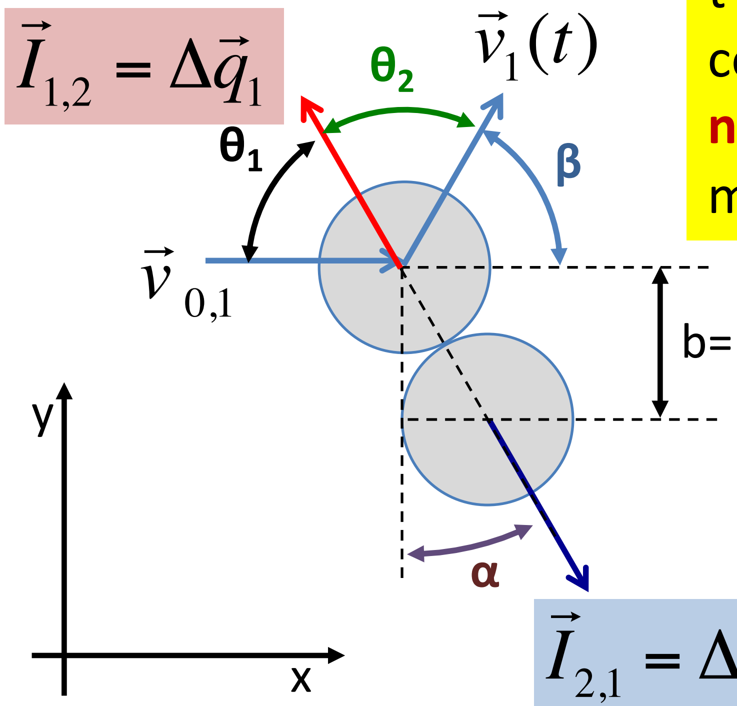
L' urto avviene in un piano

$\vec{I}_{1,2} = \Delta\vec{q}_1$



$\vec{I}_{2,1} = \Delta\vec{q}_2 = \vec{q}_2(t)$

t=0 m_1 in moto con $\vec{q}_{0,1} = m_1\vec{v}_0$ **nel S.R. del lab,** m_2 ferma.

L'urto avviene in un piano, nel piano che contiene $\vec{q}_{0,1}$ e $\vec{I}_{2,1}$.
L'urto è elastico, non ci sono attriti. La componente di $\vec{q}_{0,1}$ ortogonale a $\vec{I}_{2,1}$ rimane inalterata anche dopo l'urto, la componente lungo $\vec{I}_{2,1}$ è comune sia a $\vec{q}_{0,1}$ che a $\vec{q}_{1,1}$ (ma cambiata di segno).
Da ciò derivano le relazioni:
$|\vec{q}_{0,1}|=|\vec{q}_1(t)|$ e quindi per geometria anche $\theta_1 = \theta_2$. Dal disegno si evince:

$$\beta = \pi - \theta_1 - \theta_2 = \pi - 2\theta_1$$

$$\pi = \alpha + \frac{\pi}{2} + \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\beta = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$$

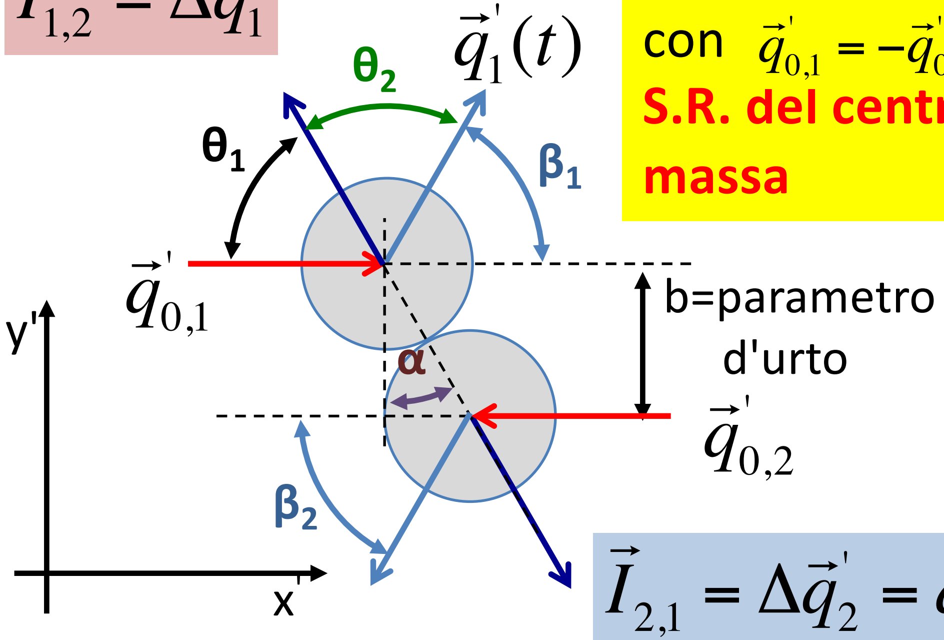
Chiamando R_1 ed R_2 i raggi delle due masse m_1 ed m_2 si ha anche

