

Capitolo 1:

Modello a quark

“ Statico ”

**Corso di Fisica Nucleare e
Subnucleare II**

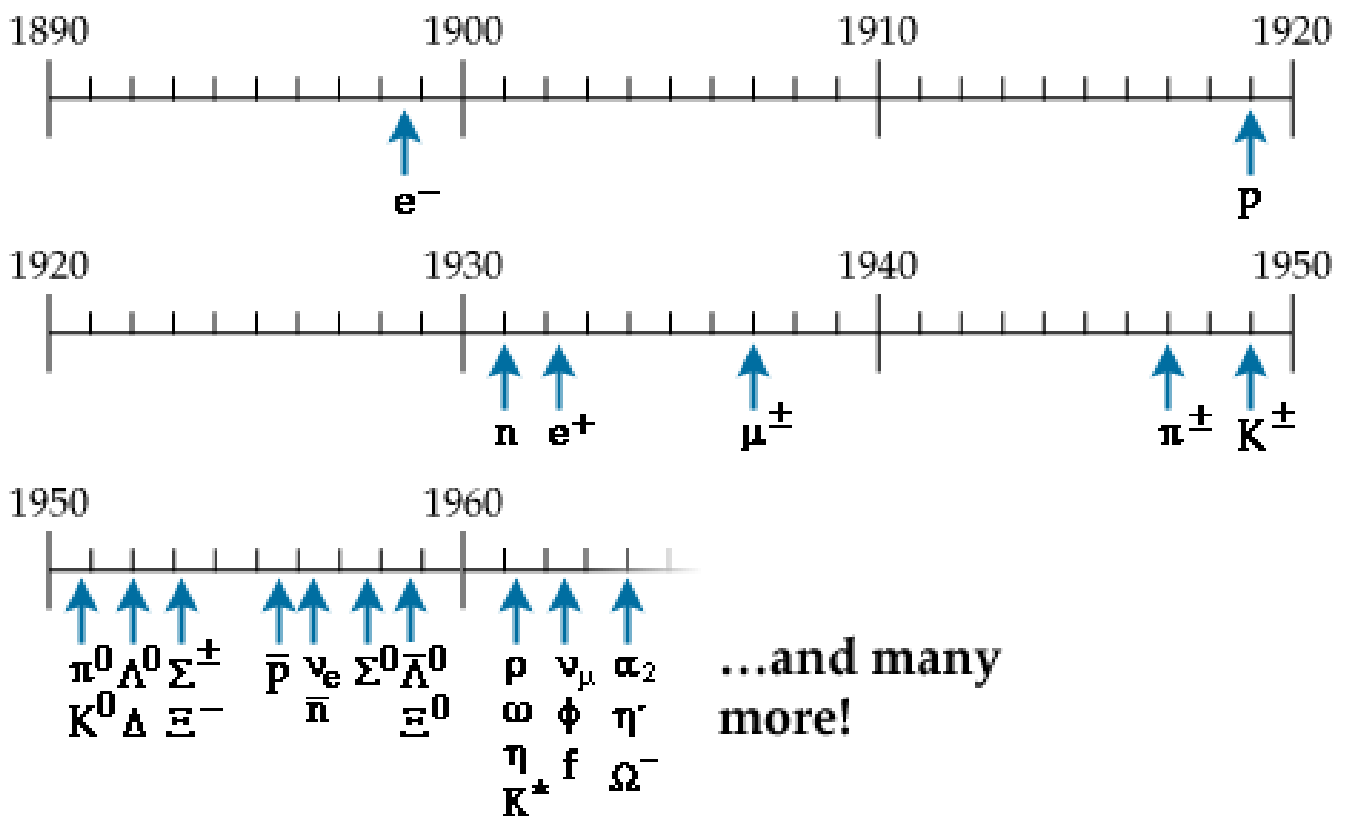
Professor Carlo Dionisi

A.A. 2008-2009

Gli Adroni sono Particelle Elementari ?

➔ Un po di storia

- ★ Il proliferare delle risonanze adroniche, nella figura che segue sono mostrate le particelle scoperte dal 1898 al 1964 in ordine di massa crescente, rendeva stringente una loro “sistemazione” che tenesse conto di eventuali regolarità come, per esempio, quelle sottolineate per i barioni ed i mesoni quando vengono classificati in funzione della carica e della stranezza (vedi dispense del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare I di C. Dionisi).

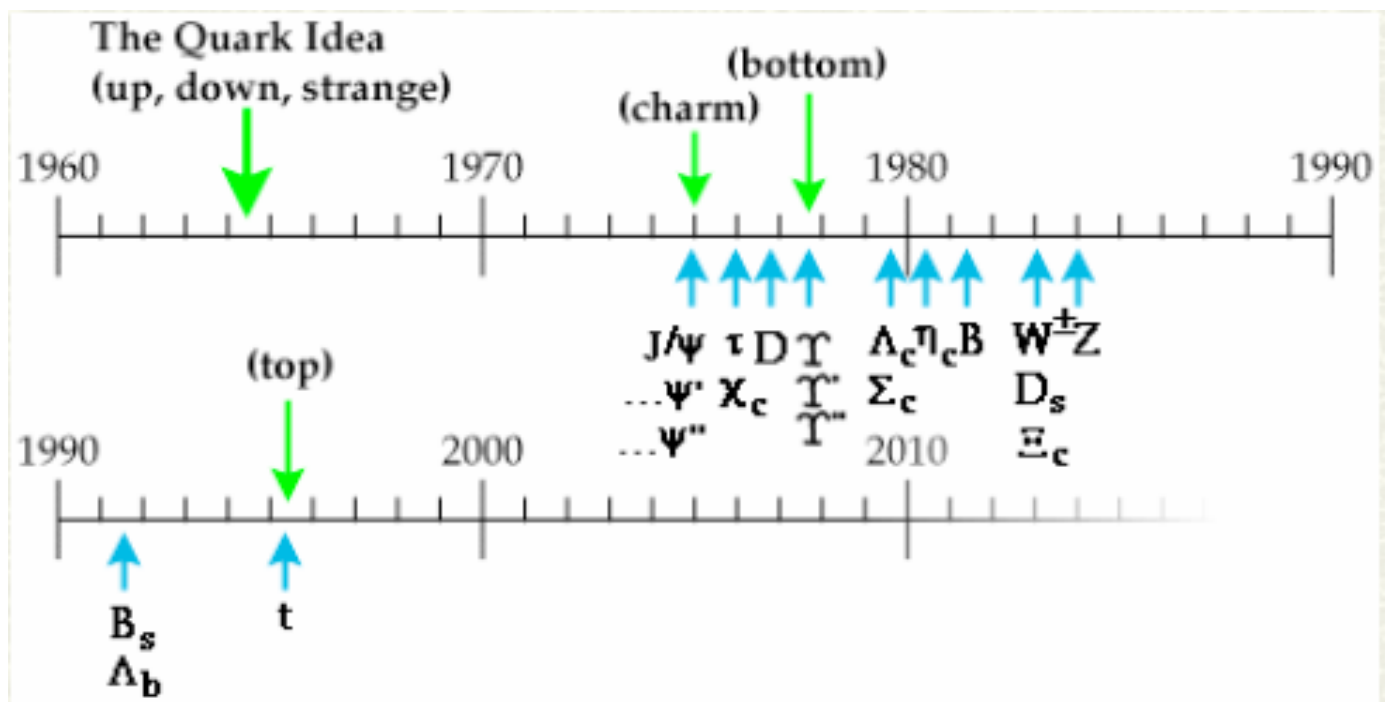


- ★ Fermi e Yang proposero di riprodurre TUTTE le risonanze allora note pensandole composte di stati legati protone-neutrone. Nel 1956 Sakata, per descrivere le risonanze dotate di stranezza, estese questa idea aggiungendo a p e n la Λ : tutte le risonanze sono fatte di $\{p, n, \Lambda\}$ e le loro antiparticelle.

Lo Zoo degli Adroni

- ★ Nel 1961 M. Gell-Mann e, indipendentemente, Y. Ne'eman proposero uno schema che metteva ordine nella giungla delle risonanze. Lo schema, **Eighfold Way**, era basato sulle proprietà del gruppo di simmetria SU(3) SENZA fare ricorso a nessuna struttura interna. Il nome fu coniato da Gell-Mann che prese lo spunto da un detto Buddista: "si deve condurre la propria vita in conformità con gli otto comandamenti della religione Buddista".

➔ Le particelle scoperte ad oggi:



Eightfold Way (1961-1964)

★ L' idea di Gell-Mann, novello Mendeleev delle particelle elementari, fu quella di classificare tutti gli adroni usando la loro carica, I_3 , e l' ipercarica forte, Y . L' aggiunta della stranezza, attraverso l' ipercarica, rendeva naturale "allargare" il gruppo di simmetria dell' isospin, $SU(2)$, ad uno piu' largo di "rango" 2: **$SU(3)$: Special Unitarity group** di dimensione 3.

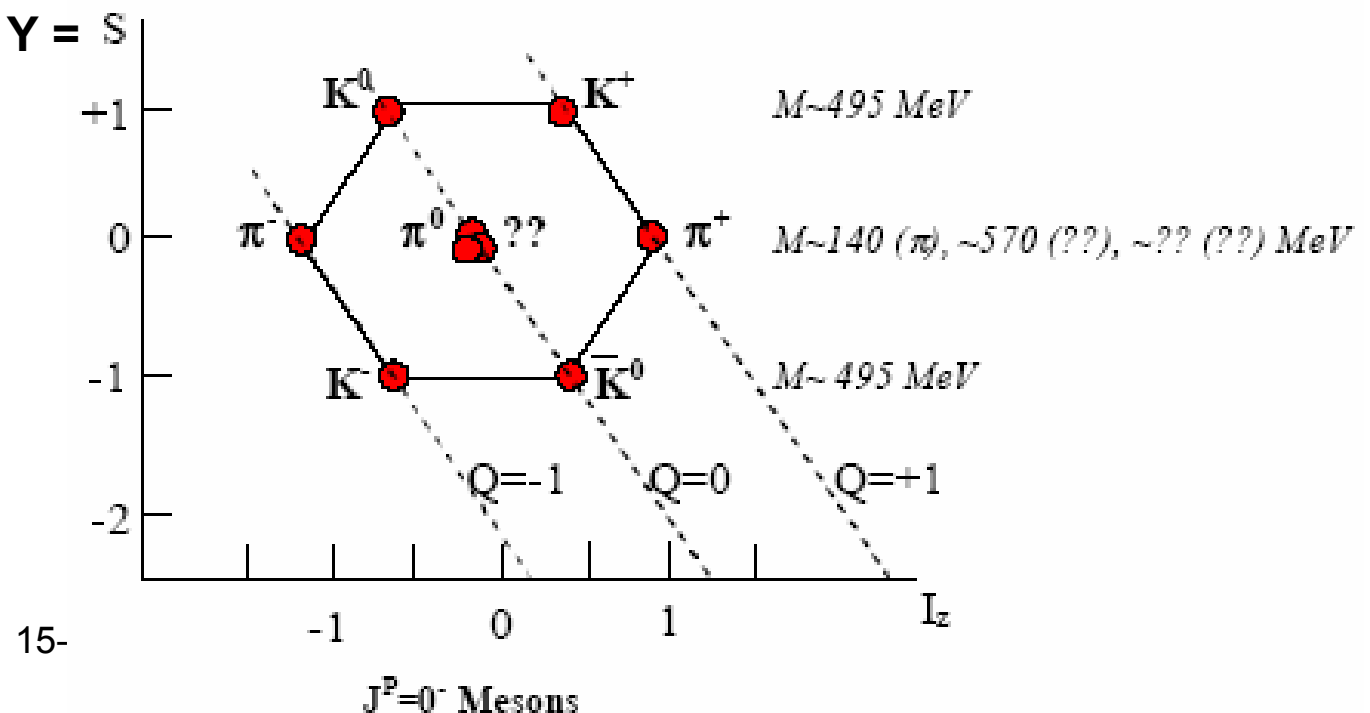
★ Questa simmetria e' chiamata $SU(3)$ di "**sapore**" per distinguerla da $SU(3)$ di "**colore**": la simmetria esatta che forma la base della cromodinamica quantistica (QCD) vedi piu' avanti nel corso.

