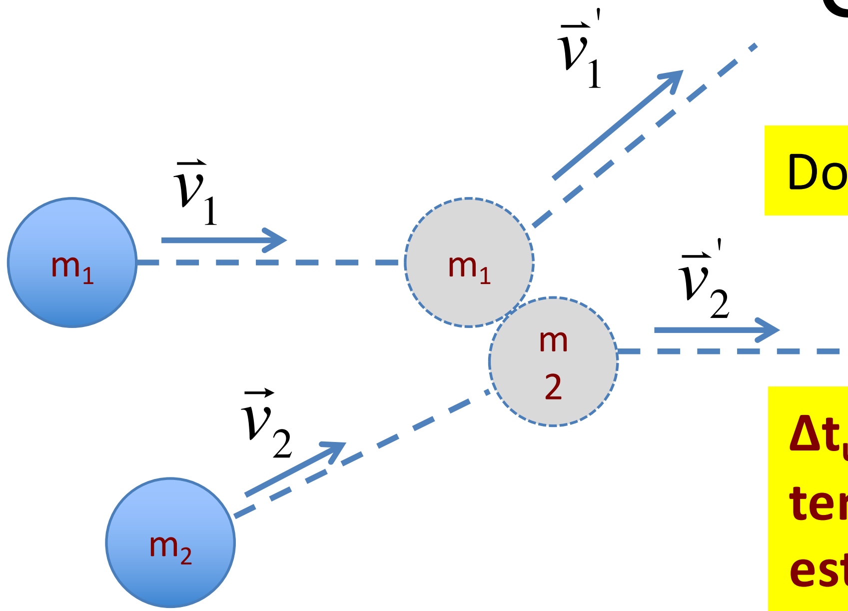
URTI



Dopo l'urto in generale $\begin{cases} \vec{v}_1 \neq \vec{v}_1^{\,'} \\ \vec{v}_2 \neq \vec{v}_2^{\,'} \end{cases}$

Brusca variazione $\Delta t_{urto} \sim 0$

$\Delta t_{urto} \sim 0$ molto piccolo: in tale intervallo di tempo sono trascurabili gli effetti di forze esterne non impulsive: e' come se durante l'urto i due corpi m_1 e m_2 sono "isolati"

In generale, in presenza di forze esterne, per descrivere il moto del sistema m_1, m_2

$$\sum_i \vec{f}_i^{(e)} = \frac{d}{dt}\vec{Q} \quad \text{dove} \quad = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

ma per descrivere il moto delle singole masse m_1 ed m_2 dobbiamo scrivere

$$\vec{f}_1^{(e)} + \vec{f}_{2,1} = \frac{dm_1\vec{v}_1}{dt} \quad \text{dove} \quad \vec{f}_2^{(e)} + \vec{f}_{1,2} = \frac{dm_2\vec{v}_2}{dt}$$

dove $\vec{f}_{2,1}$ è la forza che m_1 applica su m_2 e $\vec{f}_{1,2}$ quella che m_2 applica su m_1

Volendo confrontare l'effetto di forze interne ed esterne (tipo la forza peso) calcoliamone l'impulso nel breve intervallo di tempo in cui avviene l'urto: in tale intervallo Δt_{urto} l'impulso delle forze esterne è trascurabile rispetto a quello delle forze interne

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_1^{(e)}+\vec{f}_{1,2}\right)dt \cong \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_{1,2}\right)dt = \int_{v_1(t_1)}^{v_1(t_2)} d(m_1\vec{v}_1) = m_1(\vec{v}_1(t_2)-\vec{v}_1(t_1)) = \Delta\vec{q}_1$$

quindi $\vec{I}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_{1,2}\right)dt = \Delta\vec{q}_1 \qquad \vec{I}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_{2,1}\right)dt = \Delta\vec{q}_2$