$$(R_1 + R_2)\cos\alpha = b \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b}{R_1 + R_2}$$

Il S. R. del centro di massa si muove con velocità $\vec{v}_{CM} = {m_1\vec{v}_0}\big/{(m_1 + m_2)}$, le due masse nel S.R. del C.M. hanno velocità:

$$\vec{v}_1'(t) = \frac{\vec{q}_1'(t)}{m_1} = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \vec{v}_1'(t) = \left(v_{0,1} - \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\right)\hat{v}_1'(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\hat{v}_1'(t)$$

$$\vec{I}_{1,2} = \Delta\vec{q}_1^{\,'}$$



t=0 m_1 e m_2 in moto con $\vec{q}_{0,1}^{\,'} = -\vec{q}_{0,2}^{\,'}$ nel **S.R. del centro di massa**

$$\vec{I}_{2,1} = \Delta\vec{q}_2^{\,'} = q_2^{'}(t)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \qquad \vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_0 \big/ (m_1 + m_2)$$

$$\beta = \pi - \theta_1 - \theta_2 = \pi - 2\theta_1$$

$$\pi = \alpha + \frac{\pi}{2} + \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\beta_1 = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$$

$$\beta_1 = \beta_2$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{v}_1^{\,'}(t) &= \frac{\vec{q}_1^{\,'}(t)}{m_1} = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_{CM} = \left(v_{0,1} - \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\right)\hat{v}_1^{'}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\hat{v}_1^{'}(t) \\
\vec{v}_2^{\,'}(t) &= \frac{\vec{q}_2^{\,'}(t)}{m_2} = 0 - \vec{v}_{CM} = \left(0 - \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\right)\hat{v}_2^{'}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\hat{v}_2^{'}(t)
\end{aligned}\right\}$$

nel S.R. del centro di massa

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = \cos 2\alpha$$
$$\sin\beta_1 = \sin\beta_2 = \sin 2\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}
v_{1,x}(t) &= \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\cos\beta_1 + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2} \quad ; \quad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\sin\beta_1 \\
v_{2,x}(t) &= \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\cos\beta_2 + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2} \quad ; \quad v_{2,y}(t) = -\frac{m_1 v_{0,1}}{m_1 + m_2}\sin\beta_2
\end{aligned}\right\}$$

nel S.R. del laboratorio

Quindi nel Sistema di Riferimento del laboratorio:

$$v_{1,x}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cos 2\alpha + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2} \quad ; \quad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cos 2\alpha + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2} \quad ; \quad v_{2,y}(t) = -\frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$

$$v_{1,x}(t) = \frac{v_{0,1}}{m_1+m_2}\left(m_1 + m_2\cos 2\alpha\right); \quad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\left(1-\cos 2\alpha\right) \quad ; \quad v_{2,y}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$

se le masse sono eguali (m_1=m_2) e l'urto è centrale b=0

$$b = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = 0, \quad \cos 2\alpha = -1$$