Le particelle vanno a formare i multipletti di $SU(3)$ e ciascun multipletto contiene particelle che **devono avere** lo stesso valore di spin e parita'. L' entita' basilica del modello e' l' otetto: otto particelle. Tutte le particelle e/o le risonanze appartengono all' otetto o ai multipletti che si ottengono combinando tra loro gli ottetti seguendo regole analoghe a quelle con cui si sommano i momenti angolari.

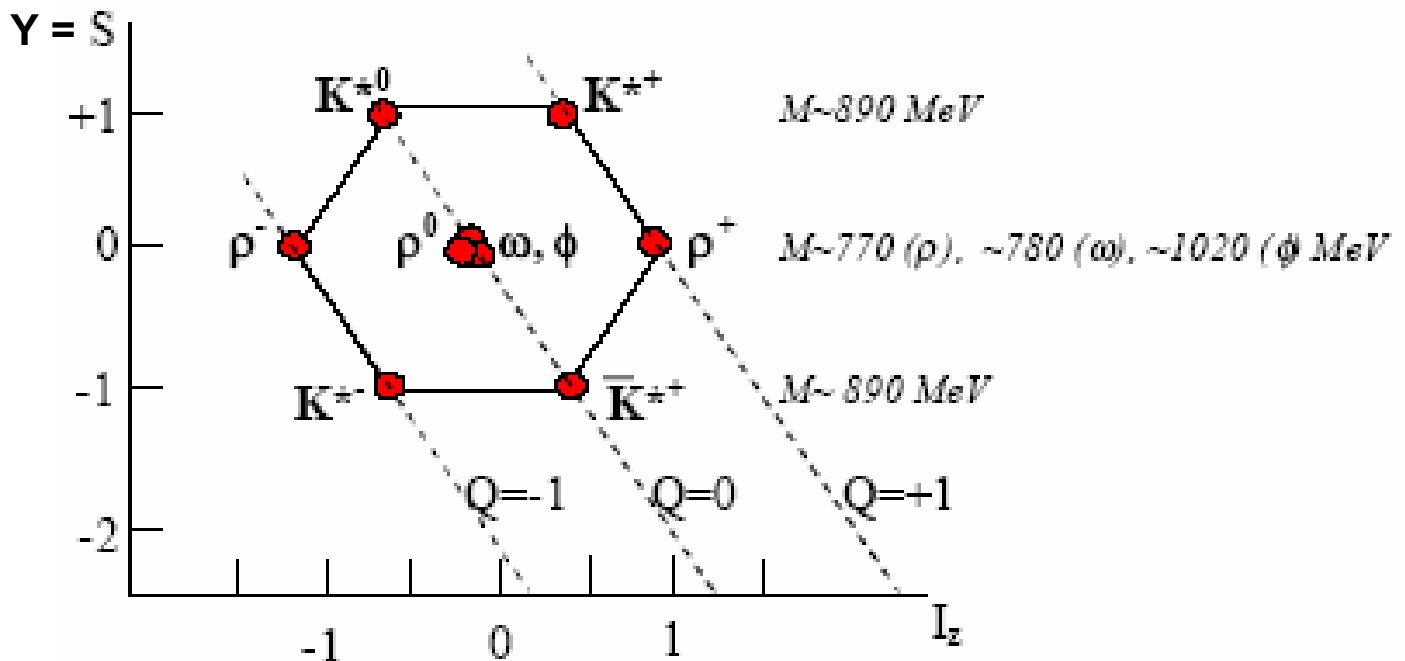
Con due ottetti di $SU(3)$ si possono avere solo multipletti di dimensione 1, 8, 10 e 27. Il multipletto 27, corrispondendo a valori di stranezza +1 mai trovati in natura, viene per questo scartato.

La gestazione di $SU(3)$ fu lunga e difficile. Fu un trionfo per gli autori, non solo trovare che alcuni multipletti riproducevano le particelle/ risonanze fino ad allora conosciute, ma soprattutto fare delle previsioni di esistenza di particelle/risonanze prima che esse fossero scoperte come verra' ricordato in seguito.

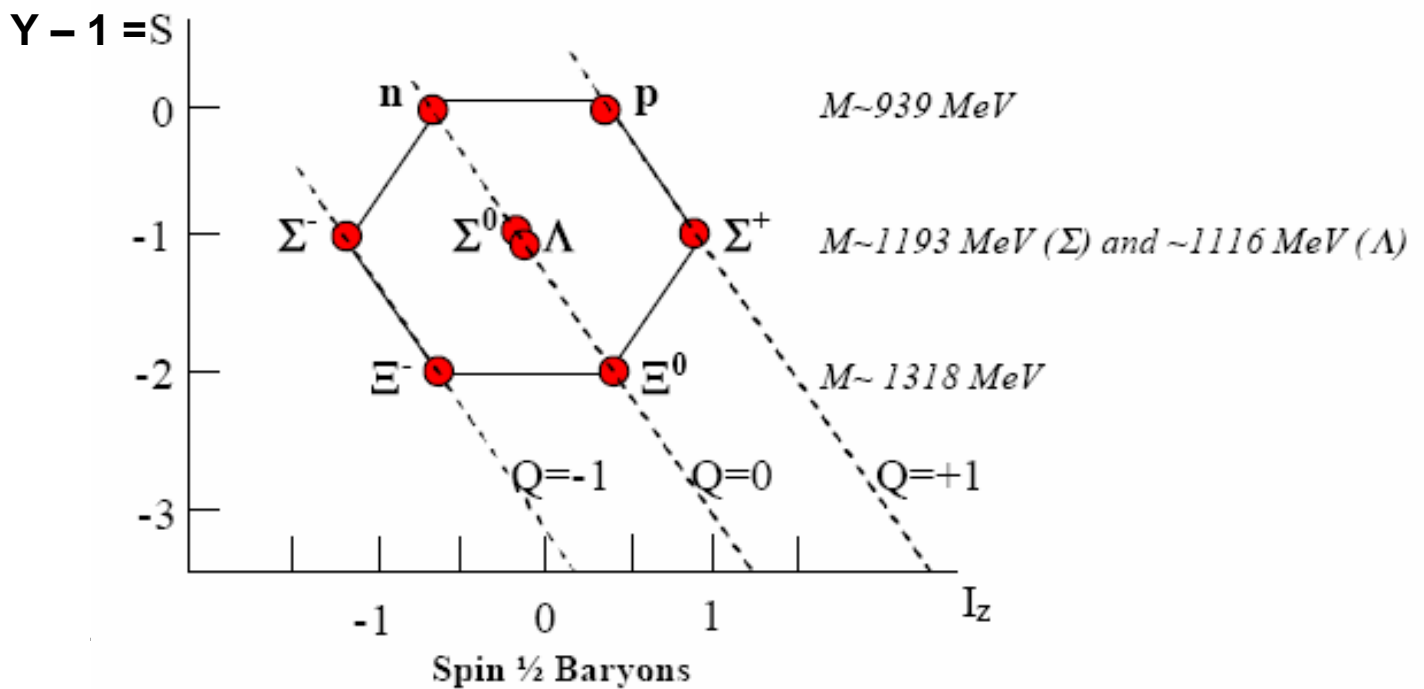
★ Mentre il fatto che il protone ed il neutrone hanno valori della massa quasi identiche rende la simmetria di isospin poco approssimata, la simmetria $SU(3)$, raggruppando insieme particelle strane a quelle non strane e' una simmetria molto piu' approssimata. Di seguito vengono mostrati come esempio alcuni multipletti:



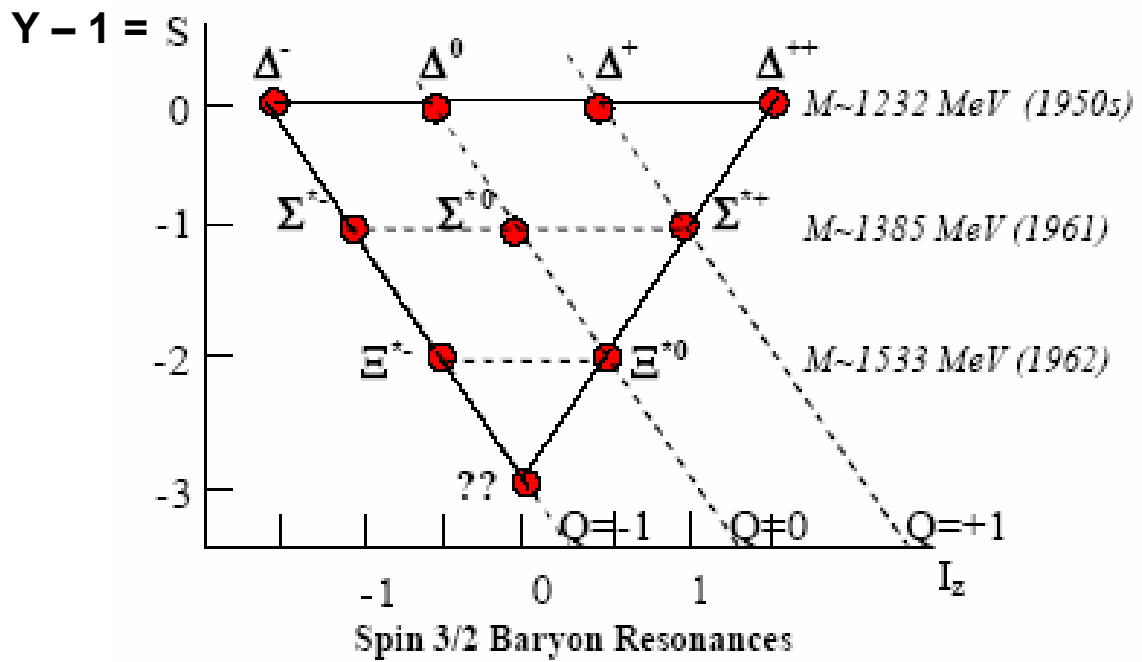
Eightfold Way (1961-1964)



- predisse un nuovo mesone di massa ~ 570 meV, trovato da Alvarez nel 1961: $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
- predisse che il barione Ξ aveva spin $\frac{1}{2}$: confermato nel 1963.



Eightfold Way (1961-1964)



Risonanze Barioniche (3/2)⁺

- ★ Notiamo di nuovo anche per queste risonanze una simmetria rispetto allo isospin I_3 ed alla ipercarica Y .

Viene predetto un nuovo multipletto di risonanze Ξ^* con $S = -2$ ed una nuova risonanza con $S = -3$ (???).

