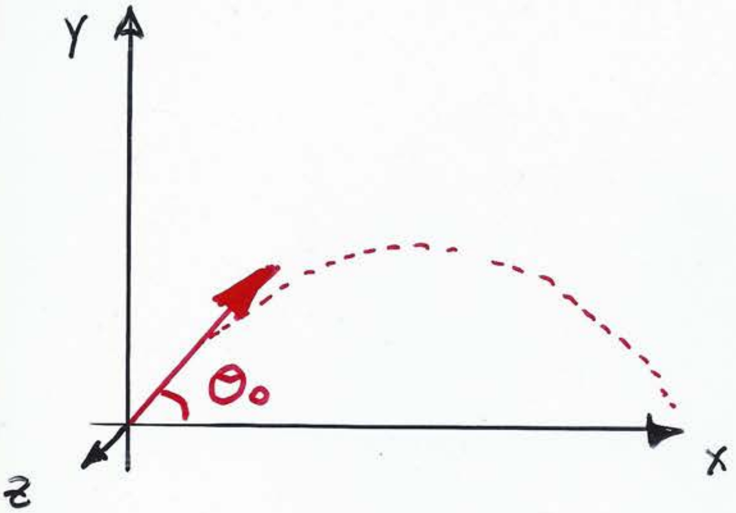


Moto di un proiettile in presenza di una accelerazione $\vec{a} \equiv (0, -g, 0)$

Il proiettile parte dall'origine

Il moto del proiettile è caratterizzato dalla velocità iniziale $\vec{v}(t_0) \equiv (v_0 \cos\theta_0, v_0 \operatorname{sen}\theta_0, 0)$ e dalla accelerazione.

Entrambe non hanno componenti lungo l'asse z $\Rightarrow$ il moto si svolge sul piano X Y

$$\vec{r}(t=0) \equiv (0,0,0) \Rightarrow \begin{aligned} X(t=0) &= 0 = X_0 \\ Y(t=0) &= 0 = Y_0 \\ z(t=0) &= 0 = z_0 \end{aligned}$$

Il moto non è accelerato lungo X: $v_x(t) = v_x(t=0)$

Sappiamo che il moto è uniformemente accelerato lungo l'asse Y

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 + a_y t = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g \cdot t$$

Il moto lungo l'asse X è rettilineo uniforme

$$X(t) = \left(\int_0^t v_x(t)\,dt\right) + X_0 = X_0 + v_0 \cos\theta_0 \int_0^t dt$$

$$= X_0 + v_0 \cos\theta_0 \cdot t$$

$$y(t) = \int (v_0 \sin\vartheta_0 - g \cdot t)\,dt + y_0 =$$
$$= v_0 \sin\vartheta_0 \int dt - g \int t\,dt + y_0 =$$
$$= v_0 \sin\vartheta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\vartheta_0 \cdot t + x_0 \\ y(t) = v_0 \sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \end{cases}$$

dobbiamo determinare x_0, y_0 per risolvere completamente il problema

per $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \end{cases}$ CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\vartheta_0 \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DEL MOTO

VOLENDO CONOSCERE LA TRAIETTORIA DOBBIAMO ESPRIMERE $y \equiv y(x) \Rightarrow$ ELIMINIAMO t

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\vartheta_0} \; ; \; y(t) = v_0 \sin\vartheta_0 \frac{x(t)}{v_0 \cos\vartheta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2(t)}{v_0^2 \cos^2\vartheta_0}$$

ora $y \equiv y(x(t)) \equiv y(x)$

$$y(t) = \underbrace{\operatorname{tg}\vartheta_0}_{\text{cost} = \alpha} \cdot x(t) - \underbrace{\frac{g}{2(v_0 \cos\vartheta_0)^2}}_{\text{cost} = \beta} x^2(t) = \underbrace{\alpha x(t) - \beta x^2(t)}_{\text{PARABOLA PASSANTE PER L'ORIGINE}}$$

Se $|\vec{v}_0|$ e ϑ_0 sono noti la traiettoria è anche nota.

Determiniamo ora la massima altezza = H e la gittata = G.