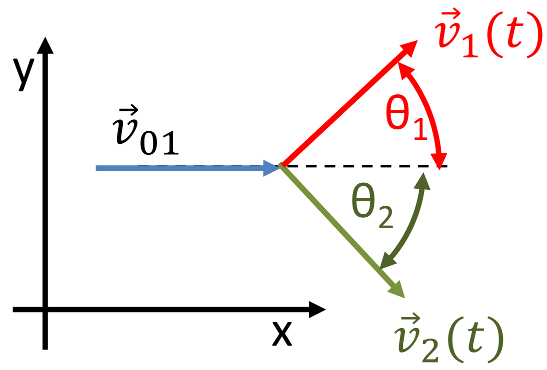
$$v_{1,x}(t) = \frac{v_{0,1}}{m+m}\left(m-m\right) = 0 \quad ; \quad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cdot 0 = 0$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{m v_{0,1}}{m+m}\left(1+1\right) = v_{0,1} \quad ; \quad v_{2,y}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cdot 0 = 0$$

Torniamo al caso in cui $\vec{v}_{02}=0$ (bersaglio fermo) ed urto non centrale con b≠0. Esprimiamo le velocità nel S.R. del laboratorio:

$$v_{1,x}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cos 2\alpha + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2} \quad ; \quad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\cos 2\alpha + \frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2} \quad ; \quad v_{2,y}(t) = -\frac{m_1 v_{0,1}}{m_1+m_2}\sin 2\alpha$$



$$v_{1,x}(t) = \frac{v_{0,1}(m_1+m_2\cos 2\alpha)}{m_1+m_2}; \qquad v_{1,y}(t) = \frac{m_2 v_{0,1}\sin 2\alpha}{m_1+m_2}$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{m_1 v_{0,1}(1-\cos 2\alpha)}{m_1+m_2}; \qquad v_{2,y}(t) = \frac{-m_1 v_{0,1}\sin 2\alpha}{m_1+m_2}$$

se le masse sono eguali ($m_1=m_2$)

$$v_{1,x}(t) = \frac{v_{0,1}(1+\cos 2\alpha)}{2}; \quad v_{1,y}(t) = \frac{v_{0,1}\sin 2\alpha}{2}$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{v_{0,1}(1-\cos 2\alpha)}{2}; \quad v_{2,y}(t) = -\frac{v_{0,1}\sin 2\alpha}{2}$$

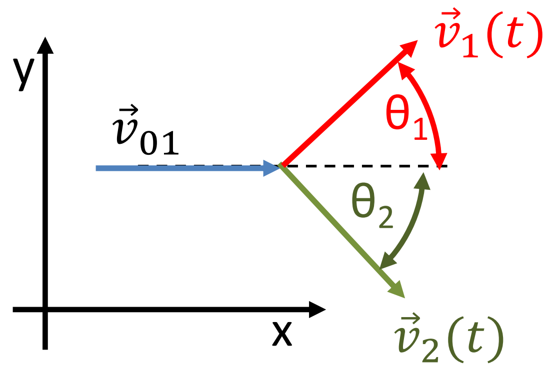
$$tg\,\theta_1 = \frac{v_{1,y}}{v_{1,x}} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$tg\,\theta_2 = \frac{v_{2,y}}{v_{2,x}} = \frac{-\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

$\vec{v}_{02}$=0 (bersaglio fermo), urto non centrale con b≠0, masse uguali (m_1=m_2)

$$v_{1,x}(t) = \frac{v_{0,1}(1+\cos 2\alpha)}{2}; \quad v_{1,y}(t) = \frac{v_{0,1}\sin 2\alpha}{2}$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{v_{0,1}(1-\cos 2\alpha)}{2}; \quad v_{2,y}(t) = -\frac{v_{0,1}\sin 2\alpha}{2}$$



$$tg\,\theta_1 = \frac{v_{1,y}}{v_{1,x}} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$tg\,\theta_2 = \frac{v_{2,y}}{v_{2,x}} = \frac{-\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