- ★ **Conferenza Internazionale del 1962 :**

Discovery of Ξ^* resonance with mass ~ 1530 MeV is announced at the conference

Gell-Mann and Ne'eman right at the same conference

predicted a new particle and wrote down all its properties:

Name = Ω^- (*Omega* would mean that the particle was the last in the decuplet)

Mass ≈ 1680 MeV (note that masses of Δ , Σ^* and Ξ^* are about equidistant, ~ 150 MeV)

Charge = -1

Spin = 3/2

Strangeness = -3

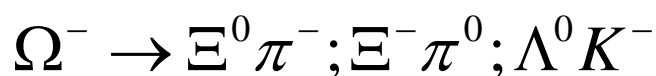
Lifetime $\sim 10^{-10}$ s (note that it does not have a corresponding spin-1/2 with $S=-3$ that it could decay to via a strong force as all other resonances in this decuplet would do)

Decay modes: $\Xi^0 \pi^-$ and $\Xi^- \pi^0$

Isospin = 0 (no charge-partners of similar mass)

- ★ Come ricordato, l'esistenza del barione Ω^- prevista da Gell-Mann nel 1962, fu scoperta due anni dopo a Brookhaven da Samios et al nella camera a bolle ad idrogeno di 80-inch. Vedi fig.1. Inoltre con $S=-3$ **Ω^- puo' decadere solo debole** poiche' l' unica possibile via di decadimento con $S=-3$, e' data da $\Omega^- \rightarrow \Lambda \bar{K}^0 K^-$ che, avendo massa dello stato finale $\cong 2100$ MeV piu' grande della massa della Ω^- (1700 MeV), non conserva l' energia e quindi NON e' possibile. Anche l' interazione elettromagnetica conserva la stranezza per cui NON ci puo' essere un decadimento di tipo elettromagnetico:

l' unica via di decadimento e' quella debole:

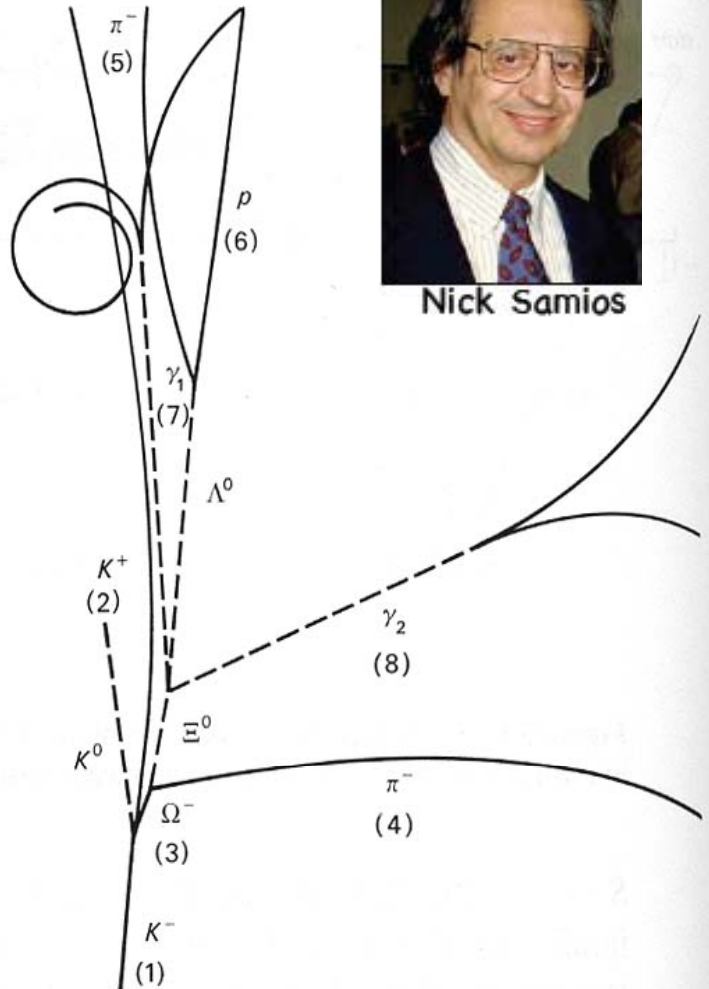
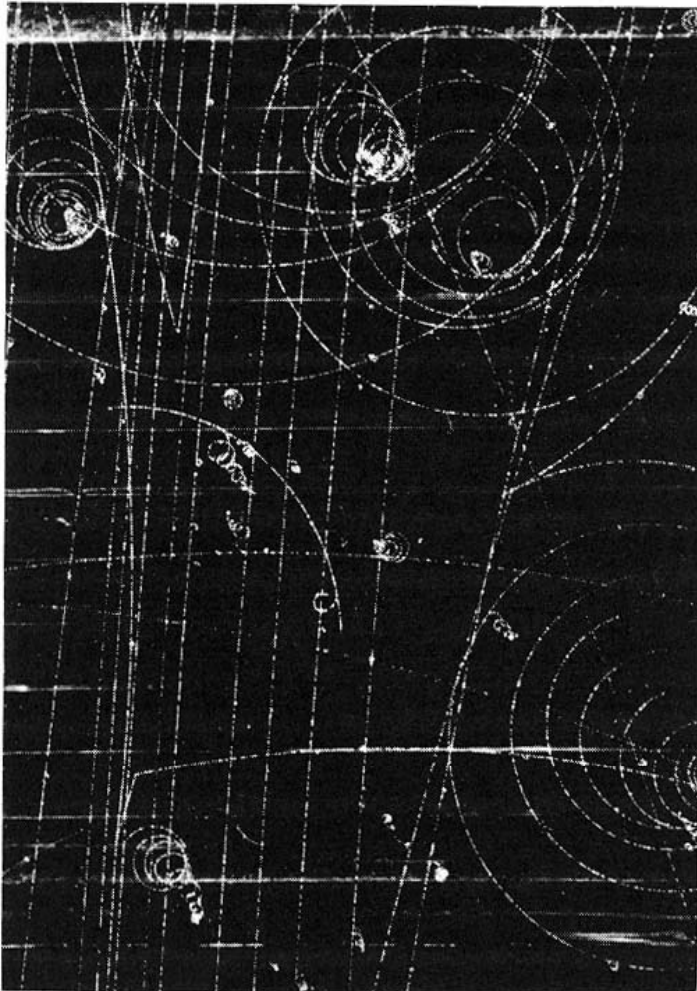


15-04-2009

$$\tau_{\Omega^-} \cong 0.82 \times 10^{-10} \text{ sec}$$

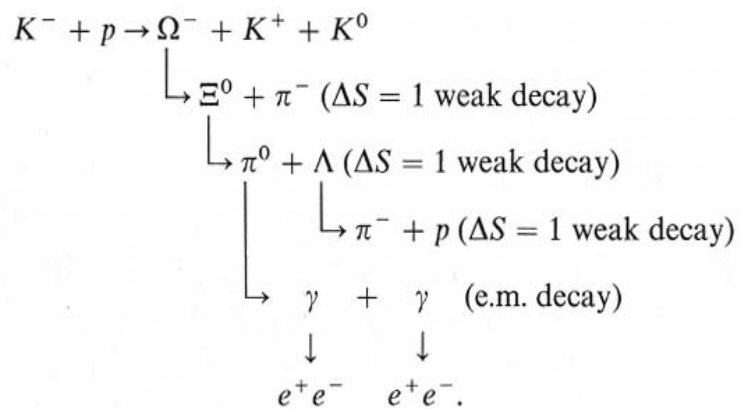
7

La scoperta dell' Ω^-



Nick Samios

Figure 5.2 The first Ω^- event (Barnes *et al.* (1964).) (Courtesy Brookhaven National Laboratory.) It depicts the following chain of events:



Modello “statico” a Quark

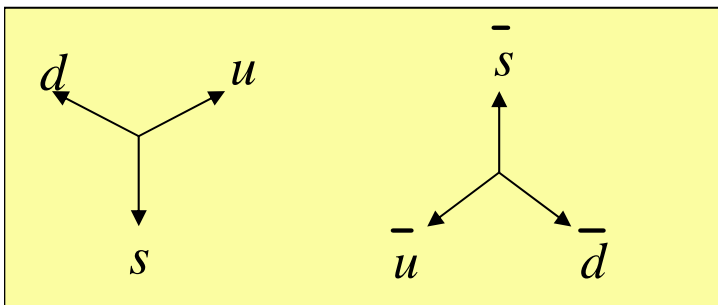
Una comprensione piu' profonda di SU(3) e del suo successo nel descrivere cosi' bene le proprieta' degli adroni emerse nel 1964 quando M. Gell-Mann e G. Zweig proposero indipendentemente l' ipotesi che tutti gli adroni sono composti di tre costituenti basici che Gell-Mann chiamo' **quark**. Il nome cosi' stravagante era tratto dalla ormai famosa citazione “ Three quarks for Muster Mark” contenuta nella novella di James Joyce “Finnegan's wake”.

In questo schema:

- **I barioni sono formati da tre quark u , d , e s quarks (*up, down, strange*)**
- **I mesoni da coppie quark-antiquark**
- **I quark hanno spin $\frac{1}{2}$ e carica frazionaria $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ con segno opportuno**

I tre quark u , d e s formano un tripletto che e' una rappresentazione fondamentale del gruppo. I quark sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$ quindi, secondo la teoria di Dirac, esistono gli stati coniugati di carica, gli antiquark.

I quark si possono presentare in una forma vettoriale ed allora le loro combinazioni sono le somme dei vettori:



- **Non era pero' chiaro se il tutto fosse:**
“ a mathematical convenience, or reality “

Simmetrie e Multipletti (1)

★ Abbiamo visto, come conseguenza della conservazione dello spin isotopico nelle interazioni forti, che gli stati adronici si raggruppano in multipletti con spin isotopico totale determinato. Inoltre all' interno di ogni multipletto i diversi stati sono contraddistinti dal valore di I_3 .

In assenza di effetti che rompono la simmetria, i membri di ogni multipletto sono degeneri in massa. Le interazioni Elettromagnetiche, NON rispettando la simmetria di isospin, rimuovono la degenerazione in massa dando differenze di massa al livello del per cento nei multipletti di isospin.

Gli operatori di isospin commutano con la Hamiltoniana H delle interazioni forti e, quindi, ANCHE con gli operatori che a loro volta commutano con l' Hamiltoniana forte. In particolare tra questi con gli operatori **Momento Angolare e Parita'**.

Come conseguenza: **TUTTI** i membri di un multipletto di isospin hanno **LO STESSO SPIN e LA STESSA PARITA'** !

L' hamiltoniana delle interazioni forti e' inoltre invariante rispetto alle rappresentazioni unitarie di $SU(2)$. I numeri quantici che individuano i componenti dei multipletti saranno tanti quanti sono i generatori che, commutando tra di loro, possono essere diagonalizzati simultaneamente. Tale numero e' il **"rango"** del gruppo. **Nel casi di $SU(2)$ il rango e' 1 e si diagonalizza I_3 .** Valendo inoltre:

$$[I_k; I_l] = i\epsilon_{klm} I_m$$

Ognuno dei generatori commuta con: $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$

★ Quindi I^2 , ovviamente hermitiano, puo' essere diagonalizzato contemporaneamente a I_3 e quindi i suoi autovalori, con quelli di I_3 , possono **"etichettare"** i vettori di stato e quindi, le particelle. Da questo deriva la possibilita' di raggruppare gli stati di una particella in multipletti con un dato valore di I . All' interno di ogni multipletto gli operatori saranno rappresentati da matrici $(2I + 1) \cdot (2I + 1)$. Nel linguaggio della teoria dei gruppi si dice che esse realizzano **" delle Rappresentazioni Irriducibili "** di dimensione $(2I + 1) \cdot (2I + 1)$ del gruppo di trasformazioni.

