

Appendice 11

Coefficienti di

Clebsch-Gordan

Corso di Fisica Nucleare e
SubNucleare II

Professor Carlo Dionisi

A.A. 2008-2009

Spin e momento angolare

La terra, nel suo moto, trasporta due speci di momento angolare:

- i) il momento angolare orbitale, $r \times m v$, associato con la sua rivoluzione annuale attorno al sole;
- ii) il momento angolare di spin, $I \omega$, associato con la rotazione giornaliera attorno al suo asse nord-sud.

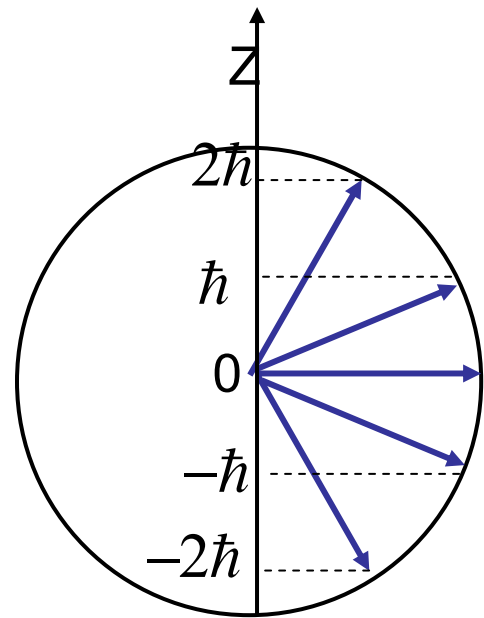
Lo stesso vale per un elettrone in un atomo di idrogeno: anche esso trasporta sia momento angolare orbitale che di spin. Nel caso della terra la distinzione non e' poi 'cosi' profonda; dopotutto il momento angolare di spin della terra non e' altro che la somma totale dei momenti angolari orbitali di tutte le rocce, le zolle di terra etc di cui e' fatta, nella loro orbita giornaliera attorno all'asse di rotazione.

Nel caso dell'elettrone questa interpretazione non e' possibile: l'elettrone, ad oggi, e' una vera particella puntiforme. Quindi il suo momento angolare di spin NON e' attribuibile a parti costituenti che ruotano attorno a un asse.

Il momento angolare di spin e' semplicemente una proprieta' INTRINSECA della particella stessa.

Classicamente possiamo misurare tutte le tre componenti del vettore momento angolare orbitale, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, con qualsiasi precisione voluta e ogni componente puo' assumere qualsiasi valore.

In meccanica quantistica e' IMPOSSIBILE per PRINCIPIO misurare tutte le tre componenti SIMULTANEAMENTE; per esempio una misura di L_x inevitabilmente altera il valore di L_y di una quantita' NON predicibile.



Orientazioni possibili in meccanica quantistica per il vettore momento angolare con $l = 2$

Il meglio che possiamo fare e' misurare il modulo L , o piuttosto il suo quadrato $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ insieme con una componente, di solito L_z .

INOLTRE queste misure possono dare SOLO certi VALORI PERMESSI: il momento angolare orbitale e' quantizzato in unita' intere di \hbar

$$L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_z = m_\ell \hbar$$

$$m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, \ell - 1, \ell$$

($2\ell + 1$ values)

La figura in alto aiuta a visualizzare la situazione per il caso $l = 2$:

$$L^2 = 6\hbar^2; \text{ e } L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar.$$

Lo stesso vale per il momento angolare di spin S . Tuttavia il numero quantico S puo' avere sia un valore semi-intero che intero di \hbar :

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$S_z = m_s \hbar \quad m_s = -s, -s+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, s-1, s$$

(2s+1 values)

Una data particella puo' essere messa in qualsiasi stato di momento angolare orbitale; ma per ciascun tipo di particella il valore di S e' fissato !
 Come abbiamo gia' visto particelle con spin semi-intero li chiamiamo fermioni mentre quelle con spin intero li chiamiamo bosoni.

Somma di Momenti Angolari

Per valutare l'effetto della conservazione del momento angolare nelle reazioni e/o nei decadimenti delle particelle, abbiamo bisogno di capire come si sommano in meccanica quantistica i vettori momenti angolari. Gli stati di momento angolare definito sono indicati con un ket: $|l m_l\rangle, |s m_s\rangle$. Ora puo' accadere che non si sia interessati separatamente ai valori dello spin e del momento angolare, ma piuttosto al valore del momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Per esempio in presenza di un accoppiamento magnetico del sistema elettrone-protone sara' \mathbf{J} , e non individualmente \mathbf{L} e \mathbf{S} , che e' conservato.