La massima altezza verrà raggiunta quando

$$v_y(t_H) = 0 = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g t_H = 0$$

$$\Rightarrow t_H = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$$

sostituendo nella espressione per $y(t)$

$$H = y(t_H) = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 = \underbrace{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot v_0 \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{g}}_{\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{g}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{g} \qquad \left[\frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}}\right] = [L]$$

$\Rightarrow$ O.K. VERIFICARE SEMPRE!

La gittata G si ottiene chiedendo che

$$y(t_G) = 0 \Rightarrow v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot t_G - \frac{1}{2} g t_G^2 = 0 =$$

$$= \left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \frac{1}{2} g \cdot t_G\right) \cdot t_G = 0$$

due soluzioni
$$\begin{cases} t = 0 & \Leftrightarrow \text{MOMENTO DEL LANCIO} \\ t_G = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} & \text{SOLUZIONE CERCATA} = 2 \cdot t_H \end{cases}$$

$$G = x(t_G) = v_0 \cos\theta_0 \cdot t_G = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \cdot v_0 \cos\theta_0 = \frac{2 v_0^2 \cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$$

Dalla Trigonometria $\Rightarrow 2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0 = \operatorname{sen} 2\theta_0$

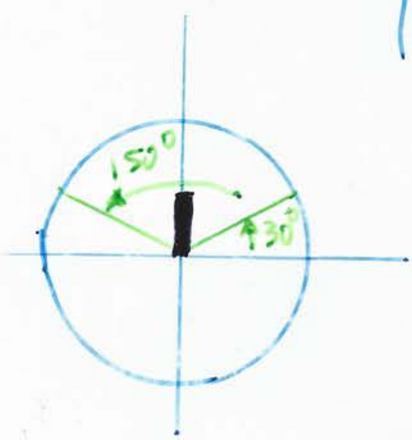
quindi
$$G = v_0^2 \frac{\operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

Tutto dipende da v_0 e θ_0 !!
(e non solo da v_0 !!)

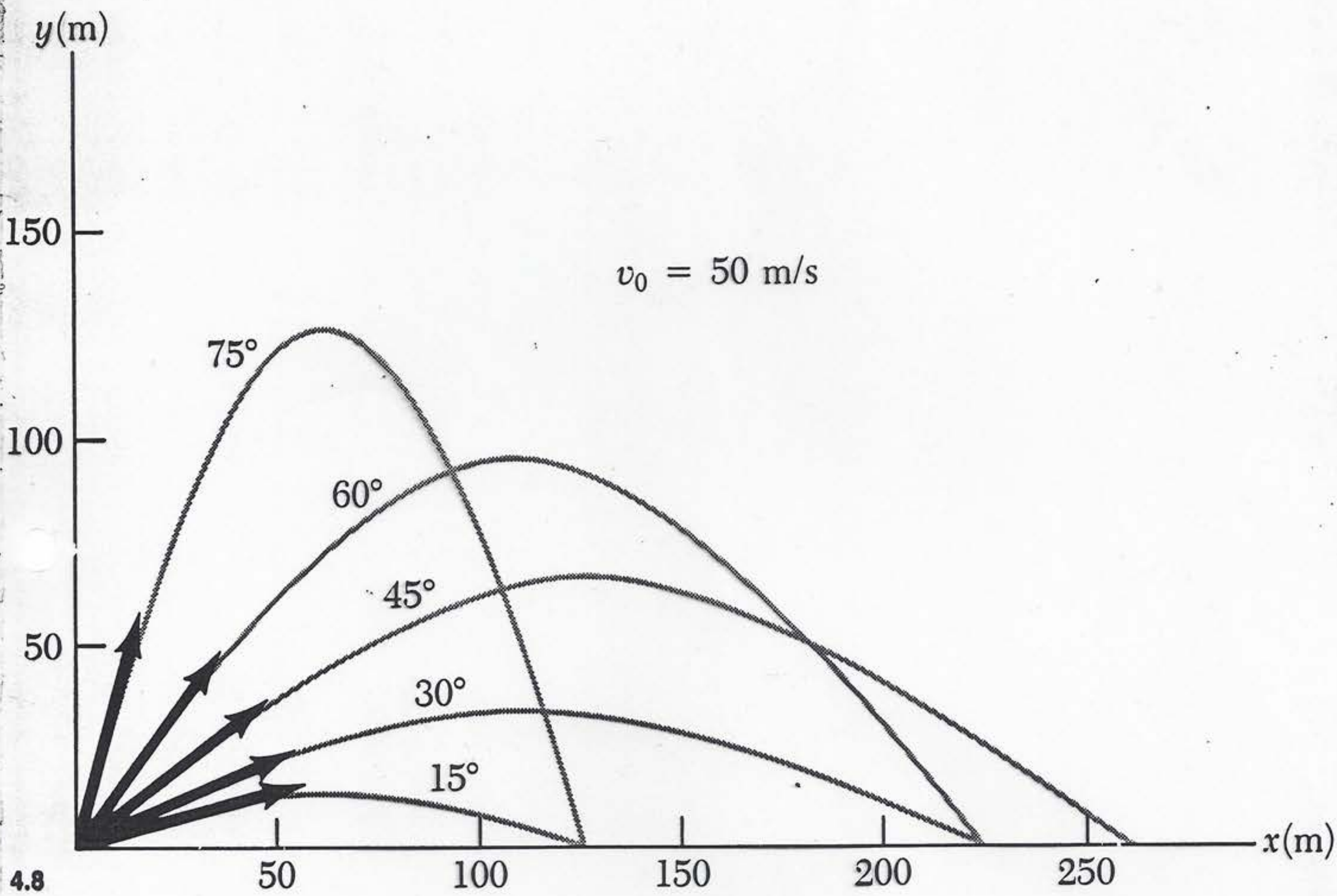
A parità di v_0 G è <u>massimo</u>
quando $\operatorname{sen} 2\theta_{MAX} = 1 \Rightarrow 2\theta_{MAX} = 90° \Rightarrow \theta_{MAX} = 45°$

