Huygens-Steiner $I_A = \frac{m}{12}(a^2+l^2) + m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{12}(a^2+4l^2)$

Abbiamo quindi

$$mg\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta = -\overbrace{\frac{m}{12}\left(a^2+4\ell^2\right)}^{I_A}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

se $\sin\theta \simeq \theta$ (piccole oscillazioni)

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{mg}{2}\frac{\ell}{I_A}\,\theta(t) = 0$$

Tale eq. è soddisfatta dalle

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

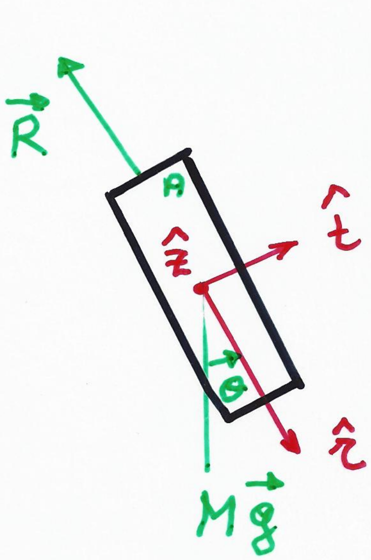
se $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg}{I_A}\dfrac{\ell}{2}}$

e se θ_0 e φ soddisfano le "condizioni al contorno".

• • • •

Se volessimo ora calcolare la "reazione vincolare" dovremmo considerare le equazioni cardinali. In particolare, in questo caso, dovremmo considerare la

$$\vec{F}^{(e)}_{Tot} = M\vec{g} + \vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$



Assumiamo la terna di assi cartesiani $\hat{r}, \hat{t}, \hat{z}$ con origine nel c.d.m. e solidali con la sbarra

Proiettiamo la I eq. cardinale su tali assi

$\hat{r}$) $Mg\cos\theta + R_{\hat{r}} = M a_{c\hat{r}}$

proiezione su $\hat{r}$ della reazione vincolare

accelerazione centripeta del c.d.m.

$\hat{t}$) $-Mg\,\text{sen}\,\theta + R_{\hat{t}} = M a_{c\hat{t}}$

proiezione su $\hat{t}$ della reazione vincolare. Il suo segno non è noto a priori

accelerazione tangenziale del c.d.m.

$\hat{z}$) $F^{e}_{\hat{z}} = 0 = M a_{cz}$ (il moto è nel piano $\hat{r}\,\hat{t}$)

Il baricentro si muove con moto circolare, non uniforme, su un cerchio di raggio $\frac{\ell}{2}$

$$\vec{a}_c(t) = \frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\ell}{2}\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{t}\right)$$

$$= \frac{\ell}{2}\frac{d^2\theta(t)}{dt}\hat{t} + \frac{\ell}{2}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{t}}{dt} =$$

$$= \frac{\ell}{2}\frac{d^2\theta(t)}{dt}\hat{t} + \frac{\ell}{2}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}(-\hat{r}) =$$

$$= \underbrace{\frac{\ell}{2}\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\hat{t}}_{\text{accelerazione tangenziale}} - \underbrace{\frac{\ell}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}}_{\text{accelerazione centripeta}}$$

Ricordiamo che il moto del pendolo è descritto da $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$; $\dot{\theta}(t) = \omega_0\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2\theta_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Sostituendo le espressioni trovate per $a_{c\hat{r}}$ e $a_{c\hat{t}}$ nelle relazioni che forniscono le componenti della reazione vincolare abbiamo

$$
\begin{cases}
R_{\hat{r}} = Mg\cos\theta(t) + M a_{c\hat{r}} \\
R_{\hat{t}} = Mg\sin\theta(t) + M a_{c\hat{t}} \\
R_{\hat{z}} \equiv 0
\end{cases}
$$

- $R_r = -Mg\cos\theta(t) + Ma_{c\hat{r}} = -M\left(g\cos\theta + \frac{\ell}{2}\omega_0^2\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right)$

forza centripeta

$$= -M\left(g\cos\theta + \frac{\ell}{2}\omega_0^2\theta_0^2\left(1 - \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right)\right)$$

$$= -M\left(g\cos\theta + \frac{\ell}{2}\omega_0^2\left(\theta_0^2 - \theta^2(t)\right)\right)$$

- $R_t = Mg\sin\theta - M\frac{\ell}{2}\omega_0^2\theta_0\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) =$

$$= M\left(g\sin\theta - \frac{\ell}{2}\omega_0^2\theta(t)\right)$$

∘ ∘ ∘ ∘ ∘