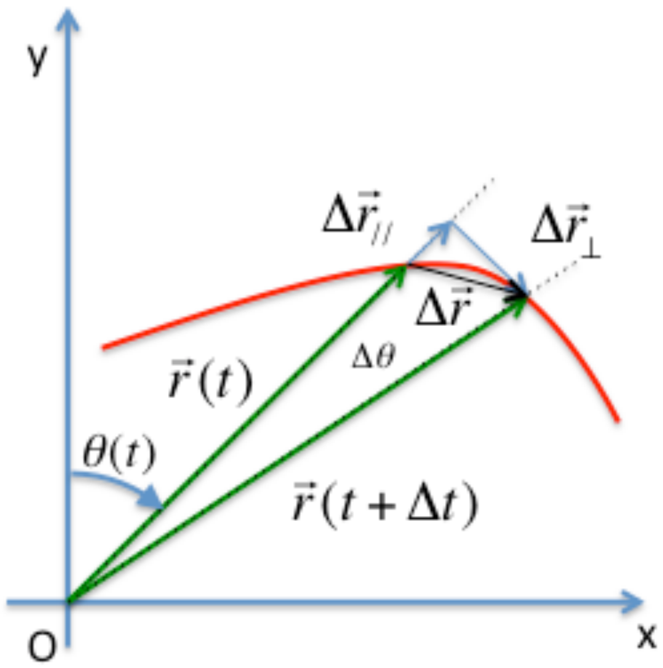
Moto vario di un punto materiale.



Consideriamo per ora un moto su un piano. Nel caso del moto circolare con centro nell'origine la distanza dal punto O rimane invariata mentre l'angolo θ(t) varia nel tempo. In questo caso varia sia l'angolo θ(t) che la distanza $|\vec{r}(t)|$.

Possiamo quindi affermare che varia il vettore $\vec{r}(t)$, varia sia la direzione-verso che il modulo.

Al tempo t la posizione del punto materiale è descritta da $\vec{r}(t)$, al tempo t+Δt è descritta da $\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\Delta\vec{r}$ dove, come si vede dal disegno $\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}_{//}+\Delta\vec{r}_{\perp}$.

Il termine $\Delta\vec{r}_{//}$ descrive la variazione del modulo di $\vec{r}(t)$, il termine $\Delta\vec{r}_{\perp}$ descrive di quanto "è ruotato il vettore $\vec{r}(t)$ nel tempo Δt".

Abbiamo definito velocità media di un punto materiale che si muove sull'asse x come
$\overline{\mathrm{v}}_x(t)=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ e velocità istantanea $\mathrm{v}_x(t)=\frac{d}{dt}x(t)$.

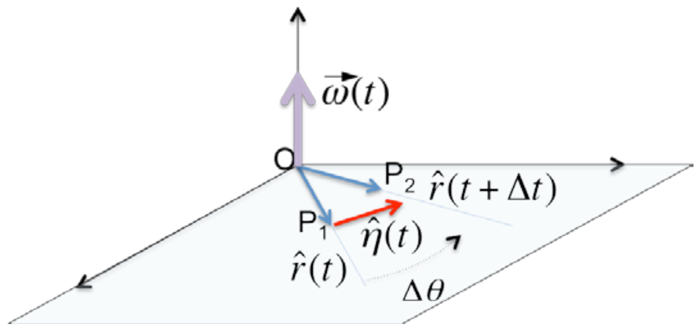
Generalizzando potremmo definire $\mathrm{v}_y(t)=\frac{d}{dt}y(t)$ e quindi rappresentare il vettore $\vec{\mathrm{v}}(t)$ mediante le sue componenti $\vec{\mathrm{v}}\equiv(\mathrm{v}_x,\mathrm{v}_y,0)$.

Analogamente potremmo scrivere $\vec{\mathrm{v}}(t)=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)=\frac{d}{dt}\left[r(t)\cdot\hat{r}(t)\right]=\left(\frac{d}{dt}r(t)\right)\cdot\hat{r}(t)+r(t)\cdot\frac{d}{dt}\hat{r}(t)$.