Naturalmente in meccanica classica semplicemente sommiamo le rispettive componenti. Ma come detto in meccanica quantistica non abbiamo accesso a tutte le tre componenti; siamo obbligati a lavorare con una componente e il modulo !

Per cui la domanda diventa: se combiniamo stati $|J_1 m_1\rangle$ e $|J_2 m_2\rangle$ cosa otteniamo come momento angolare totale per lo stato $|J m\rangle$?

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

Sottoliniamo subito che, fatto chiaro che gli spin delle particelle hanno un valore intrinseco ben fissato, non e' necessario precisare se stiamo sommando momenti angolari orbitali o di spin.

Le componenti z si sommano come prima, per cui:

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

Invece i moduli NON si sommano: tutto dipende dalle orientazioni relative di \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 .
 La misura di \mathbf{J}^2 può valere:

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

Per j che varia tra $j = |j_1 - j_2|$ e $j = |j_1 + j_2|$ in passi interi.

Se sommiamo tre vettori di momento angolare, prima combiniamo con le regole appena viste due di essi e poi sommiamo al risultato ottenuto il terzo vettore.

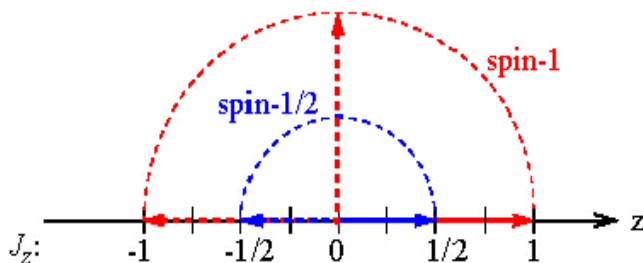


Illustrazione dei valori possibili di J_z
 per particelle con $\text{spin}=1/2$ e $\text{spin}=1$

Si assume che L e S sono "good" quantum numbers con
 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_p$

➤ Se si usano "good" quantum numbers, possiamo identificare le particelle anche usando la **notazione spettroscopica**

$$(2S+1)L_J$$

Se si segue la **tradizione dei chimici** si possono usare al posto dei valori numerici

$L = 0, 1, 2, 3, \dots$ le lettere **S, P, D, F**

In questa notazione, gli stati legati di due particelle di spin=1/2 al livello piu' basso ($L=0$) saranno 1S_0 or 3S_1

$$\begin{array}{cc}
 L=0 & \\
 \begin{array}{c}
 ^1S_0 \\
 \uparrow \downarrow \\
 S=1/2-1/2=0 \\
 J=L+S=0
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 ^3S_1 \\
 \uparrow \uparrow \\
 S=1/2+1/2=1 \\
 J=L+S=1
 \end{array}
 \end{array}$$

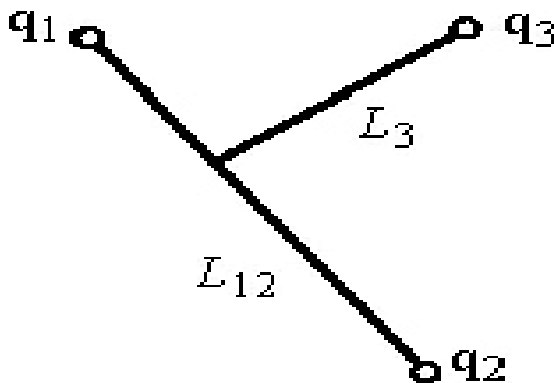
- Per **mesoni** with $L \geq 1$, gli stati possibili saranno:

$$^1L_L, ^3L_{L+1}, ^3L_L, ^3L_{L-1}$$

- I barioni sono stati legati di tre quark \rightarrow ci sono DUE momenti orbitali connessi al moto relativo dei quark