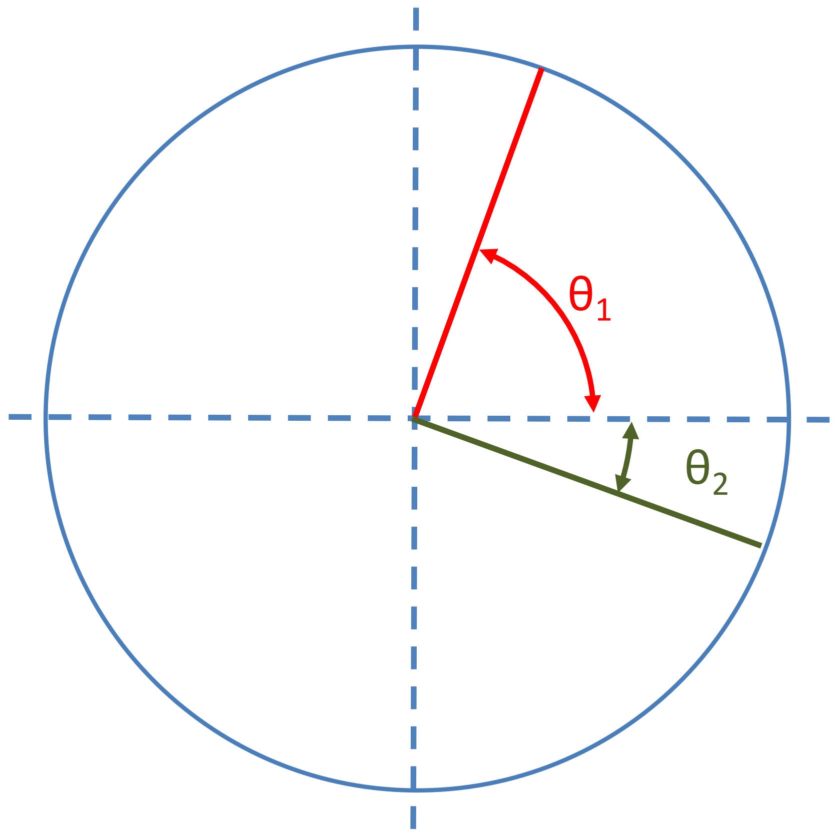
$$tg\;\theta_1 = -\frac{1}{tg\,\theta_2}$$

$$\theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Se le masse m_1 ed m_2 non fossero uguali le formule sarebbero solo un po’ più complicate

$$\boldsymbol{\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$$\sin\theta_1 = \cos\theta_2$$
$$\cos\theta_1 = -\sin\theta_2$$



$$tg\,\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\cos\theta_2}{-\sin\theta_2} = -\frac{1}{tg\,\theta_2}$$

Urto di un proiettile contro un muro, un corpo di massa molto maggiore

Consideriamo ancora urti elastici … abbiamo ricavato le componenti delle velocità finali dei due corpi dopo l'urto

$$v_{1,x}(t) = \frac{\vec{v}_{0,1}(m_1+m_2\cos 2\alpha)}{m_1+m_2}; \qquad v_{1,y}(t) = \frac{m_2\vec{v}_{0,1}\sin 2\alpha}{m_1+m_2}$$

$$v_{2,x}(t) = \frac{m_1\vec{v}_{0,1}(1-\cos 2\alpha)}{m_1+m_2}; \qquad v_{2,y}(t) = \frac{-m_1\vec{v}_{0,1}\sin 2\alpha}{m_1+m_2}$$

Poniamo ora m_1=proiettile ; m_2= bersaglio con massa M >> m_1 (un muro, un corpo di massa ∞ con velocità iniziale nulla $\vec{v}_2(t=0)=0$)

