

Relazione generale tra momento angolare e velocità angolare.

Il tensore d'inerzia. Le equazioni di Eulero.

Consideriamo un corpo rigido come in figura ed un asse, di simmetria, fisso, passante per il suo centro di massa O. Il momento angolare del corpo rispetto al polo O è dato da:

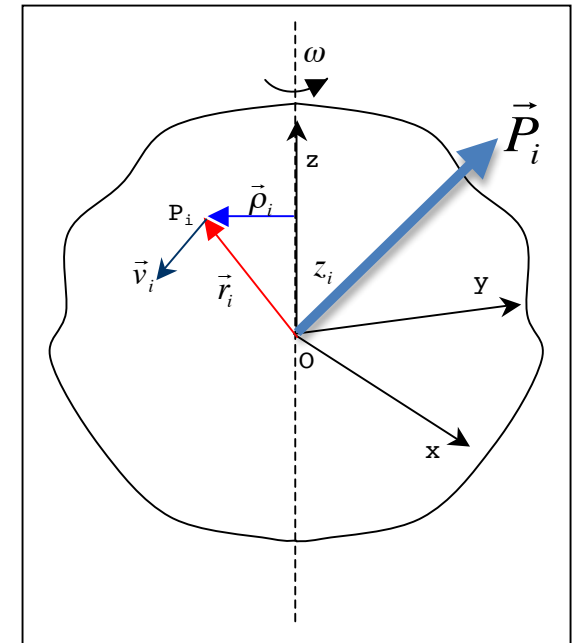
$$\vec{P}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i).$$

In accordo con la figura possiamo scrivere: $\vec{r}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i = z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i$ e sostituendo nella espressione del momento angolare otteniamo:

$$\vec{P}_O = \sum (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i (\vec{\omega} \times (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i))$$

Osserviamo ora che $\vec{\omega} \times \hat{k} = 0$, e quindi

$$\vec{P}_O = \sum (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i) \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \sum z_i \hat{k} \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum \vec{\rho}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i).$$



Osserviamo ancora che :

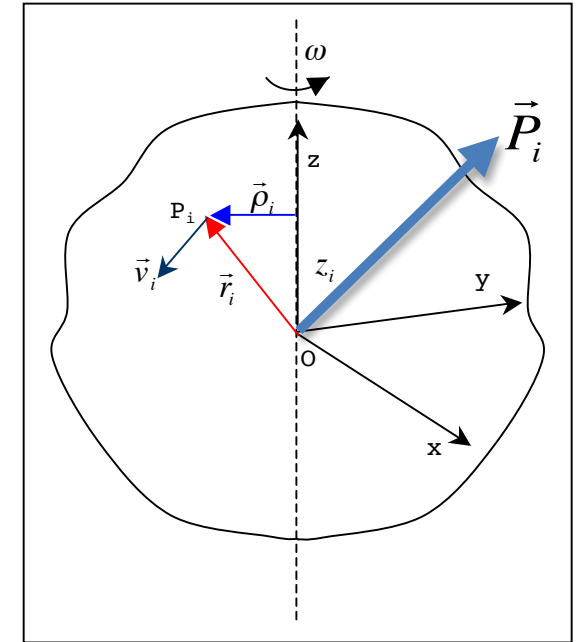
$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \omega \rho_i \hat{v}_i \Rightarrow \vec{\rho}_i \times m_i \omega \rho_i \hat{v}_i = m_i \omega \rho_i^2 \hat{\omega} = m_i \rho_i^2 \vec{\omega} \text{ e che}$$

$$z_i \hat{k} \times m_i \omega \rho_i \hat{v}_i = -z_i m_i \omega \rho_i \hat{\rho}_i = -z_i m_i \omega \vec{\rho}_i.$$

Sostituendo otteniamo

$$\vec{P}_O = -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + I \vec{\omega} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_\parallel$$

In generale quindi il momento angolare del sistema ha componenti parallela ed ortogonale ad $\vec{\omega}$.