- il momento angolare orbitale totale e' $L = L_{12} + L_3$
- per $L = 0$ lo spin del barione e' $S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow$

$$\text{Se } L = 0: S = 1/2 \text{ or } S = 3/2$$



Stati barionici possibili per diversi valori del momento angolare orbitale interno:

$${}^2S_{1/2}, {}^4S_{3/2} \quad (L=0)$$

$${}^2P_{1/2}, {}^2P_{3/2}, {}^4P_{1/2}, {}^4P_{3/2}, {}^4P_{5/2} \quad (L=1)$$

$${}^2L_{L+1/2}, {}^2L_{L-1/2}, {}^4L_{L-3/2}, {}^4L_{L-1/2}, {}^4L_{L+1/2}, {}^4L_{L+3/2} \quad (L \geq 2)$$

Bosoni (spin intero)		Fermioni (spin semi-intero)	
spin 0	spin 1	spin 1/2	spin 3/2
-	Mediatori delle interazioni	quarks, leptons	-
mésone pseudo-scalari ($\pi, K..$)	mésone vettori ($\rho, K^{*..}$)	barioni (ottetto)	barioni (decupletto)

Particelle elementari

Particelle composte

Coefficienti di Clebsch-Gordan

Ma la prossima domanda è: con che probabilità otteniamo i diversi stati corrispondenti ai vari valori di j ? Due sistemi con spin J_1 e J_2 e componenti m_1 e m_2 possono combinarsi per dare un sistema meccanico che è una combinazione lineare di stati aventi spin J da $|J_1 - J_2|$ a $|J_1 + J_2|$, in passi interi, ciascuno con una componente $m = m_1 + m_2$.

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

I numeri $C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$ sono noti come coefficienti di Clebsch-Gordan e li troviamo su Tavole nel Particle Data Book. Essi danno la probabilità di avere $j(j+1)\hbar^2$, se misuriamo J^2 su un sistema che consiste di due stati di momento angolare $|j_1 m_1\rangle$ e $|j_2 m_2\rangle$. La probabilità è il quadrato dei corrispondenti coefficienti. Andando nella direzione inversa abbiamo:

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j m\rangle \quad m = m_1 + m_2$$

Ripetiamo che, seguendo una vecchia notazione, possiamo anche indicare i numeri quantici di una particella usando la "notazione spettroscopica":

$$(2S+1) L_J$$

Seguendo una tradizione dei chimici, invece dei valori numerici di $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ si possono usare le lettere S, P, D, F... (onda S, onda P etc).

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	\dots
m_1	m_2	\dots
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots
Coefficients		

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$

$d_{1,0}^1 = \cos \theta$

$d_{1,2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

$d_{1,2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$

$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{3/2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{3/2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$

$d_{3/2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{3/2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$