Simmetrie e Multipletti (2)

- ★ Possiamo generalizzare quanto detto per l' isospin: se realizziamo che l' hamiltoniano e' invariante rispetto a qualche tipo di trasformazione, allora:
- i) si cerca un gruppo di simmetria opportuno,
 - ii) si individuano le sue rappresentazioni irriducibili da cui ricavare i possibili multipletti,
 - iii) si verifica se questi descrivono effettivamente gli stati fisici esistenti.

Questo suggerì l' idea che i barioni ed i mesoni si raggruppassero in due ottetti composti di multipletti di spin isotopico.

Dovrebbe quindi esserci anche un gruppo di simmetria per l' hamiltoniana delle interazioni forti che contenga gli ottetti e decupletti mostrati nelle figure appena mostrate. In realta', essendo le differenze di masa tra i membri dei multipletti di circa il 20%, la simmetria e' "rotta" cioe' approssimata.

Poiche' i membri dell' ottetto sono caratterizzati da due Numeri quantici Additivi, il gruppo di simmetria va cercato tra quelli di rango = 2: cioe' tali che due dei generatori commutino tra di loro. Siamo interessati alle "rappresentazioni irriducibili": tali che da un membro qualsiasi di un multipletto si possono ottenere

- ★ tutti gli altri mediante le trasformazioni del gruppo.

La rappresentazione non banale, diversa quindi dal singoletto, di dimensione piu' bassa viene chiamata rappresentazione fondamentale.

Nella simmetria SU(3) i generatori sono otto e di questi DUE sono DIAGONALI: uno e' associato a I_3 l' altro a Y.

Le rappresentazioni FONDAMENTALI sono dei TRIPLETTI. Da esse si ricavano i multipletti:

$$3 \otimes 3^* = 1 + 8;$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 + 8 + 8 + 10 + 27$$

- ★ Nel seguito ci limiteremo a riportare i punti essenziali di SU(3) che permettano di capire le rappresentazioni degli adroni nei vari multipletti. Per una trattazione completa rimandiamo a Burcham and Jobes, capitolo 10 pagina 324.

SU(3)



Come abbiamo ricordato, la simmetria degli stati di isospin e' chiamata SU(2) e i generatori della simmetria sono le tre matrici di Pauli di cui una e' diagonale. Per riprodurre anche i numeri quantici delle particelle strane, oltre alla conservazione dell' isospin occorre introdurre la conservazione della stranezza.

Nella simmetria SU(3) i generatori sono otto e di questi DUE sono diagonali: uno e' associato alla terza componente dell' isospin e l' altro all' ipercarica. I generatori sono "Le Matrici di Gell-Mann":

$$T_i = \frac{1}{2} \lambda_i \quad \text{Dove:} \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

◆ Possiamo controllare che $U = 1 + i\epsilon \cdot \frac{\lambda}{2} = 1 + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^8 \epsilon_j \lambda_j$ e' una matrice unitaria con $\det U = 1$ (di ordine ϵ^2)

◆ DUE tra le λ_j sono **DIAGONALI**:
 \Rightarrow I multipletti di SU(3) sono caratterizzati da **DUE Numeri Quantici Additivi**.
 (confrontato al solo I_3 di SU(2))

◆ Notiamo anche che $\sum_{j=1}^8 \lambda_j^2 = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' diagonale.

SU(3)

- ◆ La scelta convenzionale dei numeri quantici additivi e' data da:

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$I_3 =$ isospin

$Y =$ hypercharge

- ◆ Gli autostati sono i vettori di base. La scelta della base e' :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota Bene: Se SU(3) e' una simmetria dell' interazione adronica:

- TUTTE le particelle a interazione adronica si rappresentano come combinazione di questi stati;
- TUTTE le grandezze conservate sono operatori diagonali in questa rappresentazione.

◆ Per i quark:

$$T_3 u = +\frac{1}{2} u \quad T_3 d = -\frac{1}{2} d \quad T_3 s = 0$$

$$Y u = +\frac{1}{3} u \quad Y d = +\frac{1}{3} d \quad Y s = -\frac{2}{3} s$$

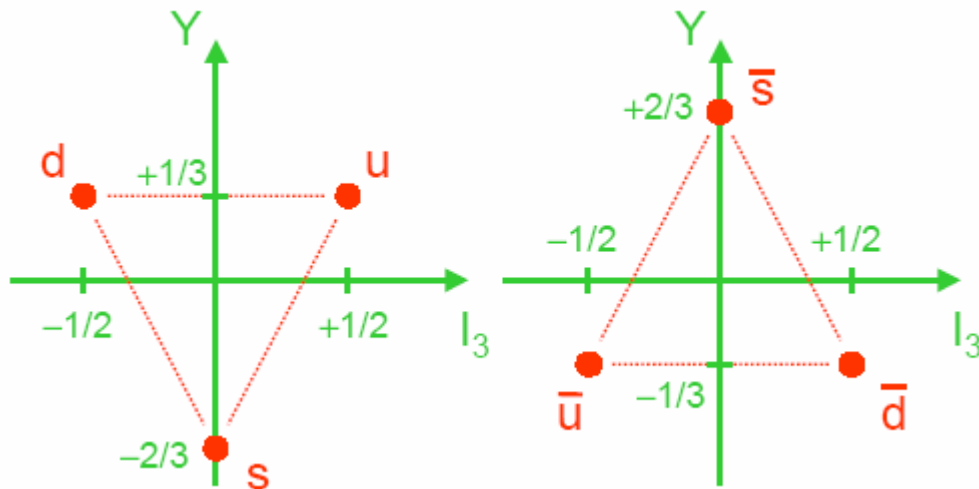
Per gli anti-quark abbiamo segni opposti:

$$T_3 \bar{u} = -\frac{1}{2} \bar{u} \quad T_3 \bar{d} = +\frac{1}{2} \bar{d} \quad T_3 \bar{s} = 0$$

$$Y \bar{u} = -\frac{1}{3} \bar{u} \quad Y \bar{d} = -\frac{1}{3} \bar{d} \quad Y \bar{s} = +\frac{2}{3} \bar{s}$$

Modello Statico a Quark

◆ Rappresentazione grafica degli stati di quark e anti-quark:

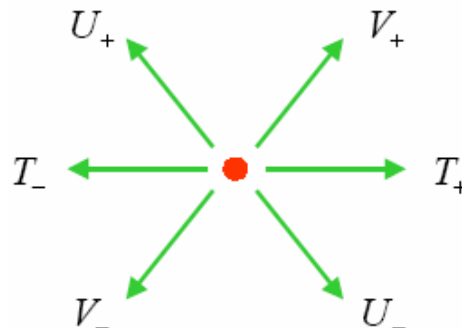


◆ Possiamo definire degli operatori “ladder” per muoverci da uno stato all’ altro:

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$$

$$U_{\pm} = T_6 \pm iT_7$$

$$V_{\pm} = T_4 \pm iT_5$$



◆ Per Esempio:

$$V_+ = T_4 + iT_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_+|u\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$V_+|d\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad V_+|s\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |u\rangle$$

⇒ Analogamente per gli anti-quark **MA** con cambiamento di segno:

$$V_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{s}\rangle \quad V_+|\bar{d}\rangle = 0 \quad V_+|\bar{s}\rangle = 0$$

Modello Statico a Quark

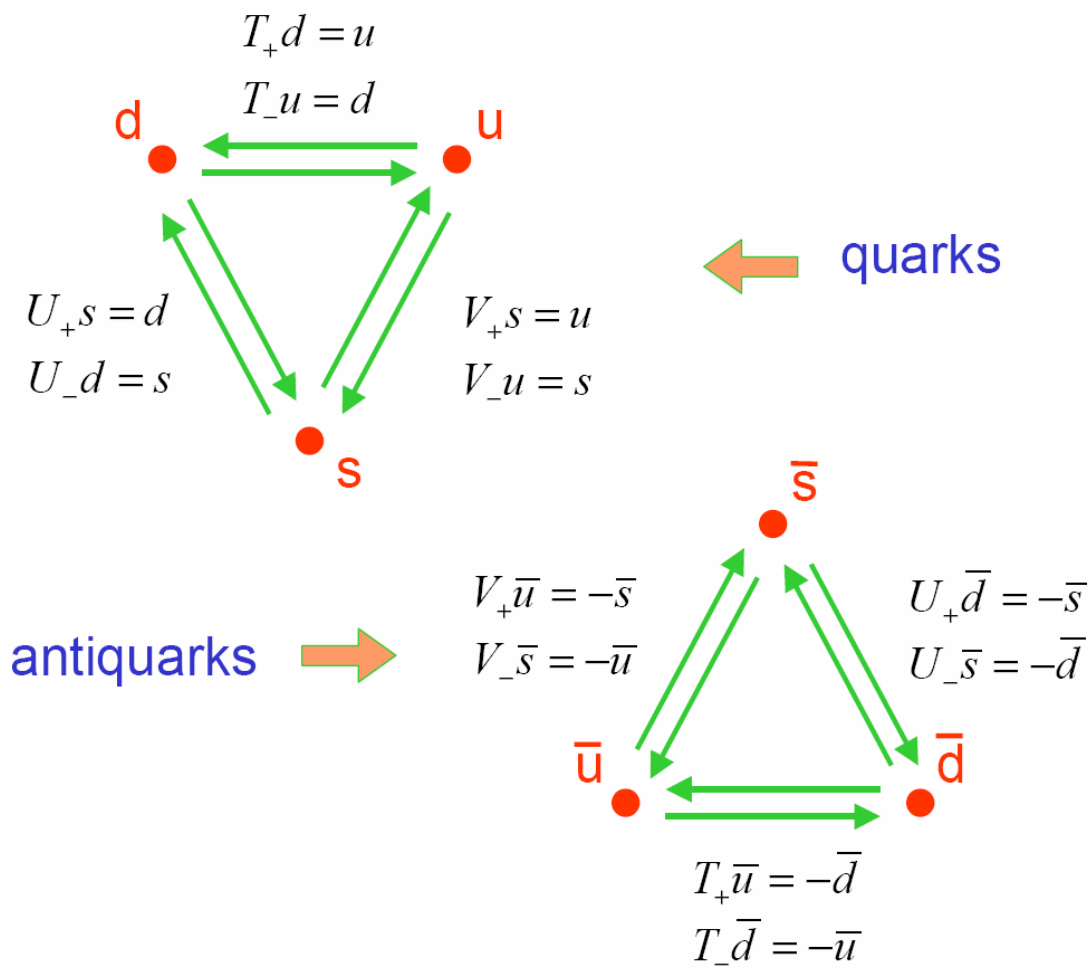


Tabella 14.1

I numeri quantici di quark e antiquark leggeri: B = numero barionico, J = spin, I = isospin, I_3 = terza componente dell'isospin, S = stranezza, Q/e = carica.