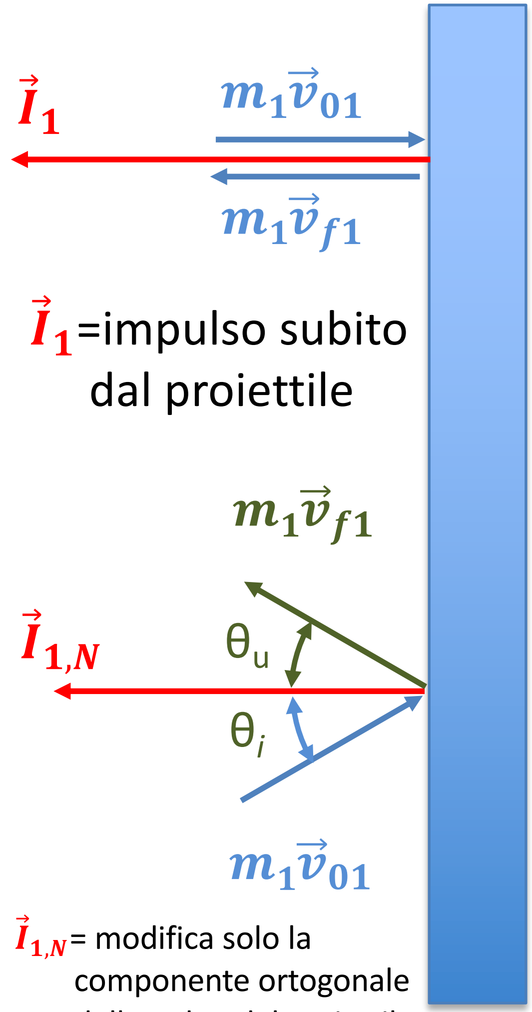
In tal caso la velocità del C.M. $v_{CM} = \frac{m_1\, v_{0,1}}{m_1+M} \approx 0$ è nulla !, il C.M. è fermo !!
Quindi il S.R. del C.M. coincide con il S.R. del Laboratorio e se $\Delta\vec{q}$ è la variazione della quantità di moto del proiettile $\Delta\vec{q}_M = -\Delta\vec{q}$ è la variazione della q.d.m. del muro (!). Ma $\Delta\vec{q}_M = \vec{q}_M(t) - \vec{q}_M(0) = \vec{q}_M(t)$ e l'energia cinetica conseguita dal muro è pari a $K_M = \frac{q_M^2(t)}{2M}$=0 quindi anche $\vec{q}_M(t)$=0.
Ciò implica che per il proiettile si deve conservare (nel C.M. e quindi anche nel laboratorio) l'energia cinetica $K_{1,m_1} = \frac{q_{1,m_1}^2}{2m_1} = K_{0,m_1} = \frac{q_{0,m_1}^2}{2m_2}$ e quindi che
$q_{1,m_1} = q_{0,m_1}$ il modulo della quantità di moto del proiettile si conserva !!!

Urto di un proiettile contro un muro, un corpo di massa molto maggiore

Nella pagina precedente abbiamo ricavato che nell'urto elstico di un proiettile contro un muro: $\boldsymbol{q_{f,m_1} = q_{0,m_1}}$ **il modulo della quantità di moto del proiettile si conserva !!!**

Supponiamo che fra proiettile e muro non ci sia attrito.
Il muro è quindi capace di applicare sul proiettile una forza ortogonale alla sua superficie, nessuna componente tangenziale.
Il muro applica su un proiettile che lo urta lungo la normale l'impulso $\vec{I}_1 = \vec{q}_{f,1} - \vec{q}_{0,1} = -2\vec{q}_{0,1}$, ortogonale alla parete.
Il proiettile ha ceduto alla parete un impulso di modulo pari a
$|\vec{I}_M| = |\vec{q}_{0,1} - \vec{q}_{f,1}| = 2\, m_1 v_{01}$

Analogamente, in mancanza di attrito, se il proiettile incide sul muro con una velocità che forma l'angolo θ_i con la normale si conserva la proiezione della quantità di moto lungo la parete:
$m_1 v_{01} \sin\theta_i = m_1 v_{f1} \sin\theta_u$ (da cui $\theta_i = \theta_u$)
mentre per la componente ortogonale alla parete l'impulso ceduto dalla parete al proiettile è
$I_{1,N} = m_1 v_{f,1} \cos\theta_u - (-m_1 v_{0,1} \cos\theta_i) =$
$m_1 v_{f,1}(\cos\theta_u + \cos\theta_i)$



$\vec{I}_{1,N}$= modifica solo la componente ortogonale della q.d.m del proiettile

