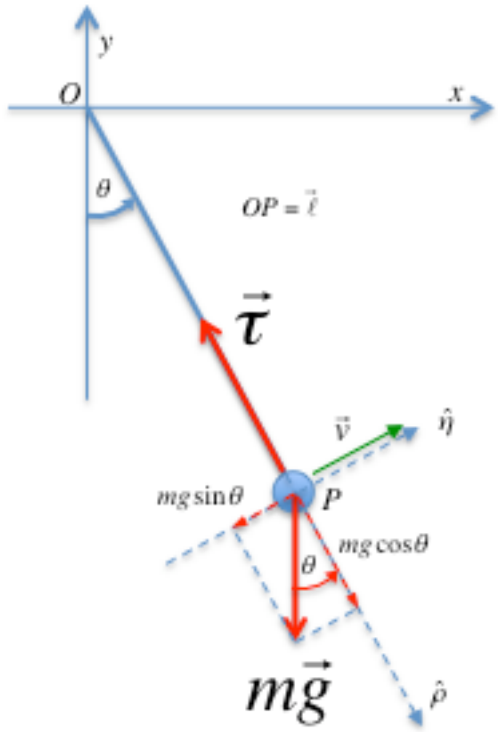


Abbiamo già ricavato le equazioni che descrivono il moto armonico del pendolo nel caso di piccole oscillazioni. $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$, $\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Per far ciò siamo ricorsi alla relazione basata sulla legge che lega il momento delle forze (rispetto ad un polo) alla variazione del momento della quantità di moto (rispetto allo stesso polo)

$$\vec{M}_0 = \overline{OP}\times(\vec{\tau} + m\vec{g}) = \frac{d\vec{p}_O}{dt} + \vec{v}_o \times m\vec{v}.$$

Se il polo rispetto a cui calcoliamo i momenti è il vincolo a cui è connesso il filo che regge la massa m (il centro della traiettoria della massa m) allora $\vec{v}_o = 0$ e l'equazione per i momenti diventa $\vec{M}_0 = \overline{OP}\times m\vec{g} = \vec{\ell}\times m\vec{g} = \frac{d\vec{p}_O}{dt}$ essendo nullo il momento della reazione $\vec{\tau}$ rispetto al polo O.

Ciò ci ha permesso di ricavare l'equazione del moto del pendolo anche ignorando il valore della reazione $\vec{\tau}$. Quanto vale $\vec{\tau}$??. Come è diretta e quanto è intensa la reazione del vincolo O ?.

In ogni istante deve essere $\vec{\tau} + m\vec{g} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{\ell}}{dt^2}$. Ricordiamo che $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\ell}{dt}\hat{\rho} + \ell\frac{d\hat{\rho}}{dt}$.
Nel nostro caso essendo il filo inestensibile $\frac{d\ell}{dt} = 0$ per cui $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \ell\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \ell\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\eta}$. Possiamo quindi ricavare

$$m\frac{d^2\vec{\ell}}{dt^2} = m\left[\frac{d}{dt}\left(\ell\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\eta}\right)\right] = m\left[\frac{d\ell}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\eta} + \ell\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\eta} + \ell\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right].$$

Ricordando ancora che $\frac{d\ell}{dt} = 0$ e che $\frac{d\hat{\eta}}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\rho}$ possiamo scrivere

$$\vec{\tau} + m\vec{g} = m\frac{d^2\vec{\ell}}{dt^2} = m\left[\ell\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\eta} - \ell\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\hat{\rho}\right] = m\left[\ell\ddot{\vartheta}(t)\hat{\eta} - \ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2\hat{\rho}\right]$$

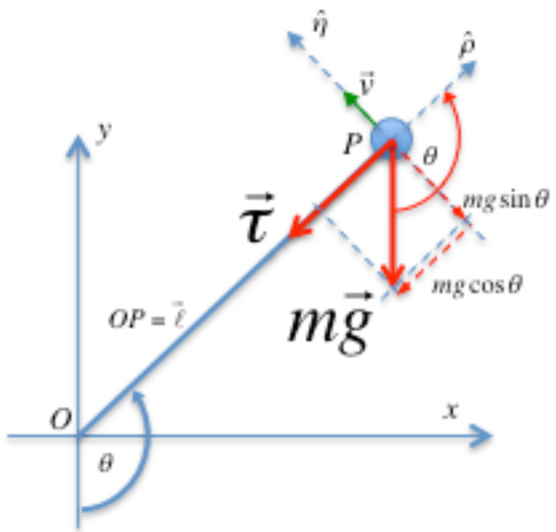
Proiettando l'equazione vettoriale sugli assi x ed y otteniamo:

sull’asse x $\quad -\tau sin\vartheta(t) = m\ell\ddot{\vartheta}(t)cos\vartheta(t) - m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2 sin\vartheta(t)$

sull’asse y $\quad \tau cos\vartheta(t) - mg = m\ell\ddot{\vartheta}(t)sin\vartheta(t) + m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2 cos\vartheta(t)$

E’ istruttivo proiettare l’equazione vettoriale sulle direzioni definite dai versori (ruotanti) $\hat{\rho}$ ed $\hat{\eta}$:

proiettando su $\hat{\rho}$ otteniamo $\quad -\tau + mgcos\vartheta(t) = -m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2$ da cui $\tau = m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2 + mgcos\vartheta(t)$
da cui si evince che la tensione del filo deve compensare la proiezione della forza peso lungo la direzione $\hat{\rho}$ e garantire l'accelerazione centripeta necessaria per il moto lungo la traiettoria circolare;



proiettando su $\hat{\eta}$ otteniamo $\quad -mgsin\vartheta(t) = m\ell\ddot{\vartheta}(t)$
cioè la proiezione della forza peso lungo $\hat{\eta}$ è responsabile della variazione del modulo della velocità lineare.

Si noti che se il filo è orizzontale $\vartheta = \pi/2$ e la forza peso non ha proiezione su $\hat{\rho}$.
Lungo $\hat{\rho}$ quindi otteniamo $\quad \tau = m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2$ cioè la tensione del filo è diversa da zero solo se la massa m ha velocità diversa da zero ed è tale da garantire l'accelerazione centripeta. Sempre per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ lungo $\hat{\eta}$ otteniamo $-mg(t) = m\ell\ddot{\vartheta}(t)$

Se $\vartheta > \pi/2$ la componente della forza peso lungo il filo è diretta come $-\hat{\rho}$ e quindi il vincolo deve trasmettere alla massa m una forza inferiore a quella necessaria per garantire l'accelerazione centripeta $\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2$.
Se $|mgcos\vartheta(t)| \geq m\ell\left(\dot{\vartheta}(t)\right)^2$ il filo non è più in tensione: $\tau = 0$.