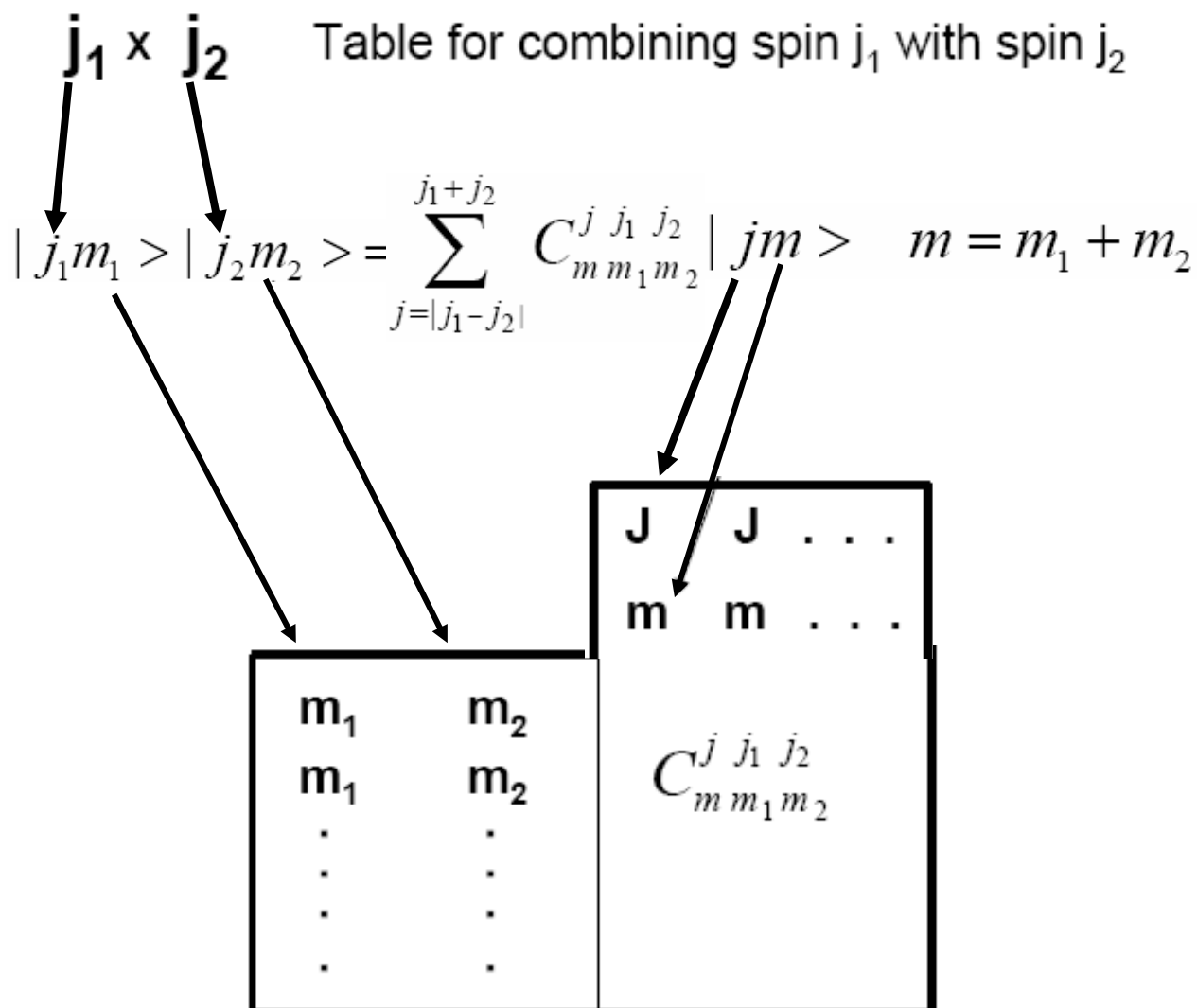
$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$

$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$

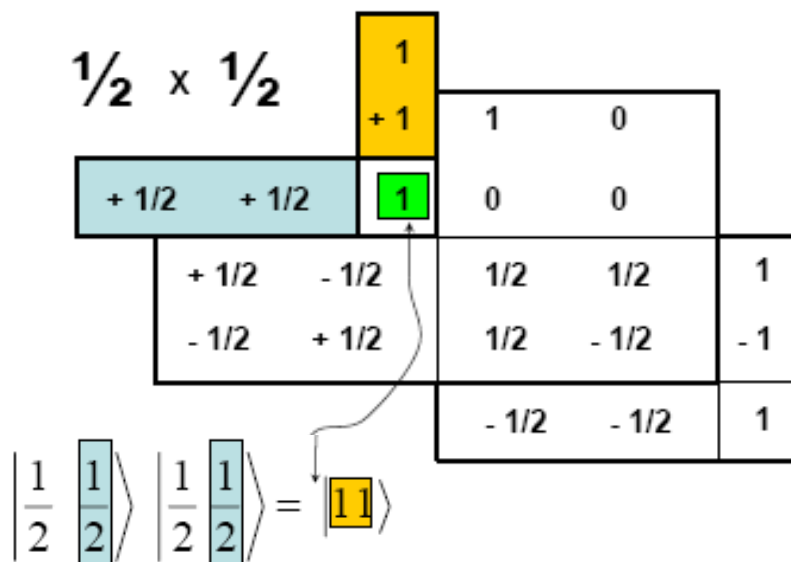
$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Tables of Clebsch-Gordan Coefficients



Combine 2 spin $1/2$ particles



Combine 2 spin 1/2 particles

$1/2 \times 1/2$

		1			
		+1	1	0	
+ 1/2	+ 1/2	1	0	0	
+ 1/2 - 1/2			1/2	1/2	1
- 1/2 + 1/2			1/2	- 1/2	- 1
			- 1/2	- 1/2	1

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$$

$1/2 \times 1/2$

		1			
		+1	1	0	
+ 1/2	+ 1/2	1	0	0	
+ 1/2 - 1/2			1/2	1/2	1
- 1/2 + 1/2			1/2	- 1/2	- 1
			- 1/2	- 1/2	1