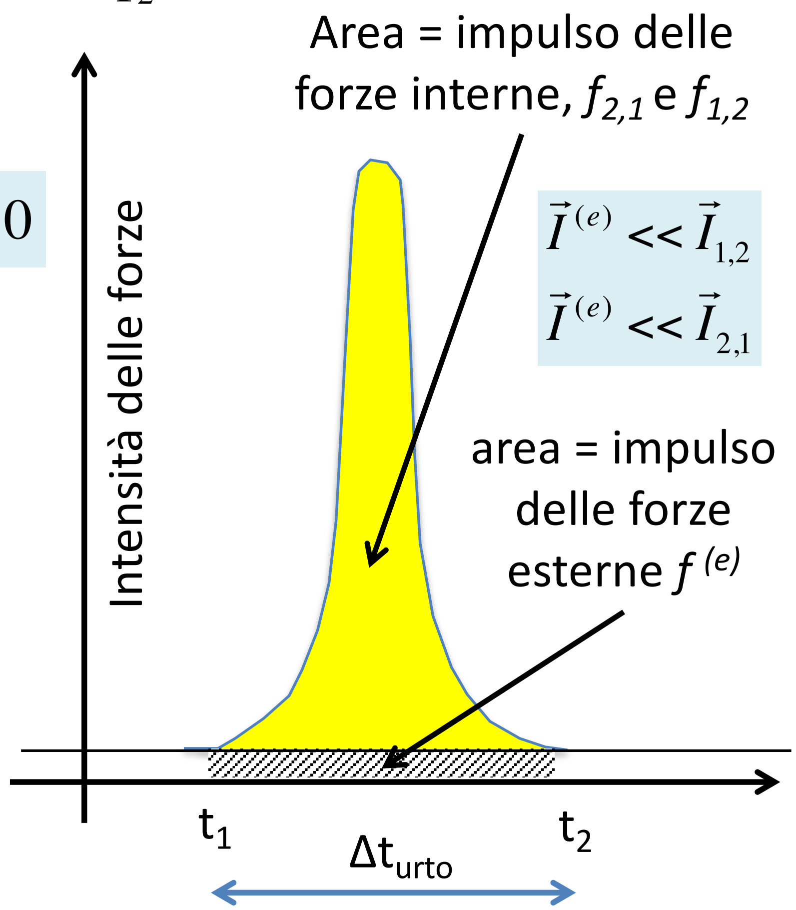
ed essendo

$$\vec{f}_{1,2} = -\vec{f}_{2,1} \Rightarrow \Delta\vec{q}_1 = -\Delta\vec{q}_2 \quad \text{da cui} \quad \Delta\vec{Q} = \Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2 = 0$$

come ci aspettiamo visto che il sistema m_1, m_2 nello intervallo Δt_{urto} è da considerate "isolato".

Durante l'urto (in Δt_{urto}), in assenza di forze esterne "impulsive", si conserva la quantità di moto totale del sistema $\vec{Q} = \text{cost}$. Il centro di massa del sistema si muove di moto uniforme.

$$m_1\vec{v}_1(t_i) + m_2\vec{v}_2(t_i) = m_1\vec{v}_1(t_f) + m_2\vec{v}_2(t_f)$$



Urto centrale elastico

Abbiamo un sistema composto da due punti materiali di massa m_A ed m_B.

Supponiamo di studiare il sistema in un S.R. inerziale.

Supponiamo che le forze esterne al sistema siano trascurabili rispetto alle "forze interne" che le due masse applicheranno una sull'altra durante l'urto.

Ciò comporta che

$\vec{F}^{(e)} = 0 = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \Rightarrow \vec{Q} = \text{costante}$, quindi $m_A\vec{v}_A(t_0) + m_B\vec{v}_B(t_0) = m_A\vec{v}_A(t) + m_B\vec{v}_B(t)$.