Il primo termine, $\left(\frac{d}{dt}r(t)\right)\cdot\hat{r}(t)$, è un vettore diretto ed orientato come $\vec{r}(t)$ il cui modulo rappresenta la variazione nel tempo della distanza dal punto O. Il secondo termine $r(t)\cdot\frac{d}{dt}\hat{r}(t)$ deve essere ancora un vettore: la derivate di un versore è un vettore.

La derivate di un versore si definisce come $\frac{d\hat{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{r}(t+\Delta t)-\hat{r}(t)}{\Delta t}$.

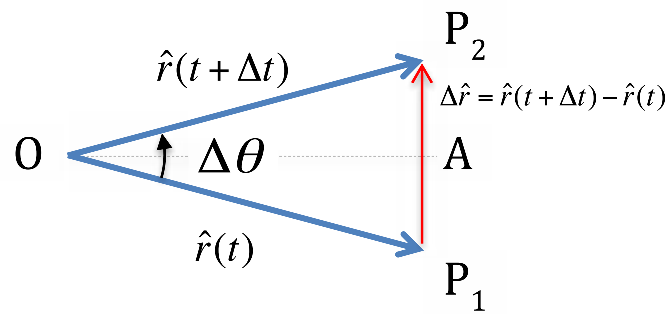
Moto vario di un punto materiale.



Come già detto il risultato è un vettore che ha la stessa direzione e verso del vettore $\Delta\hat{r} = \hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t)$ quando Δt diventa infinitesimo.

Tale vettore sarà ortogonale ad $\hat{r}(t)$ ed il suo verso sarà definito dal verso del moto (da P_1 a P_2). Chiamiamo $\hat{\eta}(t)$ il versore che rappresenta tale direzione-verso.

E' chiaro che il versore mantiene il modulo =1 e può cambiare nel tempo solo la propria direzione, cioè può ruotare. Supponiamo che nell'intervallo di tempo Δt ruoti di un angolo Δθ. In tal caso possiamo scrivere $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t)}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Dal disegno possiamo osservare che il numeratore del rapporto incrementale $\Delta\hat{r} = \hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t)$ è rappresentato dal segmento $\overline{P_1P_2} = 2 \cdot \overline{AP_2} = 2 \cdot |\hat{r}| \sin\frac{\Delta\theta}{2}$ per cui sostituendo abbiamo



$\left|\frac{d\hat{r}(t)}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \cdot |\hat{r}| \sin\frac{\Delta\theta(t)}{2}}{\Delta\theta(t)} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = |\hat{r}| \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\theta(t)}{2}}{\frac{\Delta\theta(t)}{2}} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = |\hat{r}| \cdot \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = \omega(t)$. Abbiamo ottenuto tale risultato ricordando che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, che $|\hat{r}(t)| = 1$ e definendo la velocità angolare $\omega(t) = \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t}$.

Ma come abbiamo già detto la derivata di un versore è un vettore; ne abbiamo calcolato il modulo e sappiamo che direzione e verso sono date dal versore $\hat{\eta}(t)$. Possiamo in definitiva scrivere $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\hat{\eta}(t)$. Nel caso più generale della derivata di un vettore, che ruoti con velocità angolare $\omega(t)$, scriveremo $\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d|\vec{a}(t)|}{dt}\hat{a}(t) + |\vec{a}(t)|\omega(t)\hat{\eta}(t)$. Se ora definiamo il "vettore $\vec{\omega}$" ortogonale al piano che contiene il versore $\hat{r}$ e $\Delta\hat{r}$ e con verso tale da "vedere" il versore $\hat{r}$ ruotare in verso antiorario allora possiamo scrivere $\frac{d}{dt}\hat{r} = \vec{\omega} \times \hat{r}$ (formula di Poisson).