Inoltre $\begin{cases} \theta_0 = 15° & \operatorname{sen} 2\theta_0 = \operatorname{sen} 30° \\ \theta_0 = 75° & \operatorname{sen} 2\theta_0 = \operatorname{sen} 150° \end{cases}$

$= \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen} 30°$

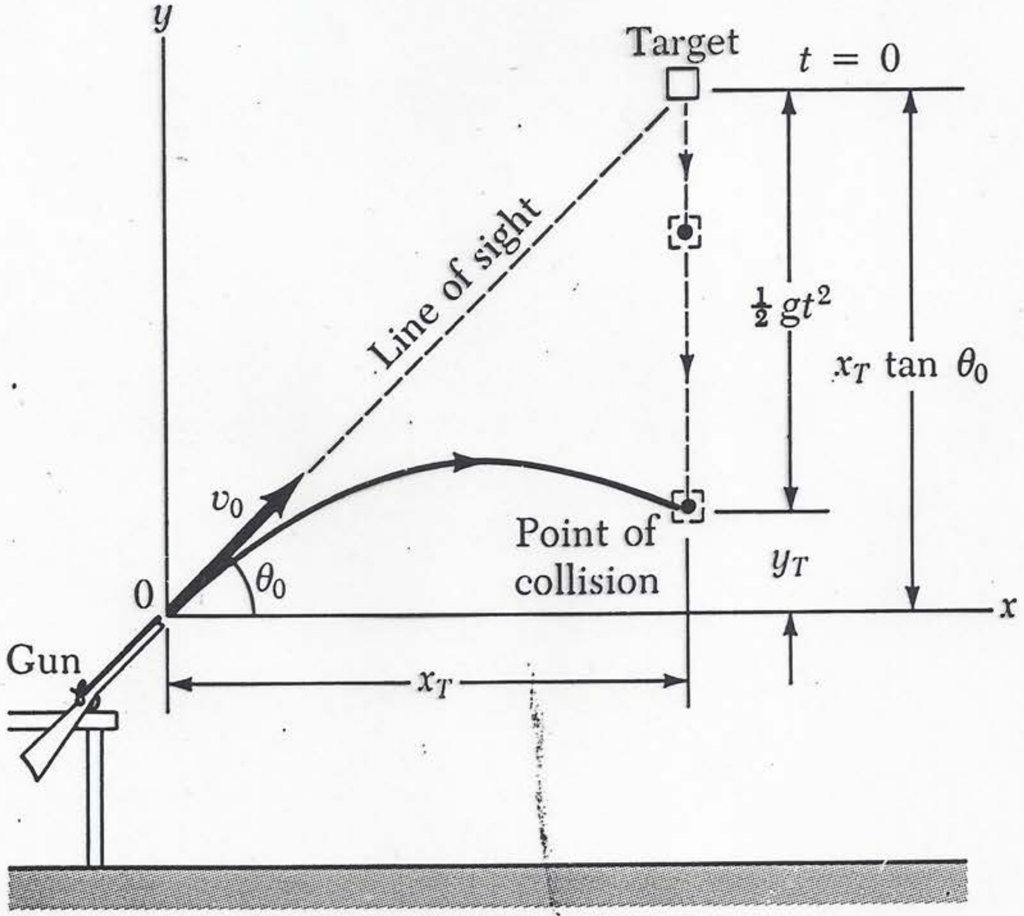


Per vari valori di θ_0
possiamo avere
eguali gittate ma
diversi valori di t_H e di H



y(m)
150
100
50
$v_0 = 50$ m/s
75°
60°
45°
30°
15°
50
100
150
200
250
x(m)

