

# **Capitolo 11: Fisica Nucleare:**

**Corso di Fisica Nucleare e  
Subnucleare I**

**Professor Carlo Dionisi**

A.A. 2004-2005

# Proprieta' dei nuclei

- 1) I fattori di forma;
- 2) l'energia di legame;
- 3) la formula empirica di massa;
- 4) la stabilita' dei nuclei;
- 5) la struttura dei nuclei;
- 6) Momenti magnetici anomali.

# Fattori di Forma Nucleari

Definiamo una FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI CARICA  $f(\vec{x})$ :

$$\rho(\vec{x}) = Ze f(\vec{x}) \quad \text{con} \quad \int f(\vec{x}) d^3x = 1$$

La Trasformata di Fourier della distribuzione di carica  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ ,

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x$$

viene chiamato FATTORE DI FORMA

Nel caso di una carica puntiforme, diffusione di Rutherford, avremo

$$f(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \longrightarrow F = 1 = \text{COSTANTE}$$

● Ruolo dei Fattori di Forma: misure Fattori di Forma  $\longleftrightarrow$  Predizioni Teoria

- ◆ I fattori di forma dei sistemi a simmetria sferica dipendono solo dal modulo di  $q$ . Il valore assoluto di  $F(q^2)$  e' dato da:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{esp.}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \times |F(\vec{q}^2)|^2$$

# Fattori di Forma Nucleari

Le prime misure dei fattori di forma vennero fatte negli anni 50 presso l'acceleratore lineare ad elettroni di circa 500 MeV della Università di Stanford in California su una grande varietà di nuclei. Nelle approssimazioni di Born, B. Povh et al pag 62, e trascurando gli effetti del rinculo del nucleo e trattando il caso a simmetria sferica ( $|x|=r$ ) abbiamo

$$F(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3\vec{x}$$

Integrando sull'intero angolo solido avremo

$$F(q^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3\vec{x} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) e^{iqr\cos\theta/\hbar}$$

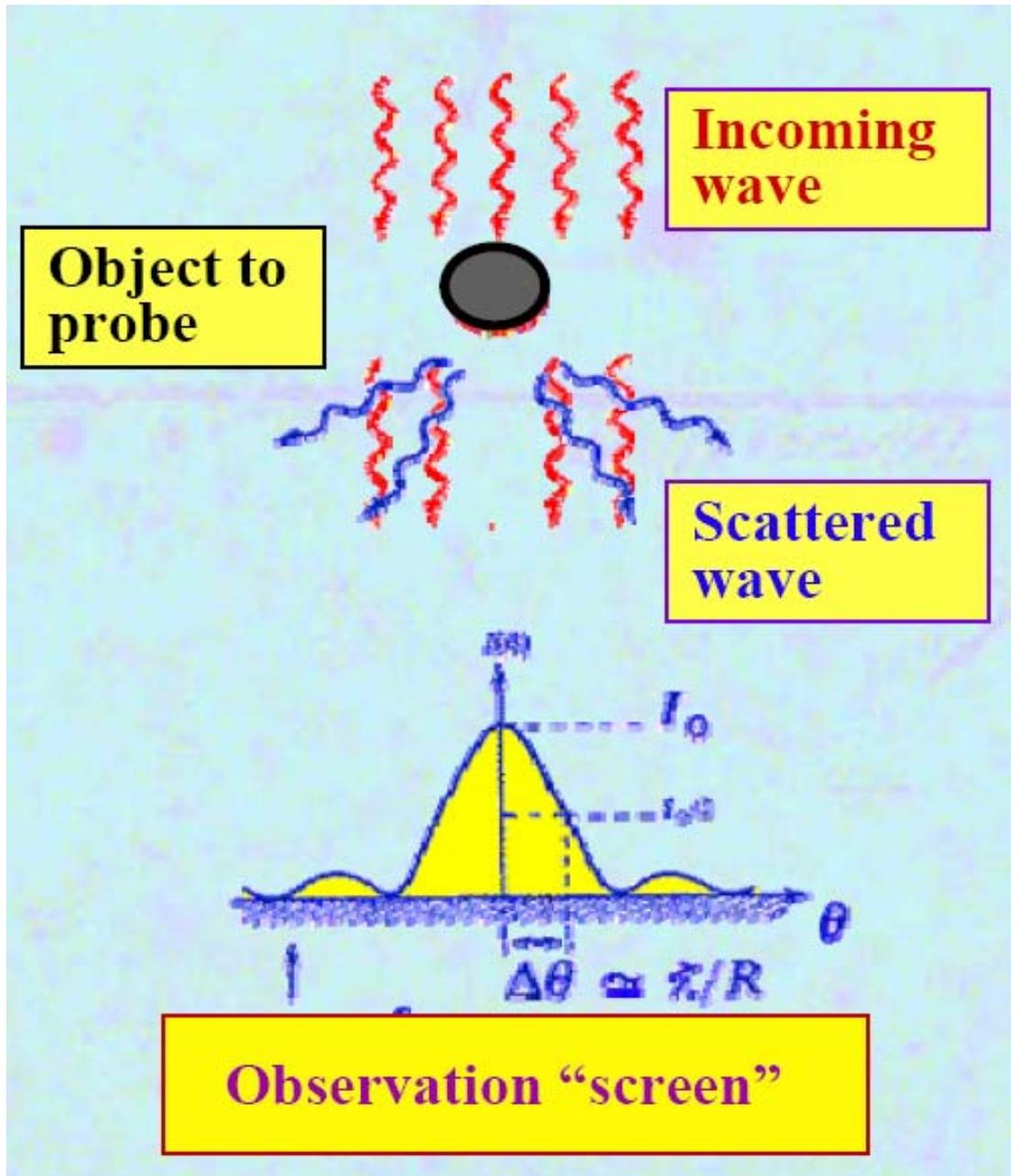
$$= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr \frac{\hbar^2}{2iqr} (e^{iqr} - e^{-iqr})$$