Vediamo ora come ciò si possa generalizzare per una rotazione qualunque, scegliendo un riferimento con origine nel c.d.m. del sistema e il c.d.m. come polo di riduzione dei momenti. Allora la

posizione $\vec{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ di ogni singolo punto in un riferimento solidale col corpo rigido coinciderà col braccio del suo momento angolare e la velocità del punto in un riferimento che non ruota sarà

data dalla formula $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Si avrà allora, tenendo conto che $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\vec{P} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \sum m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z))$$

le cui tre componenti sono:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \sum m_i \left(\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right) = \sum m_i \left(\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right) \\
 P_y &= \sum m_i \left(\omega_y r_i^2 - y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right) = \sum m_i \left(-x_i y_i \omega_x + \omega_y (r_i^2 - y_i^2) - y_i z_i \omega_z \right) \\
 P_z &= \sum m_i \left(\omega_z r_i^2 - z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right) = \sum m_i \left(-x_i z_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + \omega_z (r_i^2 - z_i^2) \right)
 \end{aligned}$$

Ora, introducendo le distanze di ogni punto da ciascuno dei tre assi cartesiani:

$$d_{ix}^2 = r_i^2 - x_i^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad d_{iy}^2 = r_i^2 - y_i^2 = x_i^2 + z_i^2 \quad \text{e} \quad d_{iz}^2 = r_i^2 - z_i^2 = y_i^2 + x_i^2,$$

ed usando la notazione matriciale, possiamo scrivere:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{ix}^2 & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i d_{iy}^2 & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i d_{iz}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \|I\| \vec{\omega}$$

dove $\|I\|$ prende il nome di tensore d'inerzia. Risulta immediatamente che P non è in generale parallelo ad ω .

Il tensore di inerzia è rappresentato da una matrice simmetrica. La teoria delle matrici garantisce che una simile matrice è sempre diagonalizzabile, ossia è possibile individuare una rotazione del sistema

di coordinate che rende la matrice diagonale nel sistema ruotato. Se indichiamo con \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} i tre versori di questo sistema ruotato e con P_u, P_v, P_w e $\omega_u, \omega_v, \omega_w$ le componenti rispettivamente di P e di ω in questo sistema, la relazione tra P e ω diventa:

$$\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{iu}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum m_i d_{iv}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum m_i d_{iw}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix}$$

dove i tre termini diagonali coincidono con la definizione dei momenti d'inerzia per rotazioni intorno a ciascuno dei tre assi \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} . Da questa relazione segue che ogni corpo rigido ammette almeno 3 assi liberi di rotazione, che sono appunto \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} , detti assi centrali d'inerzia, tutti passanti per il baricentro e ortogonali tra loro, caratterizzati dal fatto che per rotazioni intorno ad essi P e ω sono paralleli. Infatti per $\vec{\omega} \equiv (\omega, 0, 0)$ deve essere $\vec{P} \equiv (\omega I_u, 0, 0)$, per $\vec{\omega} \equiv (0, \omega, 0)$ deve essere $\vec{P} \equiv (0, \omega I_v, 0)$ e per $\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega)$ deve essere $\vec{P} \equiv (0, 0, \omega I_w)$.

La conoscenza di I_u, I_v, I_w permette di calcolare il momento d'inerzia I_c rispetto ad un qualunque asse passante per il c.d.m. Se infatti consideriamo una rotazione intorno ad un generico asse, rappresentato nel riferimento di assi \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} dal versore $\hat{c} \equiv (\cos\varphi, \cos\chi, \cos\psi)$, avremo $\vec{\omega} = \omega\hat{c} \equiv (\omega\cos\varphi, \omega\cos\chi, \omega\cos\psi)$, e quindi:

$$P_u = I_u\omega_u = I_u\omega\cos\varphi$$

$$P_v = I_v\omega_v = I_v\omega\cos\chi$$

$$P_w = I_w\omega_w = I_w\omega\cos\psi$$

(naturalmente, anche in questo riferimento, P non è parallelo ad ω) per cui potremo esprimere il vettore P come:

$$\vec{P} = (I_u\cos\varphi\hat{u} + I_v\cos\chi\hat{v} + I_w\cos\psi\hat{w})\omega$$

Inoltre la proiezione di P sul versore dell'asse di rotazione è data da:

$$\vec{P} \cdot \hat{c} = (I_u\cos^2\varphi + I_v\cos^2\chi + I_w\cos^2\psi)\omega$$

per cui, dovendo anche essere $\vec{P} \cdot \hat{c} = I_c \omega$, segue che il momento d'inerzia I_c è dato da:

$$I_c = I_u \cos^2 \varphi + I_v \cos^2 \chi + I_w \cos^2 \psi$$

L'energia cinetica di rotazione nel sistema si riferimento fisso nel c.d.m., data da $k' = \frac{1}{2} I_c \omega^2$, può essere scritta anche come:

$$k' = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_u \omega_u^2 + \frac{1}{2} I_v \omega_v^2 + \frac{1}{2} I_w \omega_w^2$$

