Supponiamo di voler trovare la soluzione di una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

Tale equazione ammette due soluzioni del tipo

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove λ_1 *e* λ_2 sono le soluzioni della equazione caratteristica associata all'equazione differenziale

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

mentre C_1 e C_2 sono costanti da determinare in base alle condizioni specifiche del moto in esame.

Abbiamo quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nel caso del moto del pendolo semplice l'equazione è $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$ *e pertanto* *a=1, b=0, c=*$\frac{g}{\ell}$ e quindi

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{\ell}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

La legge oraria del moto della massa *m* è quindi del tipo

$\theta(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ avendo definito $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. E' semplice verificare che la quantità $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ ha le dimensioni di T^{-1}.

Ricordiamo che $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ e $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$. Sostituendo abbiamo

$$\theta(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = C_1(cos(\omega t) + i\, sin\,(\omega t)) + C_2(cos(\omega t) - i\, sin(\omega t)) = (C_1 + C_2)cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\, sin(\omega t)$$

La funzione θ (t) rappresenta la legge oraria del moto del pendolo, quindi deve essere reale. Dobbiamo quindi scegliere le costanti arbitrarie C_1 e C_2 in modo tale che nella x(t) non appaia alcun termine immaginario.

In particolare scegliendo C_1 e C_2 complessi coniugati

$$C_1 = A + iB \text{ e } C_2 = A - iB \qquad \text{(abbiamo sostituito due costanti arbitrarie con altre due costanti arbitrarie)}$$

otteniamo:

$$C_1 + C_2 = 2A \quad \text{e} \quad C_1 - C_2 = i2B$$

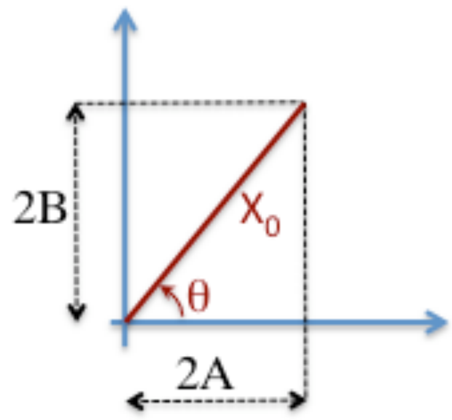
per cui sostituendo abbiamo

$$\theta(t) = (C_1 + C_2)cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\,sin(\omega t) = 2Acos(\omega t) - 2Bsin(\omega t)$$

A e B sono nuovamente costanti arbitrarie che possono essere espresse in coordinate polari con altre due costanti del tipo

$$2A = X_0 cos\varphi \quad \text{e} \quad 2B = X_0 sin\varphi$$

in tal modo arriviamo a scrivere



$$\boldsymbol{\theta(t) = 2Acos(\omega t) - 2Bsin(\omega t) = X_0[cos(\omega t)cos\varphi - sin(\omega t)sin\varphi] = X_0 cos(\omega t + \varphi)}$$

Le costanti $\boldsymbol{X_0}$ e φ vanno scelte in modo opportuno utilizzando la conoscenza di almeno due condizioni del moto (valori di $\theta(\boldsymbol{t})$ per almeno due valori di tempo diverso, un valore di $\theta(\boldsymbol{t})$ ed un valore di $\dot{\theta}(t)$ per un definito valore del tempo, $\theta(t)$ e $\ddot{\theta}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta}(t)$, eccetra).