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$$

Combine 2 spin 1/2 particles

$1/2 \times 1/2$

		1		
		+1	1	0
+ 1/2	+ 1/2	1	0	0
+ 1/2	- 1/2	1/2	1/2	1
- 1/2	+ 1/2	1/2	- 1/2	- 1
- 1/2	- 1/2	- 1/2	- 1/2	1

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = |11\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\rangle = |1-1\rangle$$

		1		
		+1	1	0
+ 1/2	+ 1/2	1	0	0
+ 1/2	- 1/2	1/2	1/2	1
- 1/2	+ 1/2	1/2	- 1/2	- 1
- 1/2	- 1/2	- 1/2	- 1/2	1

Combine 2 spin $\frac{1}{2}$ particles

Spin triplet (Simmetrico per lo scambio delle particelle 1,2)

$$|11\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|1-1\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Spin singlet (antisimmetrico per lo scambio delle particelle 1,2)

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

Combine 2 spin 1/2 particles

			1		
			+ 1	1	0
+ 1/2	+ 1/2	1	0	0	
	+ 1/2	- 1/2	1/2	1/2	1
	- 1/2	+ 1/2	1/2	- 1/2	- 1
			- 1/2	- 1/2	1

Spin triplet

Symmetric under $1 \leftrightarrow 2$

$$|11\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|1-1\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

Spin singlet

Anti-symmetric under $1 \leftrightarrow 2$

Isospin

Abbiamo stabilito che le interazioni forti ed elettromagnetiche conservano la stranezza e, come vedremo, il charm, la bellezza e il top. L'isospin e' una versione di conservazione del numero quantico tra i quark u e d. Questo come detto e' legato al fatto che le loro masse sono molto simili. Consideriamo il protone e il neutrone come membri di un doppietto di isospin, il nucleone:

$$p = \left| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \quad n = \left| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Come ricordate, Heisenberg propose che le forze forti sono invarianti per rotazione nello spazio dell'isospin. Il teorema della Noether ci dice allora che l'isospin e' conservato nelle interazioni forti.

Altre particelle possono essere classificate in diversi multipletti di isospin con $2I + 1$ elementi, a passi interi di I , per ognuno di essi. Il pione ha isospin 1.

$$\pi^+ = |1 \ 1\rangle \quad \pi^0 = |1 \ 0\rangle \quad \pi^- = |1 \ -1\rangle$$

Dalla formula di Gell-Mann-Nishijima abbiamo:

$$I_3 = Q - \frac{1}{2}(B + S)$$

In realta' stiamo assegnando i quark u e d a un doppietto di isospin

$$u = \left| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \quad d = \left| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Il quark strano e tutti gli altri quark (c, b, t) hanno isospin uguale a zero ! Sono quindi singoletti di isospin:

$$s = |0 \ 0\rangle$$

Notiamo che non c'e' h: per convenzione l'isospin NON ha dimensione. Ovviamente l'isospin , appartenendo solo alle interazioni forti, NON e' definito per I leptoni !

I barioni, fatti di quark u e d, hanno isospin totale di $(1/2 \oplus 1/2) \oplus 1/2$



I mesoni, contenendo solo quark u e d, possono quindi avere isospin 0 o 1

$$\pi^- = \bar{u}d \quad \pi^0 = u\bar{u}, d\bar{d} \quad \pi^+ = u\bar{d} \quad \text{isospin triplet } I = 1$$

$$\eta = u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s} \quad \text{isospin singlet } I = 0$$

Invece mesoni, contenenti **SOLO UN** quark u o d, hanno isospin $I = 1/2$

$$K^0 = d\bar{s} \quad K^+ = u\bar{s} \quad \text{form an isospin doublet}$$

$$\bar{K}^0 = \bar{d}s \quad K^- = \bar{u}s \quad \text{form a separate isospin doublet}$$

Alcuni assegnazioni di valori di Stranezza e Isospin

B	S	I	I^3				
			-1	-1/2	0	+1/2	+1
1	0	1/2		n		p	
1	-1	0			Λ		
0	0	1	π^-		π^0		π^+
1	+1	1/2		K^0		K^+	
1	-1	1/2		K^-		\bar{K}^0	
1	-1	1	Σ^-		Σ^0		Σ^+
1	-2	1/2		Ξ^-		Ξ^0	
1	-3	0			Ω^-		
0	0	0			η		

Alcune conseguenze della Conservazione dell' Isospin

Tutti gli adroni appartengono a multipletti di isospin. I valori delle masse all'interno di questi multipletti varia di qualche per cento, 4% per il tripletto dei pioni.