Se vogliamo utilizzare le precedenti espressioni del momento di inerzia nella II equazione cardinale, dobbiamo tener conto che questa è valida in un sistema di riferimento inerziale, mentre il sistema definito dai tre assi centrali, solidale col corpo rigido, non lo è. Possiamo però applicare la trasformazione della derivata di un vettore tra due riferimenti in rotazione uno rispetto all'altro (Appendice A), ottenendo:

$$\vec{M}^{(e)} = \left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_{inerziale} = \left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right|_{solidale} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

che, esplicitata nelle tre componenti, si traduce nelle tre equazioni di Eulero:

$$M_u^{(e)} = I_u \frac{d\omega_u}{dt} + \omega_v I_w \omega_w - \omega_w I_v \omega_v = I_u \frac{d\omega_u}{dt} + (I_w - I_v) \omega_w \omega_v$$

$$M_v^{(e)} = I_v \frac{d\omega_v}{dt} + (I_u - I_w) \omega_u \omega_w$$

$$M_w^{(e)} = I_w \frac{d\omega_w}{dt} + (I_v - I_u) \omega_u \omega_v$$

che esprimono la seconda equazione cardinale proiettata sui tre assi principali, solidali col corpo rigido.

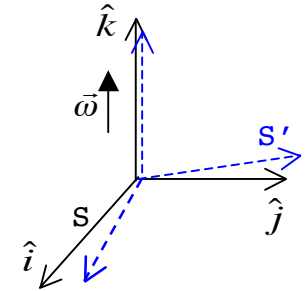
Appendice A

Se S' è il Sistema di Riferimento solidale con il corpo ed S il Sistema di Riferimento inerziale possiamo scrivere

$$\vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k} \quad (\text{in } S) = P'_x \hat{i}' + P'_y \hat{j}' + P'_z \hat{k}' \quad (\text{in } S')$$

e calcolare

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_S = \left(\frac{dP'_x}{dt} \right)_S \hat{i}' + \left(\frac{dP'_y}{dt} \right)_S \hat{j}' + \left(\frac{dP'_z}{dt} \right)_S \hat{k}' + P'_x \left(\frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S + P'_y \left(\frac{d\hat{j}'}{dt} \right)_S + P'_z \left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_S.$$



Se ammettiamo che $t=t'$, ovvero che il tempo ha carattere assoluto ed è lo stesso in S ed in S' allora

$$\left(\frac{dP'_x}{dt} \right)_S = \left(\frac{dP'_x}{dt} \right)_{S'}; \quad \left(\frac{dP'_y}{dt} \right)_S = \left(\frac{dP'_y}{dt} \right)_{S'}; \quad \left(\frac{dP'_z}{dt} \right)_S = \left(\frac{dP'_z}{dt} \right)_{S'}$$

e quindi

$$\left(\frac{dP'_x}{dt} \right)_S \hat{i}' + \left(\frac{dP'_y}{dt} \right)_S \hat{j}' + \left(\frac{dP'_z}{dt} \right)_S \hat{k}' = \left(\frac{dP'_x}{dt} \right)_{S'} \hat{i}' + \left(\frac{dP'_y}{dt} \right)_{S'} \hat{j}' + \left(\frac{dP'_z}{dt} \right)_{S'} \hat{k}' = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{S'}.$$

Ora ricordiamo che

$$\left(\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times \hat{i}' ; \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times \hat{j}' ; \text{etc...}$$

dove $\vec{\omega}$ permette di descrivere il moto relativo di rotazione delle due terne di assi, quindi valgono le relazioni

$$P'_x \left(\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times P'_x \hat{i}' ; P'_y \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times P'_y \hat{j}' ; P'_z \left(\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times P'_z \hat{k}' ,$$

che ci permettono di scrivere:

$$P'_x \left(\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_S + P'_y \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}\right)_S + P'_z \left(\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times P'_x \hat{i}' + \vec{\omega} \times P'_y \hat{j}' + \vec{\omega} \times P'_z \hat{k}' = \vec{\omega} \times \vec{P}$$

Infine possiamo scrivere:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$