Le forze interne sono dirette sulla retta congiungente i centri delle due masse quindi, supponendo che l'urto sia "centrale" (parametro d'urto b=0) e che le velocità siano come in figura, il problema risulta essere unidimensionale:

$$m_A v_A(t_0) + m_B v_B(t_0) = m_A v_A(t) + m_B v_B(t) \qquad \text{(eq. 1)}$$

Supponiamo inoltre che l'urto sia "elastico", cioè che le deformazioni di ognuna delle due masse siano "reversibili" e che non ci sia lavoro compiuto da forze d'attrito. In tal caso si conserva l'energia meccanica totale , che nel nostro caso è solo energia cinetica: $\frac{1}{2}m_A v_A^2(t_0) + \frac{1}{2}m_B v_B^2(t_0) = \frac{1}{2}m_A v_A^2(t) + \frac{1}{2}m_B v_B^2(t)$ (eq. 2)

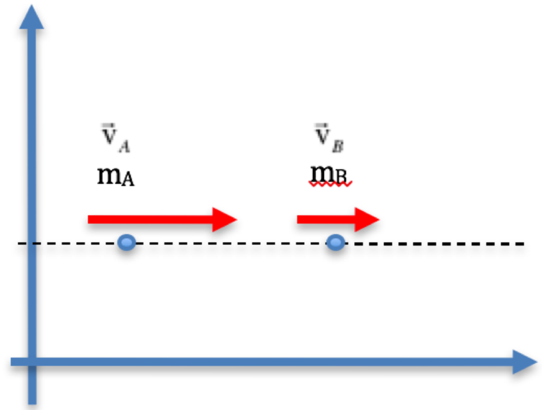
Dalla eq. 1 otteniamo $\quad m_A\left(v_A(t_0) - v_A(t)\right) = m_B\left(v_B(t) - v_B(t_0)\right)$ (eq. 3)

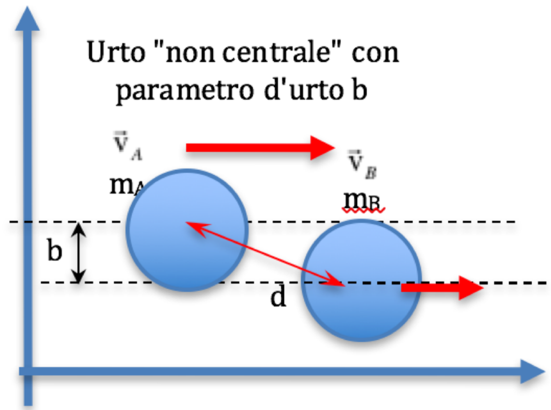
Dalla eq. 2 otteniamo $\quad m_A\left(v_A^2(t_0) - v_A^2(t)\right) = m_B\left(v_B^2(t) - v_B^2(t_0)\right)$ (eq. 4)

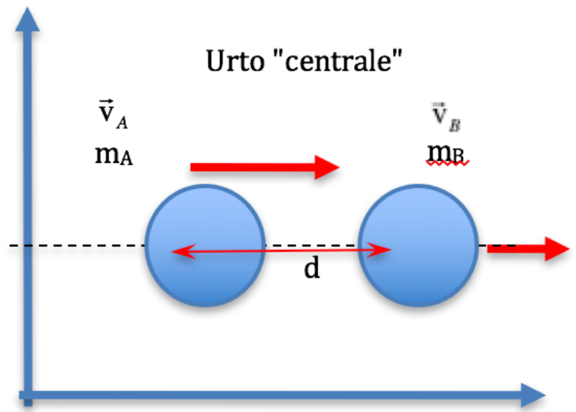
facendo il rapporto (eq. 4)/ (eq. 3) otteniamo $v_A(t_0) + v_A(t) = v_B(t) + v_B(t_0)$ e quindi

$$v_A(t_0) - v_B(t_0) = v_B(t) - v_A(t) = -(v_A(t) - v_B(t)) \qquad \text{(eq. 5)}$$

cioè la velocità relativa dei due corpi dopo l'urto è uguale in modulo al suo valore prima dell'urto ma ha segno opposto (questo risultato è indipendente dal valore delle masse che interagiscono).







Supponiamo ora di avere due "palle da biliardo" di uguale massa ($m_A = m_B$) e dimensione, che si urtano "centralmente".
In particolare sia m_A in moto con velocità v_A (diretta sulla retta che unisce i centri delle due masse) ed m_B con velocità v_B.