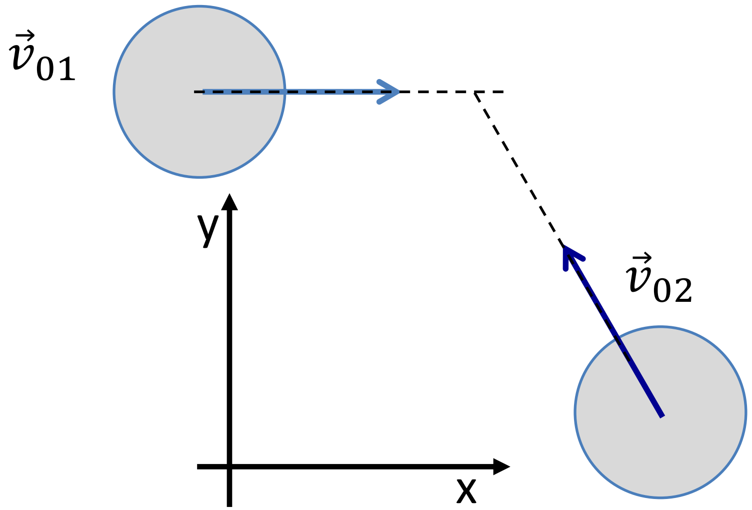
Ancora sugli urti elastici … abbiamo ricavato le componenti delle velocità finali dei due corpi dopo l'urto

Poniamo ora m_1=proiettile ; m_2= bersaglio con massa M >> m_1 (un muro, un corpo di massa ∞ con velocità iniziale nulla $\vec{v}_2(t=0)=0$)

In tal caso la velocità del C.M. $v_{CM}=\frac{m_1\, v_{1,0}}{m_1+M}\approx 0$ è nulla !, il C.M. è fermo !!
Quindi il S.R. del C.M. coincide con il S.R. del Laboratorio e se $\Delta\vec{q}$ è la variazione della quantità di moto del proiettile $\Delta\vec{q}_M=-\Delta\vec{q}$ è la variazione della q.d.m. del muro (!) e l'energia cinetica conseguita dal muto è pari a $K_M=\frac{q_M^2}{2M}$

Continuiamo a supporre che l'urto sia elastico (si conserva l'energia cinetica) ed assumiamo che entrambe le masse (m_1 e m_2) siano in moto con velocità $\vec{v}_{01}$ e $\vec{v}_{02}$.

Il centro di massa si muove con velocità $\vec{v}_{0,CM}$ che rimane costante durante l'urto. Conoscendo la $\vec{v}_{CM}$ possiamo esprimere le velocità delle masse m_1 ed m_2 nel S.R. del C.M.



$$\vec{v}_{0,CM} = \vec{v}_{CM}(t) = \frac{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}'_{01} = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_{01}(m_1+m_2) - m_1\vec{v}_{01} - m_2\vec{v}_{02}}{m_1+m_2} = \frac{\vec{v}_{01}m_2 - m_2\vec{v}_{02}}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02})$$

ed analogamente:

$$\vec{v}'_{02} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01})$$

Conosciamo in tal modo i vettori velocità nel S.R. (inerziale) del Centro di Massa.

Per determinare in modo completo la cinematica dell'urto (nel piano) dovremo definire gli angoli che le velocità finali di ognuno dei due corpi formeranno ad esempio con la direzione del moto del proiettile o del C.M. Necessaria la conoscenza del parametro d'urto "b".

Condizioni di anelasticità

Urto: implica una deformazione (più o meno elastica, dei corpi che interagiscono:

$$\vec{f} = -k\Delta\vec{x} \; ; \; U(\Delta x) = \frac{1}{2}k\,(\Delta x)^2$$

deformazione

En. Potenziale associata alla forza elastica

Nelle varie fasi dell'urto:

En. Cinetica ⇒ En. Potenziale ⇒ En. Cinetica

se la trasformazione è completa si ha un urto "elastico" se ad esempio il passaggio En. Potenziale ⇒ En. Cinetica non è completo ⇒ URTO ANELASTICO

Urto anelastico

$E_{meccanica}$ finale $<$ $E_{meccanica}$ iniziale

Se poi ci sono forze attrito non trascurabili fra le sup. di contatto

$$\mathcal{L}_{att} = \int \vec{f}_a \cdot d\vec{s}$$

riduce l'energia meccanica totale.