	B	J	I	I_3	S	Q/e
u	+1/3	1/2	1/2	+1/2	0	+2/3
d	+1/3	1/2	1/2	-1/2	0	-1/3
s	+1/3	1/2	0	0	-1	-1/3
\bar{u}	-1/3	1/2	1/2	-1/2	0	-2/3
\bar{d}	-1/3	1/2	1/2	+1/2	0	+1/3
\bar{s}	-1/3	1/2	0	0	+1	+1/3

Mesoni e Barioni nel modello a quark

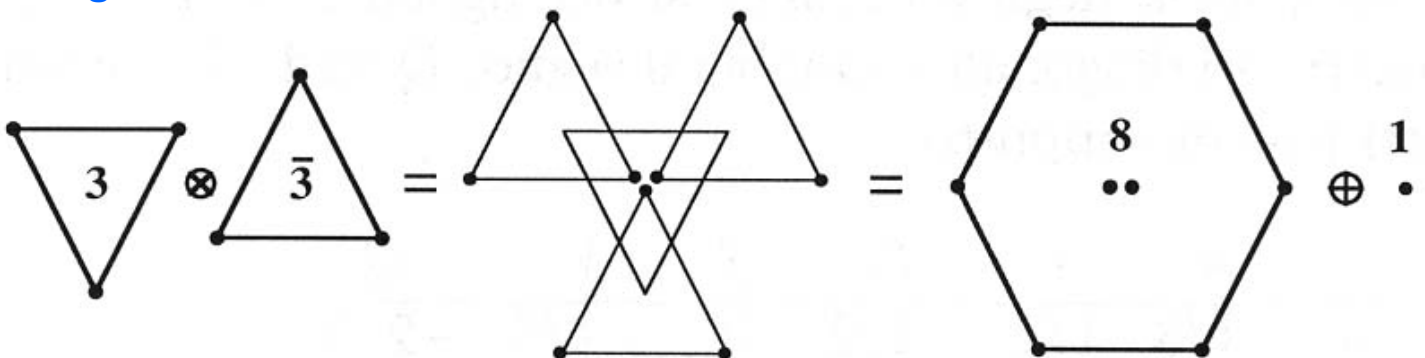
→ I mesoni sono costituiti da una coppia quark-antiquark ed accoppiati in onda s, p, d etc. Hanno spin intero e numero barionico nullo;

→ i barioni sono costituiti da tre quark $q_1q_2q_3$. Hanno spin semi-intero e numero barionico $B=+1$;

→ gli antibarioni sono costituiti da tre antiquark ed hanno numero barionico $B=-1$.

◆ Mesoni

Le combinazioni q-antiq sono 9 e formano un ottetto ed un singoletto la cui rappresentazione grafica e' data in figura.



I mesoni pseudoscalari ($J^P=0^-$) hanno q-qbar accoppiati in onda s e con spin opposti.

Costruzione Grafica dell' ottetto dei mesoni

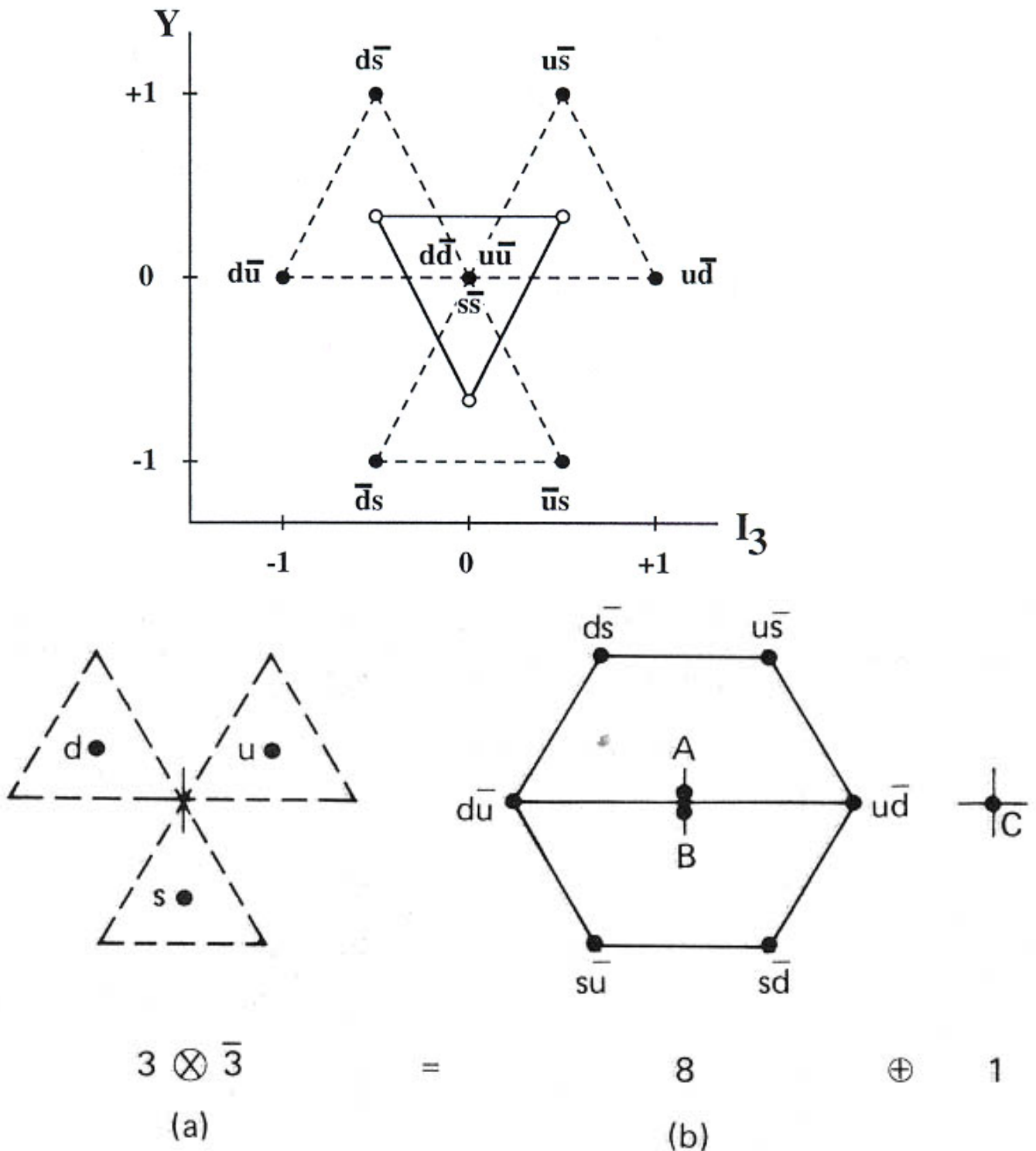
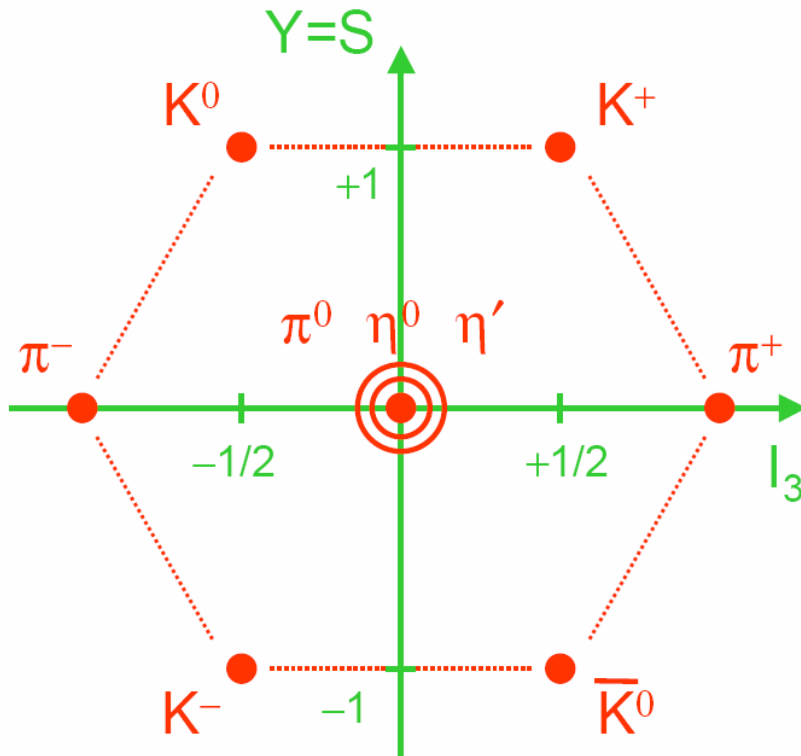


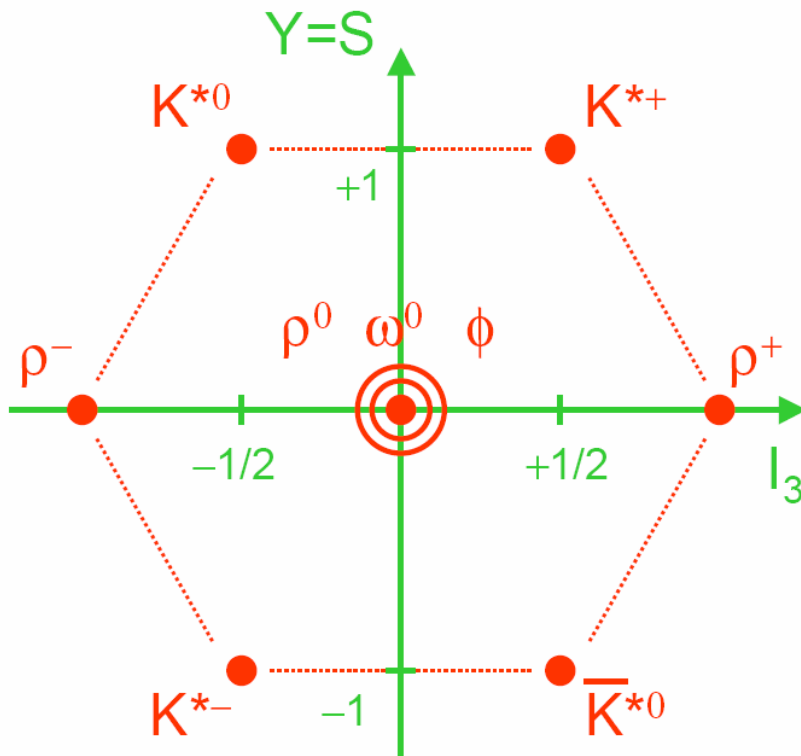
Fig. 2.5 The quark content of the meson nonet, showing the $SU(3)$ decomposition in the I_3, Y plane.