Se le forze esterne sono trascurabili (interazione fra le sfere durante l'urto "impulsiva") la quantità di moto totale del sistema si conserva $m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0) = m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t)$ che nel nostro caso diventa $v_A(t_0) + v_B(t_0) = v_A(t) + v_B(t)$.

Ricordando ora l'eq. 5 possiamo scrivere:

$$v_A(t_0) + v_B(t_0) = v_A(t) + v_B(t)$$
$$v_A(t_0) - v_B(t_0) = v_B(t) - v_A(t)$$

sommando le due equazioni **troviamo** $2v_A(t_0) = 2v_B(t)$ **e quindi le due masse si "scambiano le velocità":**

$v_B(t) = v_A(t_0)$ e $v_A(t) = v_B(t_0)$.

In particolare se m_B è inizialmente ferma dopo l'urto la massa m_B procederà con la velocità iniziale di m_A che, a sua volta, dopo l'urto rimarrà ferma

Supponiamo ora che le due masse m_A ed m_B siano differenti. Le relazioni in eq. 5 sono ancora valide. Supponiamo di avere due sfere che si urtano centralmente, ognuna in moto inizialmente con velocità rispettivamente pari a $v_A(t_0)$ e $v_A(t_0)$.

Ovviamente il problema è "ad 1 dimensione" quindi consideriamo solo una equazione scalare per i moduli delle velocità.
Nell'urto impulsivo si conserva la quantità di moto:

$$m_A v_A(t_0) + m_B v_B(t_0) = m_A v_A(t) + m_B v_B(t)$$

Utilizzando l'equazione 5 possiamo scrivere $v_B(t) = v_A(t_0) - v_B(t_0) + v_A(t)$ per cui sostituendo nella relazione precedente abbiamo:

$$m_A v_A(t) + m_B[v_A(t_0) - v_B(t_0) + v_A(t)] = m_A v_A(t_0) + m_B v_B(t_0)$$

che ci permette di ricavare **la velocità della massa m_A dopo l'urto**:
$v_A(t)(m_A + m_B) = v_A(t_0)(m_A - m_B) + 2m_B v_B(t_0)$ e cioè