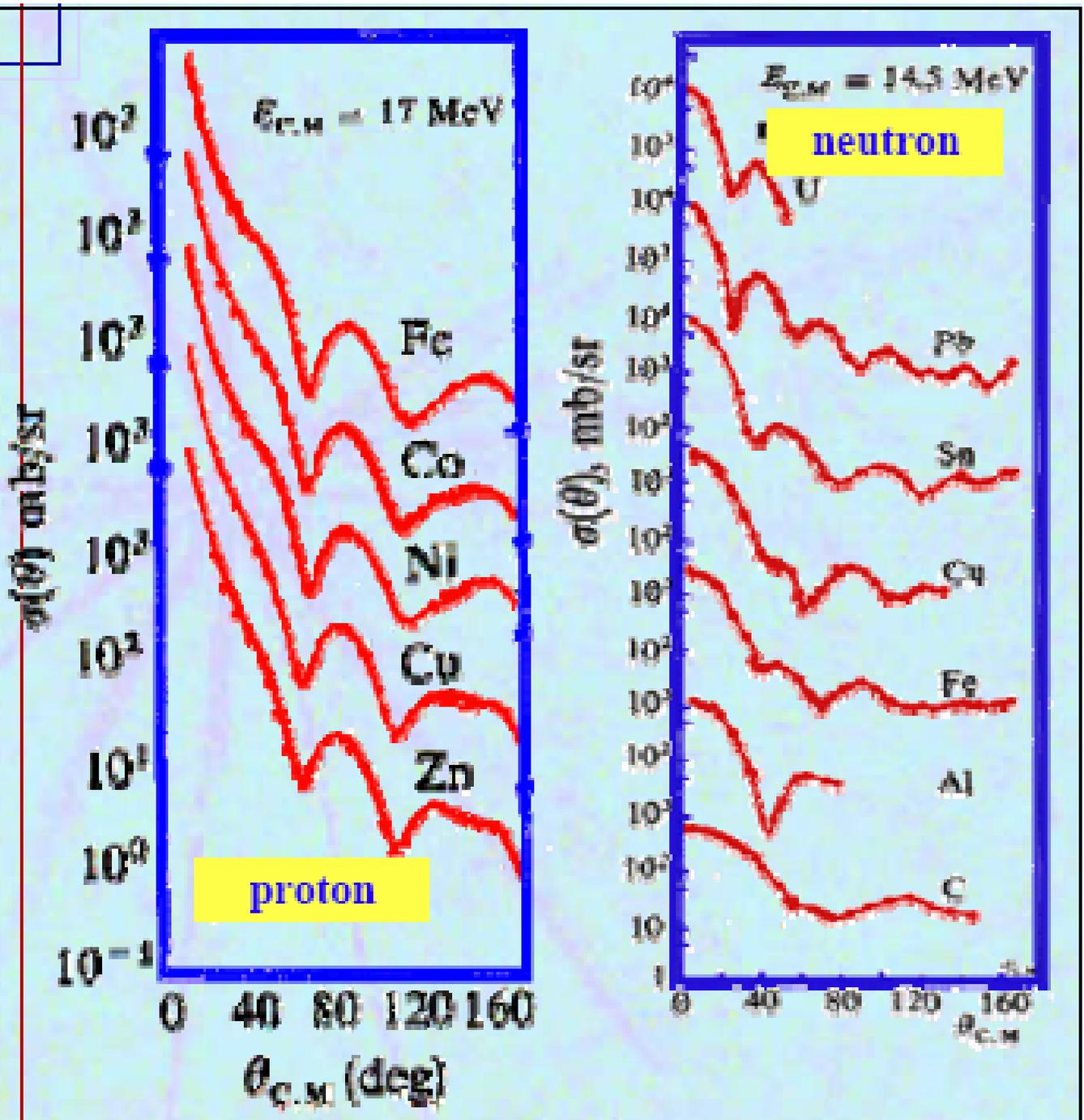
$$= 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} dr$$