Possiamo considerare la massa di una particella come un autovalore della sua hamiltoniana calcolata nel suo sistema di riferimento a riposo:

$$H = H_s + H_e + H_w$$

Poiche' le interazioni forti conservano l'isospin la parte di massa che dipende da H_s deve avere lo stesso valore per tutti i membri dello stesso multipletto di isospin.

Essendo $H_e \gg H_w$, lo splitting di massa all'interno di un multipletto potrebbe essere dovuto a H_e .

I rate di decadimento forte delle **risonanze adroniche** in canali che coinvolgono particelle appartenenti allo stesso multipletto di isospin, essendo I conservato, dipenderanno solo dagli appropriati coefficienti di C-G.

Consideriamo per esempio il decadimento della $\Delta^+(1232)$.

In generale il rate di decadimento e' dato dalla regola d'oro di Fermi:

$$\Gamma \propto |\langle f | H | i \rangle|^2 \rho(E)$$

I canali di decadimento della Δ^+ , che ha $I = 3/2$, sono in $p\pi^0$ e $n\pi^+$ e poiche' l'isospin si conserva gli stati finali devono avere $I = 3/2$ mentre la combinazione $I = 1/2$ e' proibita.

Consideriamo i due decadimenti:

$$\text{a) } \Delta^+(1232) \rightarrow p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+(1232) = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle; \pi^0 = |1, 0\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle$$

$$\Gamma[\Delta^+(1232) \rightarrow p + \pi^0] \propto \frac{2}{3} |A_{3/2}|^2 \rho(E)$$

dove $A_{3/2}$ e' l'ampiezza indipendente dal particolare stato finale e $2/3$ e' l'appropriato coefficiente di C-G al quadrato.

$$\text{b) } \Delta^+(1232) \rightarrow n + \pi^+ \rightarrow \Delta^+(1232) = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle; \pi^+ = |1, 1\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle$$

$$\Gamma[\Delta^+(1232) \rightarrow n + \pi^+] \propto \frac{1}{3} |A_{3/2}|^2 \rho(E)$$

dove $A_{3/2}$ e' l'ampiezza indipendente dal particolare stato finale e $1/3$ e' l'appropriato coefficiente di C-G al quadrato.

Poiche' le masse delle particelle coinvolte nei due decadimenti sono quasi uguali, il fatto re di spazio delle fasi e' lo stesso e quindi il rapporto tra i due decadimenti a) e b) e' uguale a 2. Questo valore e' confermato dalle misure.

La conservazione dell'isospin nelle interazioni forti determina anche la dinamica delle reazioni che coinvolgono particelle dello stesso multipletto di isospin ponendo condizioni ben precise alle sezioni d'urto dei processi relativi. A pagina 266 e 267 del Burcham and Jobes (B. and J.) sono illustrate alcune reazioni e le relazioni relative.

Nel seguito riassumiamo solo i punti fondamentali.

Consideriamo i multipletti dei π , N, K, Σ che hanno rispettivamente $I = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$ e 1 e studiamo le reazioni:

$$\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0; \pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-; \pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$$

Le sezioni d'urto σ sono proporzionali al quadrato degli elementi di matrice che connettono gli stati iniziali a quelli finali

$$\sigma \propto |\langle f | H | i \rangle|^2 \rho(E)$$

Sia gli stati iniziali che quelli finali coinvolgono particelle con $I=1/2$ e $I=1$ e quindi in generale lo spin isotopico totale puo' essere sia $I=1/2$ che $I=3/2$. Poiche' l'isospin in queste tre interazioni forti e' conservato, ci saranno due canali con due ampiezze tra loro indipendente una corrispondente a $I=1/2$, chiamiamola $A_{1/2}$, e l'altra corrispondente a $I=3/2$, $A_{3/2}$.