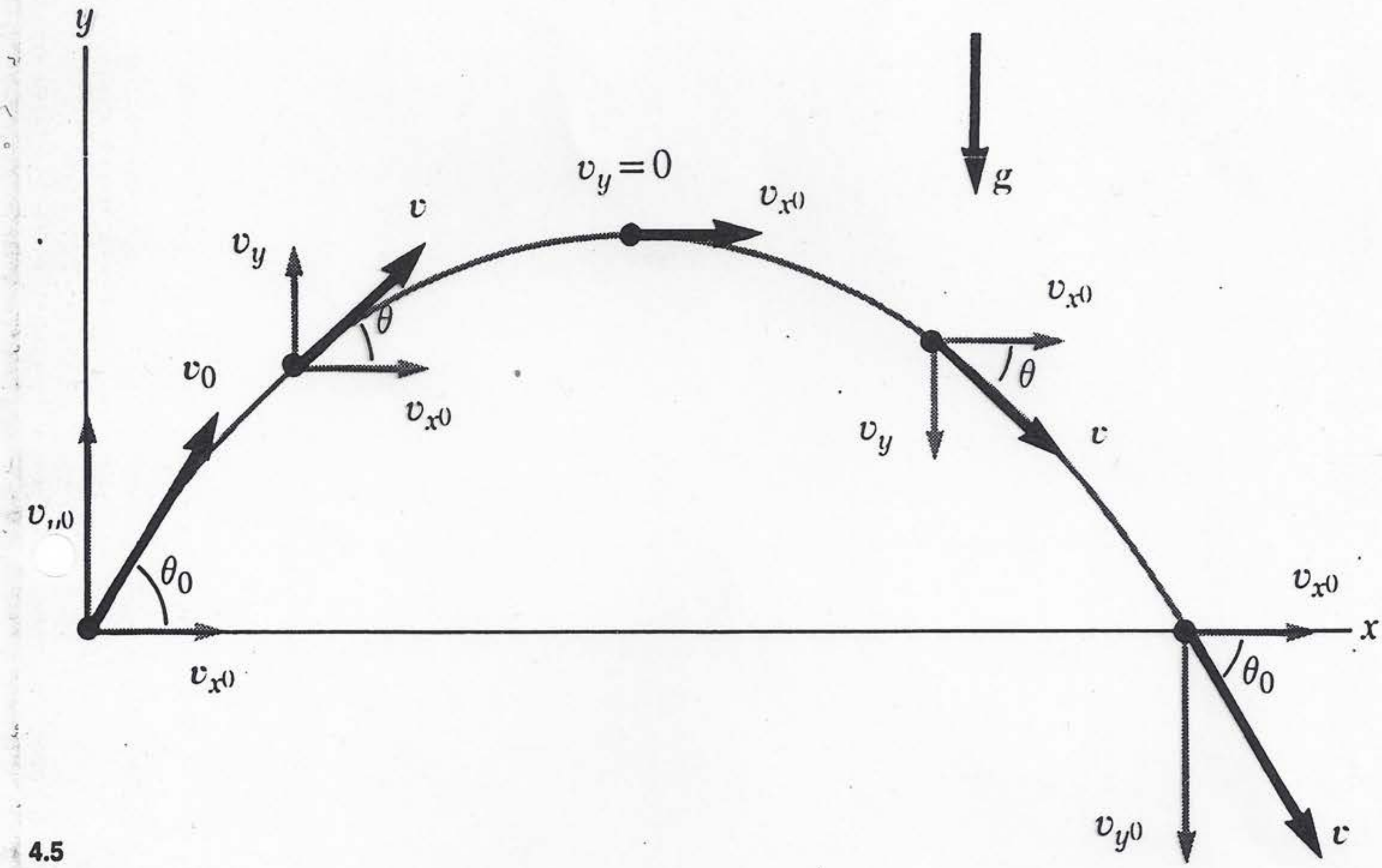
4.8



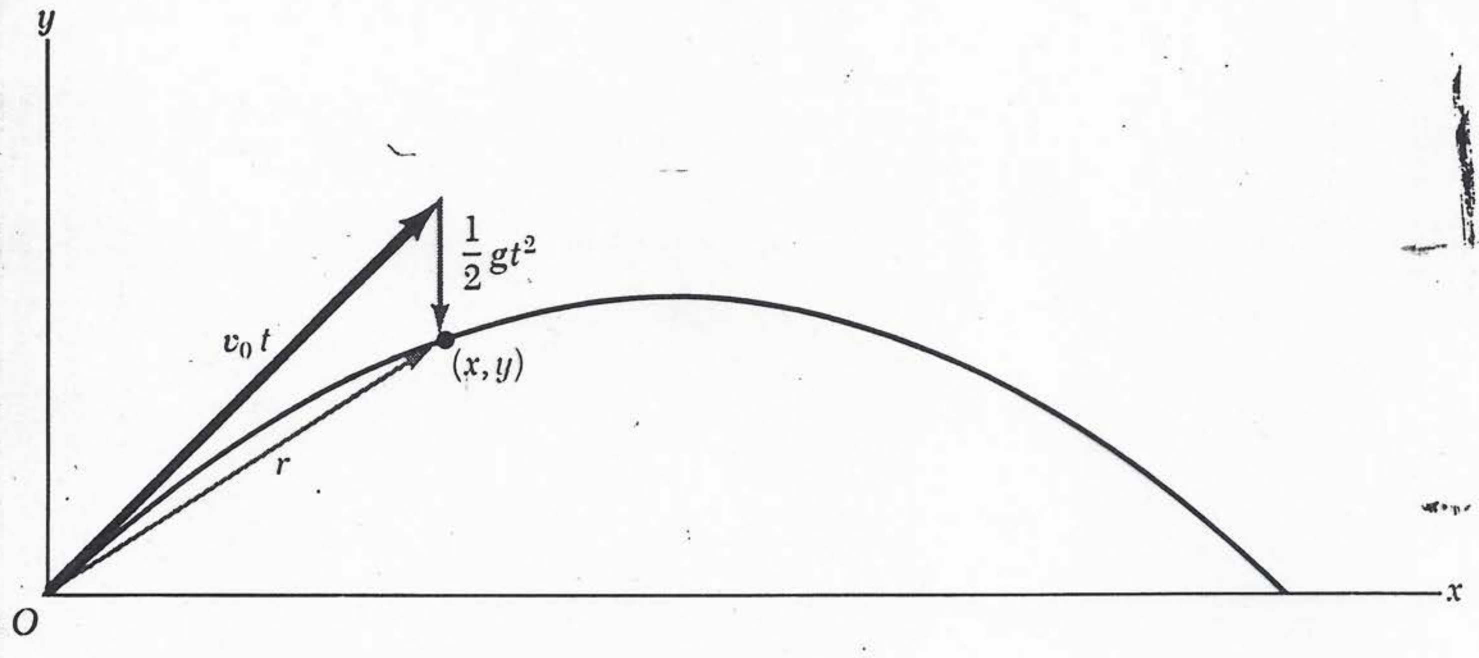
y
Target
$t = 0$
Line of sight
$\frac{1}{2} gt^2$
$x_T \tan \theta_0$
v_0
θ_0
0
Point of collision
y_T
x
Gun
x_T

4.9

Serway



4.5



4.6