I Mesoni Leggeri



$J^{PC} = 0^{-+}$

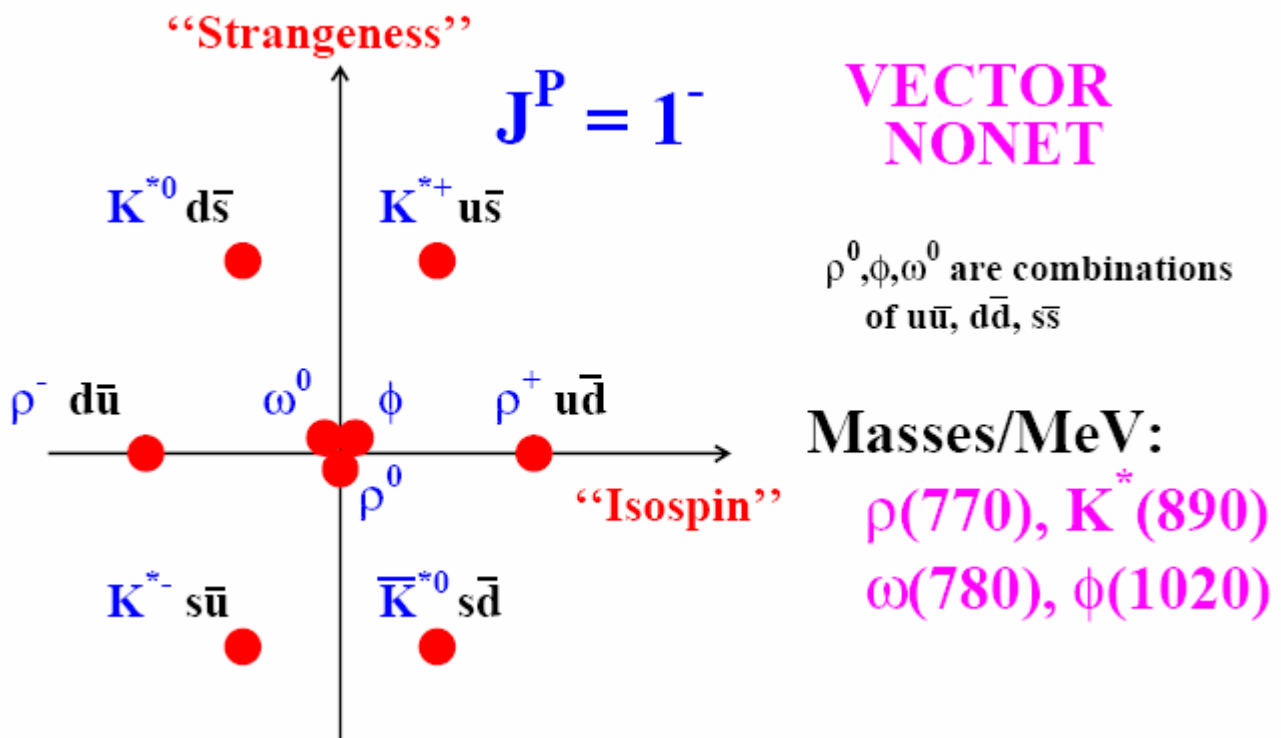
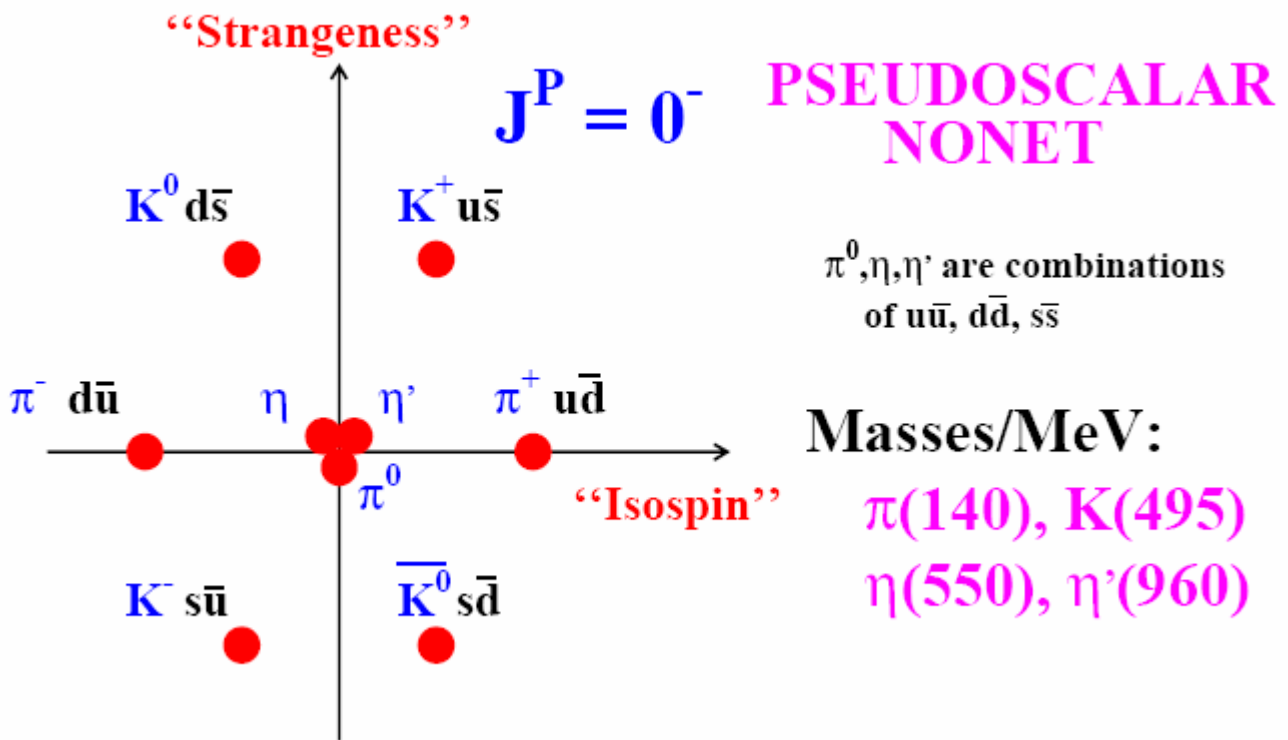
(pseudoscalar nonet)



$J^{PC} = 1^{-}$

(vector nonet)

Light Mesons



◆ I Barioni

I barioni sono combinazioni $q_1q_2q_3$. Combinando due quark si ottiene $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$. Combinando questi con il terzo quark ($6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$, $\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$) si ottiene un decupletto, due rappresentazioni equivalenti di ottetto e un singoletto

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

L'ottetto rappresenta i barioni di spin $1/2$. I tre quark hanno momento angolare orbitale $\ell = 0$ e la somma degli spin $J = 1/2$ ($\uparrow\uparrow\downarrow$). Ci sono due stati uds , con $Q = 0$, $I_3 = 0$, $Y = 0$: Σ^0 è uno stato di isospin $I = 1$ simmetrico ed è simmetrico anche per lo scambio $u \leftrightarrow d$, mentre il singoletto di isospin Λ^0 è antisimmetrico. Il decupletto rappresenta gli stati dei barioni con spin $3/2$. In questo caso i tre quark hanno spin paralleli ($\uparrow\uparrow\uparrow$). Il singoletto rappresenta un barione simile a Λ^0 con spin $3/2$.

Costruzione Grafica dell' ottetto e decuplettodei barioni. Fig 1

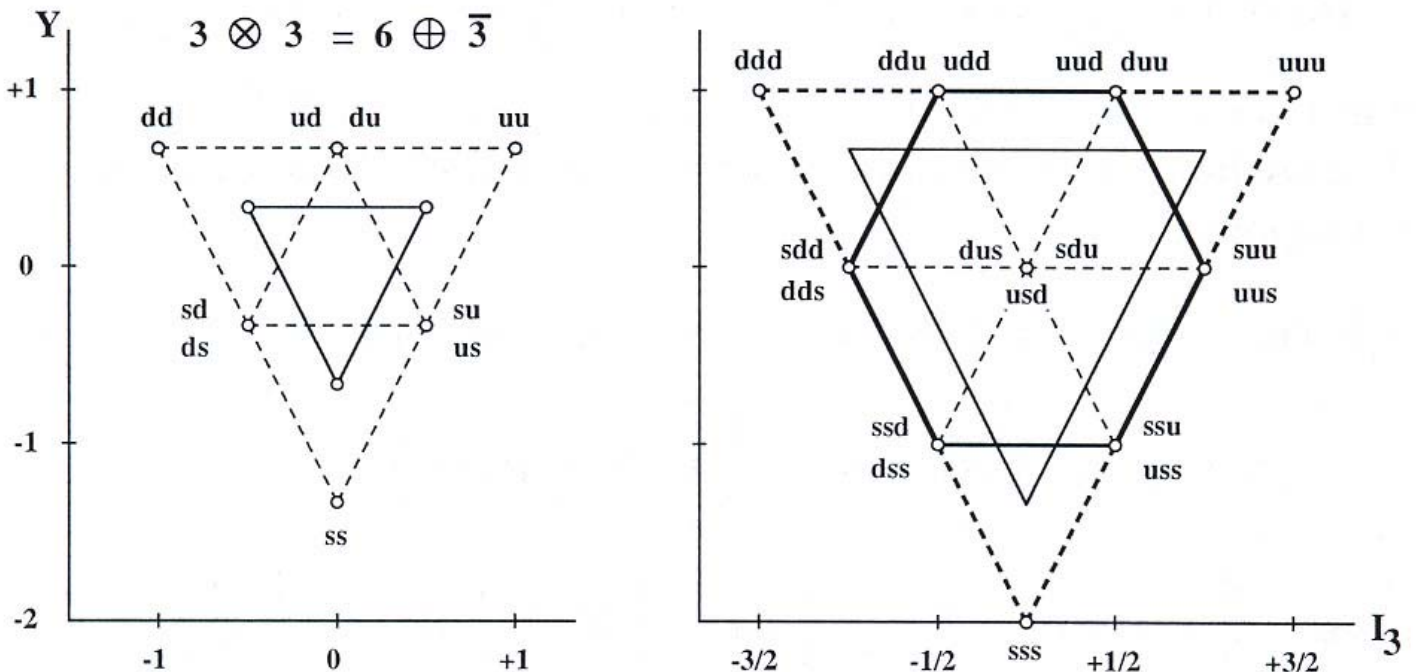
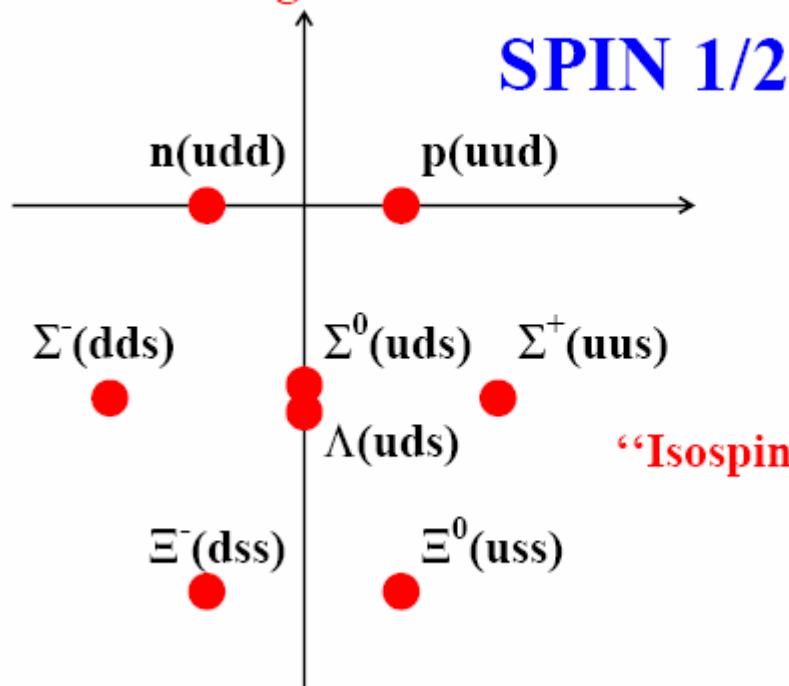