Negli urti anelastici non si conserva l'energia meccanica traslazionale.

$$K_f < K_0$$

o meglio

$$K_f = \varepsilon^2 K_0$$

con $0 < \varepsilon < 1$

reale. (COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE)

$$\frac{q_f^2}{2m} = \varepsilon^2 \frac{q_i^2}{2m} \Rightarrow q_f = \varepsilon q_i$$

Urto parzialmente anelastico

Vediamo cosa succede nel S.d.R. del centro di massa. Ovviamente in tale S.d.R.

$$\boldsymbol{\vec{Q}_0^* = M\vec{v}_{CM}^* = \vec{q}_{01}^* + \vec{q}_{02}^* = 0}$$

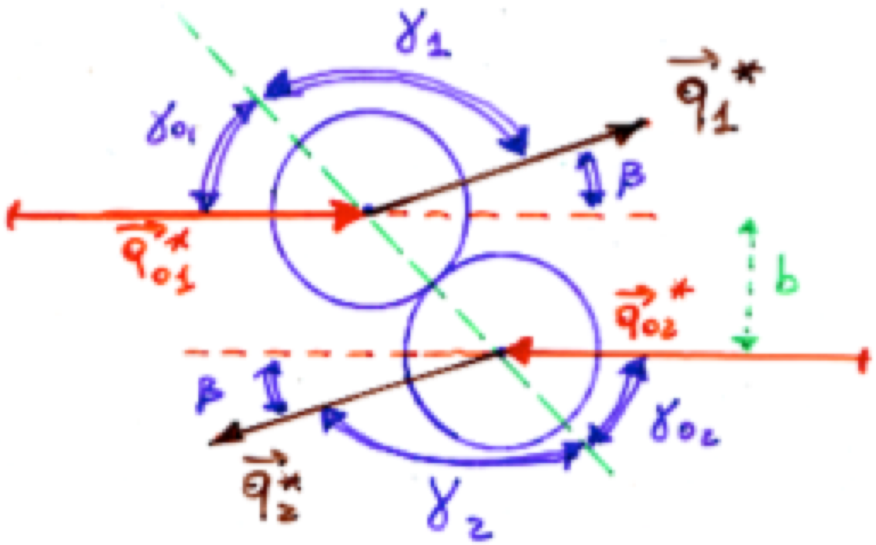
ma l'energia cinetica non si conserva completamente quindi

$$q_{f1}^* \neq q_{01}^* \quad e \qquad \boldsymbol{q_{f2}^* \neq q_{02}^*}$$

in particolare possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{q_{f1}^* = \epsilon q_{01}^*} \quad e \qquad \boldsymbol{q_{f2}^* = \epsilon q_{02}^*}$$

Urto anelastico



Se $\varepsilon \neq 1$

$\gamma_{01} \neq \gamma_1$

(non è più $\vec{q}_1 = \vec{q}_{01}$)

$\gamma_{02} \neq \gamma_2$

PERÒ È ANCORA $\vec{q}_1^{\,*} = -\vec{q}_2^{\,*}$

$$\left(\vec{Q}_f^{\,*} = \vec{Q}_0^{\,*} = 0\,!\right)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

Ricapitolando

$\vec{Q}_0^{\,*} = \vec{Q}_1^{\,*} = 0 \Rightarrow \vec{q}_1^{\,*} = -\vec{q}_2^{\,*}$ (3 equazioni scalari)

$K_{TOT}^{*} = \varepsilon^2 K_{0\,TOT} \Rightarrow q_1^{*} = \varepsilon\, q_{01}^{*}$ (1 equazione scalare)

Urto anelastico

$\vec{Q}_0^* = \vec{Q}_1^* = 0 \rightarrow \vec{q}_1^{\,*} = -\vec{q}_2^{\,*}$ (3 equazioni scalari)

$K_{TOT}^* = \varepsilon^2 K_{0TOT}^* \rightarrow q_1^* = \varepsilon q_{01}^*$ (1 equazione scalare)

Il problema ha 6 incognite

$q_{1\,x,y,z}$; $q_{2\,x,y,z}$

Dobbiamo ricavare informazioni sul piano del moto e sull'angolo β.