$$v_A(t) = \frac{v_A(t_0)(m_A - m_B) + 2m_B v_B(t_0)}{m_A + m_B}.$$

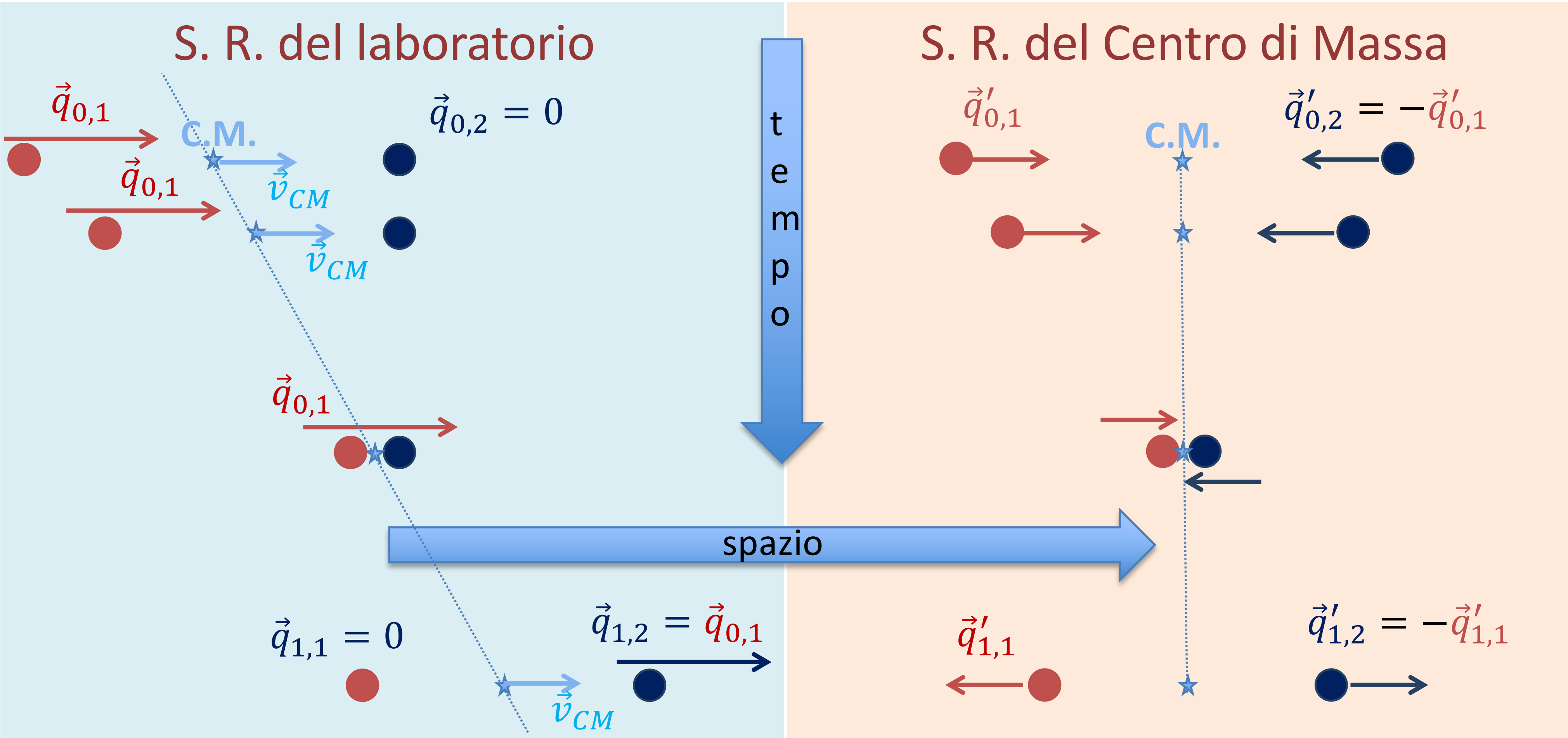
Analogamente possiamo ricavare **la velocità della massa m_B dopo l'urto**

$$v_B(t) = \frac{v_B(t_0)(m_B - m_A) + 2m_A v_A(t_0)}{m_A + m_B}$$

In particolare se $v_B(t_0)$=0 e $m_B \gg m_A$ (ad esempio se la massa m_A urta contro un muro → m_B=infinita) allora

$$v_A(t) = \frac{v_A(t_0)(m_A - m_B) + 2m_B v_B(t_0)}{m_A + m_B} = -v_A(t_0) \quad \textit{ed ovviamente} \quad v_B(t) = 0 \quad .$$

I vantaggi del S.R. del centro di massa (C.M.)



Nel S.R. del C.M. $\vec{q}'_{0,2} = -\vec{q}'_{0,1}$ ed anche $\vec{q}'_2(t) = -\vec{q}'_1(\mathbf{t})$. Inoltre se l'urto è **elastico** si conserva l'energia cinetica $K'_1 = \frac{q'^2_1(t)}{2m_1} + \frac{q'^2_2(t)}{2m_2} = K'_0 = \frac{q'^2_{0,1}}{2m_1} + \frac{q'^2_{0,2}}{2m_2}$.

Nel S.R. del C.M. inoltre in ogni istante $\vec{q}'_2(t) = -\vec{q}'_1(t)$ quindi anche $\vec{q}'_{0,2} = -\vec{q}'_{0,1}$ ciò implica per l'energia cinetica $K'_1 = q'^2_1(t)(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}) = K'_0 = q'^2_{0,1}(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2})$ e quindi:

nel S.R. del C.M. $|\vec{q}'_{0,i}| = |\vec{q}'_i(t)|$ si conserva la q.d.moto delle singole particelle !!!