Fig 1

Ottetto e Decupletto dei Barioni

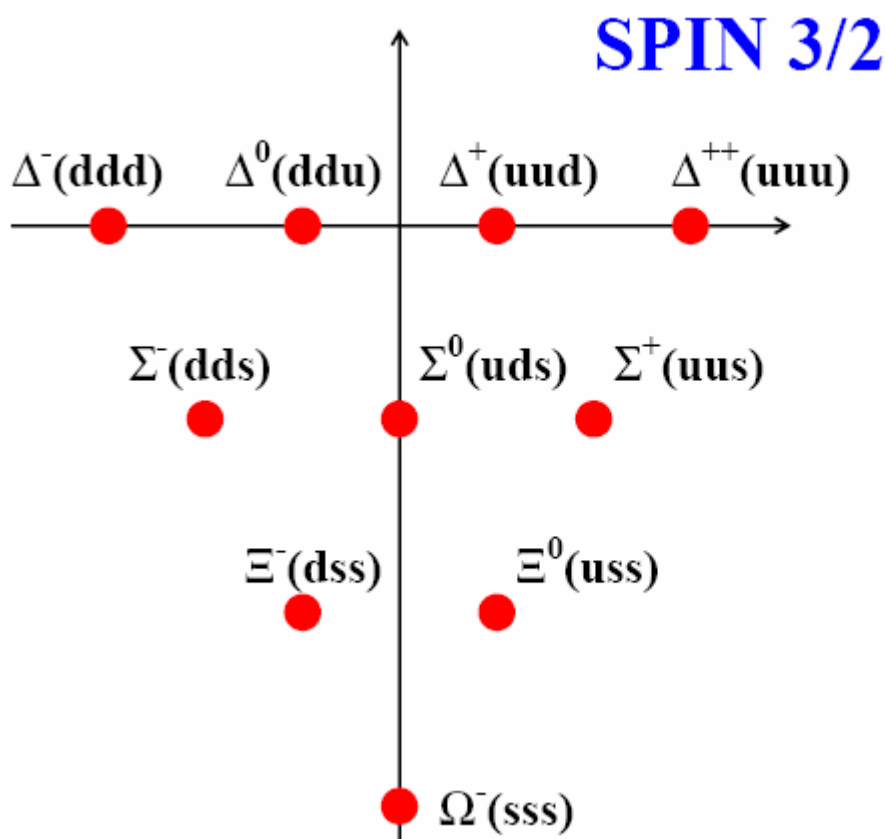
$S = Y - B$ "Strangeness"



940 MeV

1190 MeV
1115 MeV

1320 MeV



1230 MeV

1385 MeV

1530 MeV

1670 MeV

Un Nuovo Numero Quantico : il Colore (1)

◆ Consideriamo la risonanza Δ^{++} : $J = 3/2$ e $P = +1$ ed e' formata da tre quark di sapore u. Essendo il barione piu' leggero con spin $J = 3/2$, possiamo quindi assumere che il suo momento angolare orbitale e' $L = 0$, il che corrisponde ad una funzione d' onda spaziale simmetrica.

Per poter avere $J = 3/2$ I tre spin dei tre quark u devono essere paralleli:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$$

⇒ Ne consegue che anche la funzione d' onda di spin e' simmetrica come lo e' quella di sapore :

$$\psi_{\text{baryon}} = \psi_{\text{space}} \psi_{\text{flavour}} \psi_{\text{spin}}$$

La funzione d' onda totale della Δ^{++} , che e' formata da tre quark, quindi da tre fermioni, sarebbe cosi' totalmente simmetrica !

Tuttavia i quark sono **FERMIONI**, quindi , se NON si vuole violare il Principio di Pauli, la funzione DEVE essere **ANTISIMMETRICA** per lo scambio di qualsiasi coppia di quark !

⇒ **Soluzione:** nel 1964 Greenberg, piu' tardi anche Han e Nambu, suggerirono l' idea di assegnare un nuovo numero quantico ai quark identici tra loro per tutti gli altri numeri quantici.

Un Nuovo Numero Quantico : il Colore (2)

- ◆ Si introdusse quindi un nuovo grado di liberta' chiamato **COLORE**.

Viene postulato:

- i) che I quark esistono in tre colori, red green e blue;
 - ii) gli anti-quark sono dotati di **ANTI-COLORE**;
 - iii) che I mesoni e I barioni, che sono costruiti di quark, **NON** hanno colore: sono colour singlet.
- In questo modo I tre quark possono essere distinti e la funzione d' onda totale diventa:

$$\psi_{\text{baryon}} = \psi_{\text{space}} \psi_{\text{flavour}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{colour}}$$

- ◆ Come abbiamo detto TUTTI gli adroni sono : **COLOUR SINGLET**

$$\psi_{\text{colour}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (rgb + gbr + brg - grb - rbg - bgr)$$

i.e. ψ_{colour} **is anti-symmetric**

E la funzione d' onda totale del Δ^{++} e' quindi **ANTISIMMETRICA** come deve essere !

- ◆ Vedremo nel seguito diverse evidenze sperimentali della esistenza del colore !

Pro Memoria su Parita' e Coniugazione di Carica

◆ Parita'

⇒ Le particelle a riposo sono autostati di parita' e l' autovalore (± 1) e' chiamato : "parita' intrinseca" della particella (anti-particella).

⇒ Dalla equazione di Dirac abbiamo che: particelle di spin $\frac{1}{2}$ hanno parita' intrinseca opposta delle loro antiparticelle.

⇒ Per Convenzione: a quark e leptoni viene assegnata parita' +1

$$P_{e^-} = P_{\mu^-} = P_{\tau^-} = P_u = P_d = \dots = +1$$

— le loro antiparticelle devono avere parita' -1

$$P_{e^+} = P_{\mu^+} = P_{\tau^+} = P_{\bar{u}} = P_{\bar{d}} = \dots = -1$$

⇒ Dalla Teoria dei Campi si dimostra che:

— particelle e antiparticelle di spin 0 hanno la stessa parita' intrinseca

⇒ Dalle Teorie di gauge : I bosoni di gauge hanno parita' -1 :

$$P_\gamma = P_\xi = P_W = P_Z = -1$$

(— Dalle equazioni di Maxwell : $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ quando $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$)

⇒ Per sistemi a multi-particelle la parità e' un numero quantico moltiplicativo:

$$\hat{P}\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t) = P_1 P_2 \dots P_n \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)$$

⇒ Particelle in uno stato di momento angolare orbitale definito sono anche esse autostati di parità :

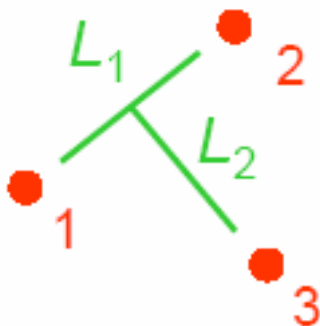
$$Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

— La parità totale di un sistema a due particelle e' :



$$P = P_1 P_2 (-1)^L$$

— La parità totale di un sistema a tre particelle e' :



$$P = P_1 P_2 P_3 (-1)^{L_1} (-1)^{L_2}$$



◆ Coniugazione di Carica

⇒ Come sappiamo l'operatore Coniugazione di Carica sostituisce tutte le particelle nelle loro anti-particelle nello stesso stato:

$$\hat{C}|a, \psi\rangle = C|\bar{a}, \psi\rangle$$

— i.e. Tutti i numeri quantici interni cambiano segno, lasciando posizione, impulsi, spin,... Invariati :

$$\begin{array}{cccc} q \rightarrow -q & B \rightarrow -B & L \rightarrow -L & \dots \\ \text{electric charge} & \text{baryon no.} & \text{lepton no.} & \end{array}$$

⇒ Come per l'operatore parità :

- C e' un osservabile hermitiano;
- Gli autovalori possibili sono ± 1 ;
- C e' un numero quantico moltiplicativo.

⇒ Tuttavia : la gran parte delle particelle, a riposo o no, **NON** sono autostati di C. Per esempio :

$$\hat{C}|\pi^+\rangle \rightarrow |\pi^-\rangle$$

E come sappiamo π^+ e π^- sono particelle distinte con valori opposti di carica elettrica.

⇒ Solo particelle che sono anche anti-particelle di se stesse sono autostati di C

■ Per esempio lo sono i bosoni di gauge neutri :

$$\begin{array}{ccc} \gamma, g, Z^0 & & \\ \underline{C = -1} & \begin{array}{c} + \\ \downarrow E \\ - \end{array} \xrightarrow{\hat{C}} \begin{array}{c} - \\ \uparrow -E \\ + \end{array} & \end{array}$$

■ Ed i mesoni neutri al centro dei nonetti:

$$\begin{array}{cc} \pi^0, \eta^0, \eta' & \rho^0, \omega^0, \phi^0 \\ \underline{C = +1} & \underline{C = -1} \end{array}$$

⇒ Abbiamo imparato che le interazioni deboli NON conservano C mentre le interazioni elettromagnetiche e forti conservano C :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$+1 = -1 \cdot -1$$

PERMESSA

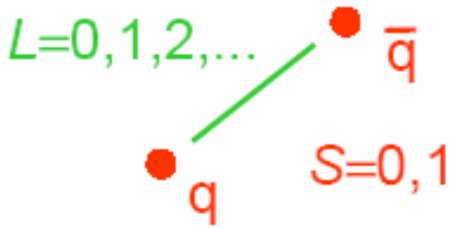
$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$$

$$+1 \neq -1 \cdot -1 \cdot -1$$

PROIBITA

$$B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma) < 3.1 \times 10^{-8}$$

Mesoni



q, \bar{q} hanno parita' intrinseca opposta.

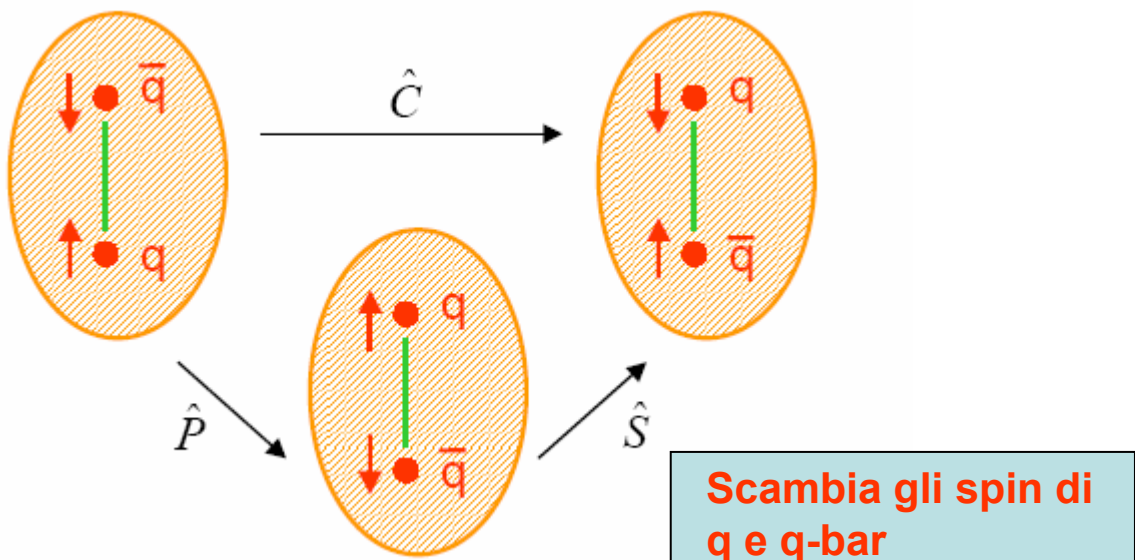
◆ **Parita' :** $P = P_1 P_2 (-1)^L = -1 \cdot (-1)^L$



$$P = (-1)^{L+1}$$

◆ **Coniugazione di Carica :**

\Rightarrow Per Mesoni C e' equivalente alla successione dell' operatore parita' P seguito dall' operatore scambio di spin S :



◆ La parità, come visto, da' il fattore : $(-1)^{L+1}$

Lo scambio di spin S da' il fattore : $(-1)^{S+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad \underbrace{\downarrow\downarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \quad \uparrow\uparrow}_{S=1}$$

$S=0$ $S=1$

ANTISIMMETRICA

SIMMETRICA

⇒

$$C = (-1)^{L+1} \cdot (-1)^{S+1} = (-1)^{L+S}$$

◆ Percio' otteniamo I seguenti set di nonetti di mesoni:

L=0	S=0	⇒	J=0	P=-1	C=+1
	S=1	⇒	J=1	P=-1	C=-1
L=1	S=0	⇒	J=1	P=+1	C=-1
	S=1	⇒	J=0,1,2	P=+1	C=+1

etc.