Per gli urti elastici $\Rightarrow \beta = 2\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1+R_2}$

tutto era determinabile noto b

ORA NON E' PIU' COSI'

ORA β deve essere ricavato da misure !!

Urto anelastico

PIANO DELL'URTO: CONTIENE $\vec{q}_{01}, \vec{q}_1$

DA INDIVIDUARE CON MISURE

e quindi anche $\vec{q}_2$

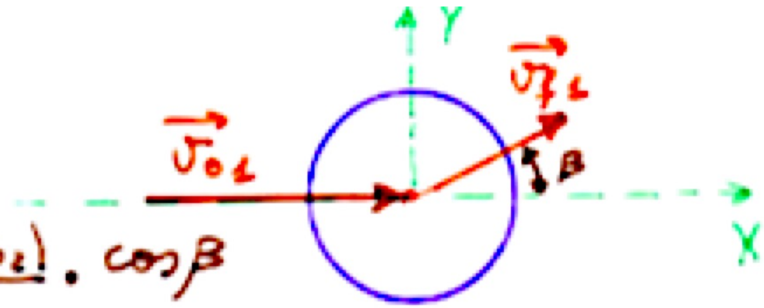
Nel caso in cui $v_{01} \neq 0$, $v_{02} \neq 0$

$$\begin{cases} \vec{v}_{01}^{\,*} = \vec{v}_{01} - \vec{V}_c = \vec{v}_{01} - \dfrac{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} \\[2ex] \vec{v}_{02}^{\,*} = \vec{v}_{02} - \vec{V}_c = \vec{v}_{02} - \dfrac{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{01}^{\,*} = m_2\left(\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\right)/(m_1 + m_2) \\ \vec{v}_{02}^{\,*} = m_1\left(\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}\right)/(m_1 + m_2) \end{cases}$$

Urto anelastico

$$|\vec{v}_{f1}^{\,*}| = \varepsilon\,|\vec{v}_{o1}^{\,*}|$$



$$\begin{cases} v_{f1x}^{*} = \varepsilon\,\dfrac{m_2(v_{o1}-v_{o2})}{m_1+m_2}\cdot\cos\beta \\[2ex] v_{f1y}^{*} = \varepsilon\,\dfrac{m_2(v_{o1}-v_{o2})}{m_1+m_2}\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{f2x}^{*} = \varepsilon\,\dfrac{m_1(v_{o2}-v_{o1})}{m_1+m_2}\,\cos\beta \\[2ex] v_{f2y}^{*} = \varepsilon\,\dfrac{m_1(v_{o2}-v_{o1})}{m_1+m_2}\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

N.B.
$(v_{o2}-v_{o1}) < 0$!
$v_{o2} < 0$!!
$v_{o1} > 0$!!

NEL LABORATORIO! e così possiamo calcolare

$$\begin{cases} v_{f1x} = v_{f1x}^{*} + V_c = \varepsilon\,\dfrac{m_2(v_{o1}-v_{o2})\cos\beta}{m_1+m_2} + \dfrac{m_1 v_{o1} + m_2 v_{o2}}{m_1+m_2} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\varepsilon\, m_2(v_{o1}-v_{o2})\cos\beta + m_1 v_{o1} + m_2 v_{o2}}{m_1+m_2} \\[2ex] v_{f1y} = \varepsilon\,\dfrac{m_2(v_{o1}-v_{o2})}{m_1+m_2}\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

Urto anelastico e completamente anelastico

$$0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Casi limite: $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ URTO ELASTICO

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ URTO COMPLETAM. ANELASTICO

$$\varepsilon = 0 \begin{cases} \begin{cases} v_{f1x} = \dfrac{v_{o1} m_1 + m_2 v_{o2}}{m_1 + m_2} \\ v_{f1y} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v_{f2x} = \dfrac{m_1 v_{o1} + m_2 v_{o2}}{m_1 + m_2} \\ v_{f2y} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

← (velocità del baricentro)

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}_c$$

$$K_f^* = \varepsilon^2 K_o^* = 0$$

Nel sistema del baricentro i proiettili dopo l'urto sono fermi