Possiamo considerare H formato da due parti indipendenti,

$$H = H_{1/2} + H_{3/2}$$

dove $H_{1/2}$ causa le transizioni nel canale con $I=1/2$ e $H_{3/2}$ nel canale $I=3/2$.

$$\sigma = K |\langle f | H_{1/2} + H_{3/2} | i \rangle|^2$$

dove i fattori spazio delle fasi delle tre reazioni sono circa uguali per cui li ignoriamo.

Per calcolare le relazioni tra le sezioni d'urto per le tre reazioni dobbiamo scrivere ciascun stato iniziale e finale in funzione dei coefficienti di C-G. vedi pagina 267 del B. and J.

e.g. $\pi^0 + n: |1 \ 0\rangle \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle$

Ampiezze di scattering pione-nucleone

$$\pi^+ + p: |1 \ 1\rangle \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + p: |1 \ 0\rangle \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + p: |1 \ -1\rangle \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^+ + n: |1 \ 1\rangle \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + n: |1 \ 0\rangle \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + n: |1 \ 1\rangle \left| \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \ -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$(a) \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$(f) \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$$

Entrambe le reazioni sono in stati puri di $I = 3/2$ in entrambi i lati della reazione. Quindi entrambe procedono puramente via l'ampiezza $I = 3/2$: \mathcal{M}_3

Ampiezze di scattering pione-nucleone

$$\pi^- + p: |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

(c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \left| H_3 \right| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \left| H_1 \right| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3} \mathcal{M}_3 + \frac{2}{3} \mathcal{M}_1$$

$$\pi^- + p: |1 -1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + n: |1 0\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

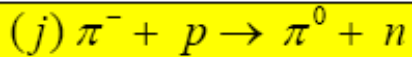
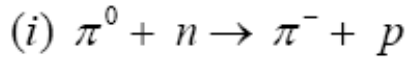
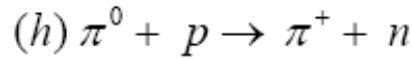
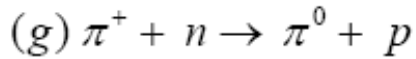
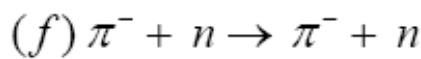
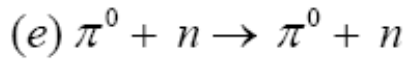
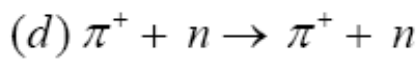
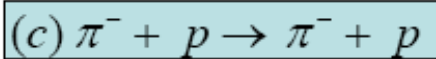
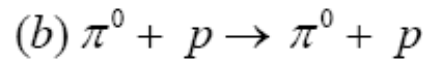
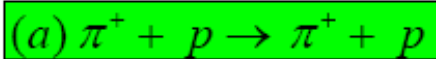
(j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

$$\mathcal{M}_j = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{M}_3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{M}_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} (\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1)$$

\mathcal{M} e' una ampiezza quantum meccanica.

La sezione d'urto, cioe' le probabilita' della reazione, e' proporzionale a \mathcal{M}^2

Scattering di pioni carichi con protoni



Confrontiamo le predizioni sulle sezioni d'urto per scattering di pioni carichi su protoni. Ci sono tre processi da confrontare: a), c) e j).

$$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_3$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{2}{3}\mathcal{M}_1$$

$$\mathcal{M}_j = \frac{\sqrt{2}}{3}(\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1)$$

Sezioni d'urto relative per lo scattering $\pi\pi$

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 \left| \mathcal{M}_3 \right|^2 : \left| \mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1 \right|^2 : 2 \left| \mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1 \right|^2$$

A $E_{\text{CMS}} = 1232 \text{ MeV}$ si misura un aumento molto grande (un picco) nella sezione d'urto di scattering pione-nucleone.

Questo e' dovuto a una Risonanza πN (pione-nucleone), scoperta da E. Fermi, la $\Delta(1232)$.

La Δ trasporta isospin $I=3/2$ (per cui ci sono $2(3/2) + 1 = 4$ stati di carica.

Ci aspettiamo che a questa energia lo scattering sia dominato dal canale di isospin $3/2$.

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

In generale, sperimentalmente e' molto piu' facile misurare le sezioni d'urto totali. Quindi i processi (c) e (j) vengono combinati e danno:

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3$$

Cioe' a $E_{\text{CMS}} = 1232 \text{ MeV}$