↑
 $J=L+S$

⇒ $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{-+}, 1^{+-}, 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}, \dots$

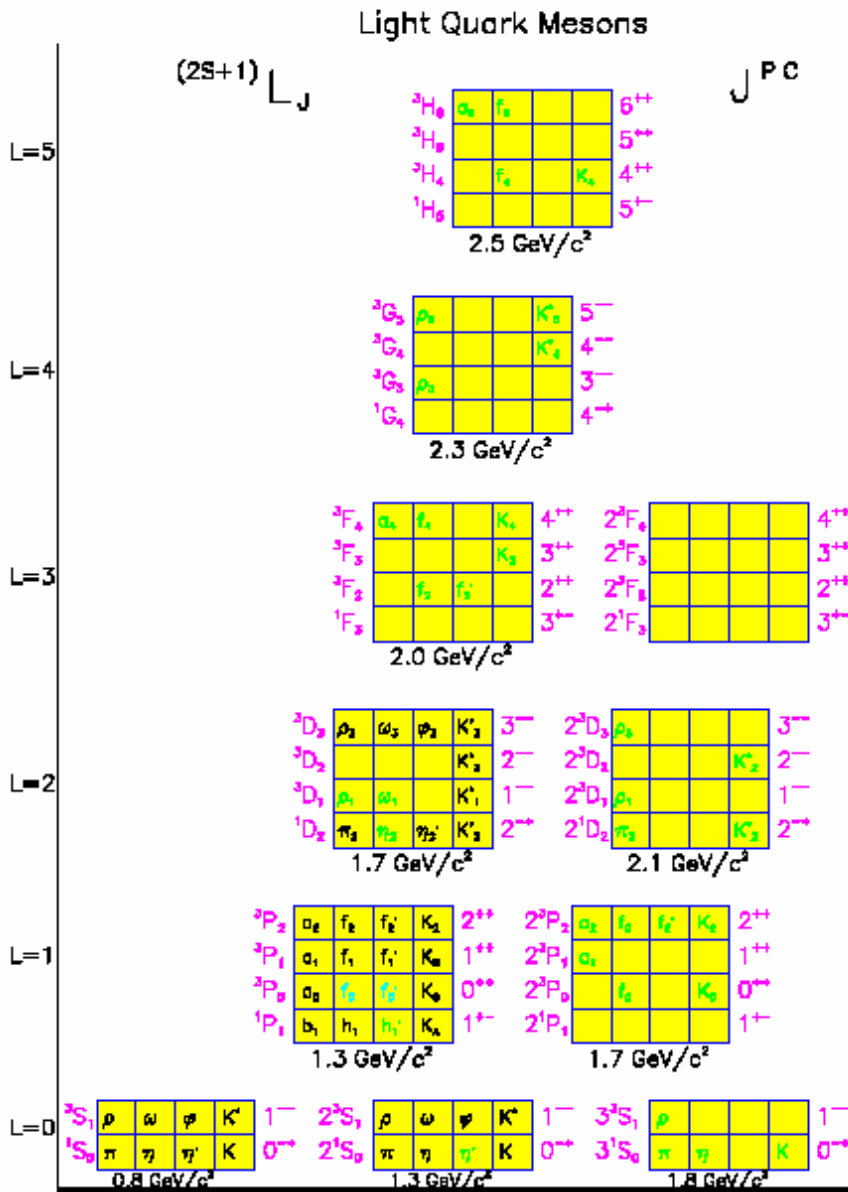


Figure 1: The expected meson spectrum showing the $^{2S+1}L_J$ representation, the J^{PC} of the nonet, and the names of the states. Along the vertical axis are plotted nonets for increasing values of L , while along the horizontal are plotted radial excitations. The average masses are indicated under the boxes. Dark names indicate well established states, while the lighter names are tentative assignments. All other states have not yet been observed.

Riassunto Predizioni Modello a quark



	$m_{u/d}$	m_s
Meson Masses	310 MeV	483 MeV
Baryon Masses	363 MeV	538 MeV
Baryon mag. moms.	336 MeV	510 MeV



Le predizioni danno valori ragionevolmente consistenti per **Le Masse dei “quark costituenti”**

$$m_u \approx 335 \text{ MeV}$$

$$m_d \approx 335 \text{ MeV}$$

$$m_s \approx 510 \text{ MeV}$$

Riassunto (1)

◆ L' Isospin e la simmetria SU(3) e' usata per :

- Classificare I quark e gli stati adronici;
- Calcolare le funzioni d' onda adroniche;
- Dedurre relazioni tra rate di decadimenti adronici o di sezioni d' urto.

◆ Pro Memoria :

$$J = L \oplus S$$

$$P = (-1)^{L+1}$$

$$C = (-1)^{L+S}$$

$$G = (-1)^{L+S+I}$$

$$S = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2) \quad S = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \uparrow_1\uparrow_1 \\ (\uparrow_1\downarrow_2 + \downarrow_1\uparrow_2) \\ \downarrow_1\downarrow_2 \end{array}$$



Riassunto (2): proprieta' dei mesoni osservati

$q\bar{q}$ Orbital Ang. Mom.	$q\bar{q}$ Spin	J^{PC}	Observed Nonet			Typical Mass (MeV)
			$I = 1$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	
$L = 0$	$S = 0$	0^{-+}	π	K	η, η'	500
	$S = 1$	1^{--}	ρ	K^*	ω, ϕ	800
$L = 1$	$S = 0$	1^{+-}	B	Q_2	$H, ?$	1250
	$S = 1$	2^{++}	A_2	K^*	f, f'	1400
		1^{++}	A_1	Q_1	$D, ?$	1300
0^{++}		δ	κ	ϵ, S^*	1150	

<i>State</i>	<i>S</i>	<i>L</i>	<i>J</i>	<i>P</i>	<i>C</i>	J^{PC}	<i>Mesons</i>				<i>Name</i>
1S_0	0	0	0	-	+	0^{-+}	π	η	η'	K	pseudoscalar
3S_1	1	0	0	-	-	1^{--}	ρ	ω	ϕ	K^*	vector
1P_1	0	1	1	+	-	1^{+-}	b_1	h_1	h'_1	K_1	pseudo-vector
3P_0	1	1	0	+	+	0^{++}	a_0	f_0	f'_0	K_0^*	scalar
3P_1	1	1	1	+	+	1^{++}	a_1	f_1	f'_1	K_1	axial vector
3P_2	1	1	2	+	+	2^{++}	a_2	f_2	f'_2	K_2^*	tensor

SU(2) and SU(3)

SU(2)

ordinary spin

isospin

weak isospin

SU(3)

(u,d,s) flavour

(r,g,b) colour

L' Isospin Forte e l' Isospin Debole NON hanno nessuna connessione o significato fisico in comune !



Solo la stessa matematica !!



Idem per SU(3) di sapore rispetto a SU(3) di colore !!!



L' Isospin debole e' una simmetria di gauge SU(2) delle interazioni deboli (rotta dal meccanismo di Higgs).



SU(3) di colore e' una simmetria di gauge ESATTA delle interazioni forti (QCD).

Light Mesons

Mesons are bound $q\bar{q}$ states. Here we consider only mesons consisting of LIGHT quarks (u, d, s).

$$m_u \sim 0.3 \text{ GeV}, \quad m_d \sim 0.3 \text{ GeV}, \\ m_s \sim 0.5 \text{ GeV}$$

Ground state ($L = 0$)

For ground states, where orbital angular momentum is zero, the meson “spin” (total angular momentum) is determined by the $q\bar{q}$ spin state.

Two possible $q\bar{q}$ total spin states $S = (0, 1)$

★ $S = 0$: pseudo-scalar mesons

★ $S = 1$: vector mesons

Meson Parity : (q and \bar{q} have OPPOSITE parity):

$$P = P(q)P(\bar{q})(-1)^L \\ = (+1)(-1)(-1)^L = -1 \quad (\text{for } L = 0)$$

Flavour States:

$u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{u}, s\bar{d}$

($u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$) MIXTURES

Expect :

9 $J^P = 0^-$ MESONS : PSEUDO-SCALAR NONET

9 $J^P = 1^-$ MESONS : VECTOR NONET

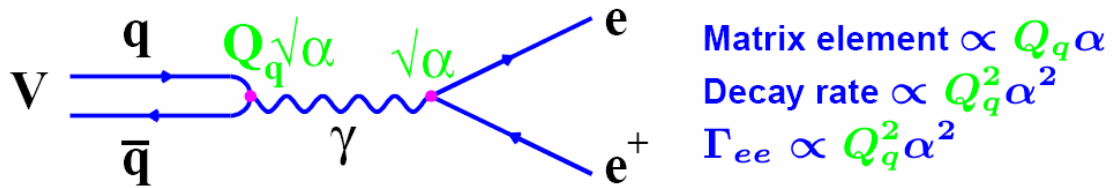
Meson Wave-functions

- ★ $u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{u}, s\bar{d}$ are straightforward
- ★ However, $(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$ states all have zero flavour quantum numbers - therefore can MIX

$$\left. \begin{aligned} \pi^0(140) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \eta(550) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \eta'(960) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{aligned} \right\} J^P = 0^-$$

$$\left. \begin{aligned} \rho^0(770) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \omega^0(780) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \phi(1020) &= s\bar{s} \end{aligned} \right\} J^P = 1^-$$

Mixing coefficients determined experimentally from masses, decays. e.g. leptonic decays of vector mesons



$$M_{fi}(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) \sim e \frac{1}{q^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Q_u e - Q_d e) \right]$$

$$\Gamma_{\rho^0 \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_{\omega^0 \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{18}$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{3} \right]^2 = \frac{1}{9}$$

PREDICT: $\Gamma_{\rho^0} : \Gamma_{\omega^0} : \Gamma_{\phi} = 9 : 1 : 2$

EXPERIMENT: $8.8 \pm 2.6 : 1 : 1.7 \pm 0.4$

Meson masses partly from constituent quark masses

★ $m(K) > m(\pi)$

hints at $m_s > m_u, m_d$

But that is not the whole story

★ $m(\rho^+) > m(\pi^+)$ (770 MeV c.f. 140 MeV)

but both are $u\bar{d}$

★ Only difference is in orientation of **Quark SPINS**

$\uparrow\uparrow$ vs. $\downarrow\uparrow$

SPIN-SPIN INTERACTION

QED: Hyperfine splitting in H_2 ($L=0$)

Energy shift due to electron spin in magnetic field of p

$$\Delta E = \tilde{\mu} \cdot \tilde{B} = \frac{2}{3} \tilde{\mu}_e \cdot \tilde{\mu}_p |\psi(0)|^2$$

using $\tilde{\mu} = \frac{e}{2m} \tilde{S}$

$$\Delta E \propto \alpha_{em} \frac{\tilde{S}_e \cdot \tilde{S}_p}{m_1 m_2}$$

QCD: Colour Magnetic Interaction

Fundamental form of the interaction between a quark and a gluon is identical to that between an electron and a photon

Consequently, also have a **COLOUR MAGNETIC INTERACTION**

$$\Delta E \propto \alpha_S \frac{\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2}{m_1 m_2}$$

Bibliografia Cap. 1



Nuclear and Particle Physics; Burcham and Jobes
Paragrafi : dal 10.1 al 10.4 compreso