La figura 1 è mostrata la  $\sigma$  per il  $^{12}\text{C}$  in funzione dell'angolo di diffrazione  $\vartheta$ : all'aumentare come  $1/|q|^4$  si osserva una tipica figura di diffrazione associata al Fattore di Forma.  $e'$  è un minimo per  $\vartheta \approx 51^\circ \rightarrow |q|/\hbar \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$ .

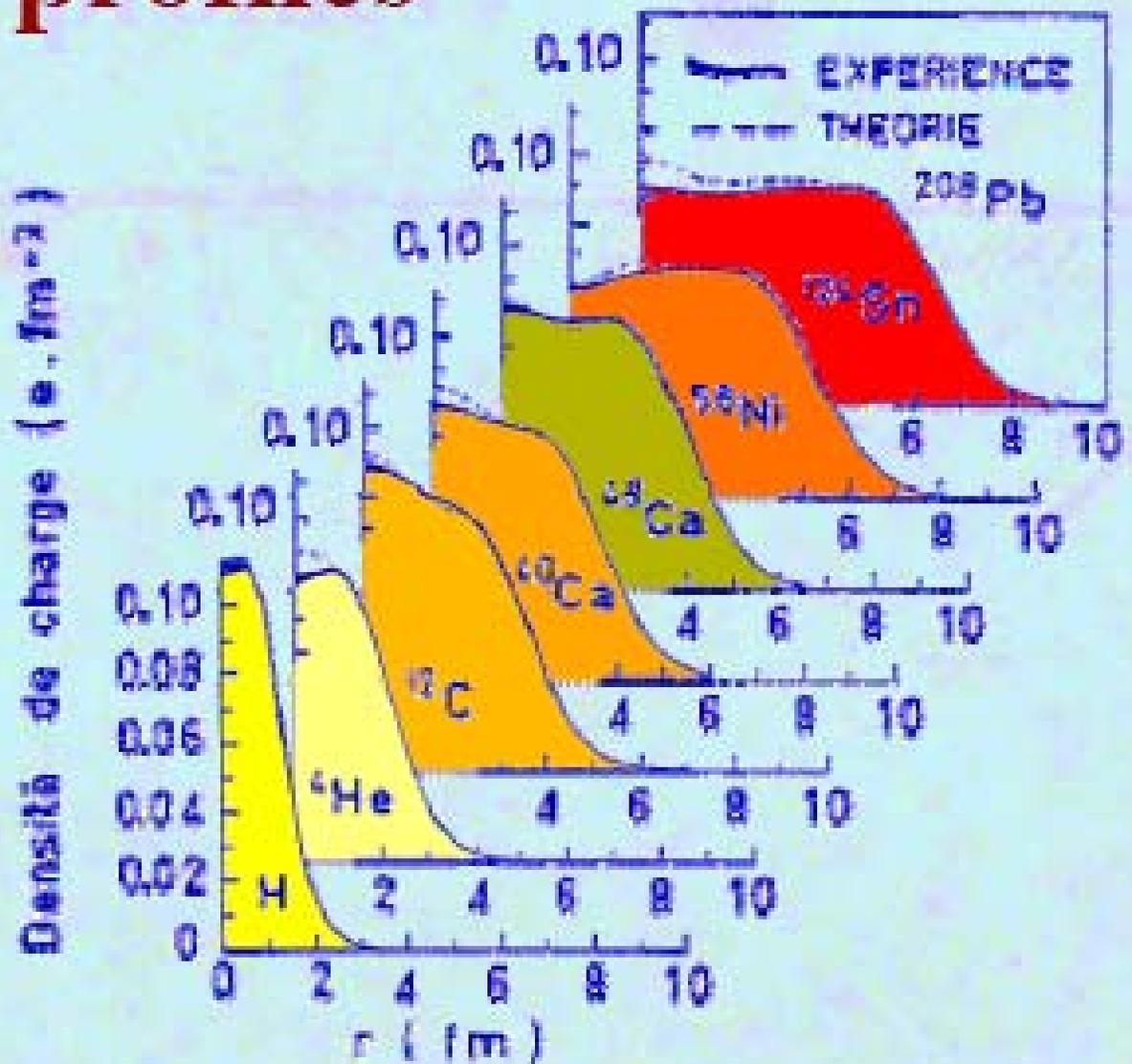
# Modern measures

## Scattering of particles





# Nuclei density profiles



# Fattori di Forma Nucleari

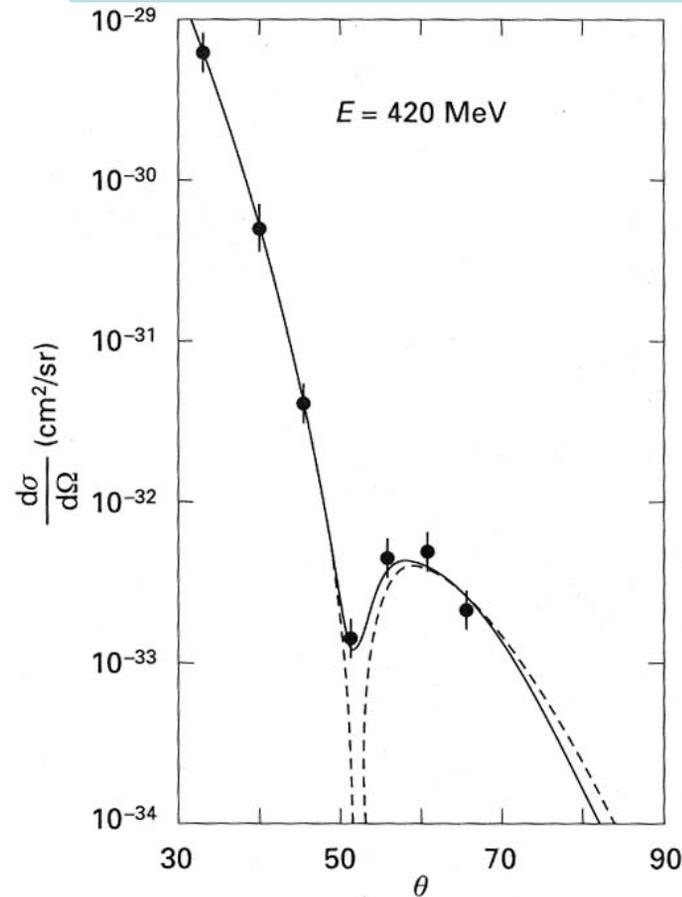
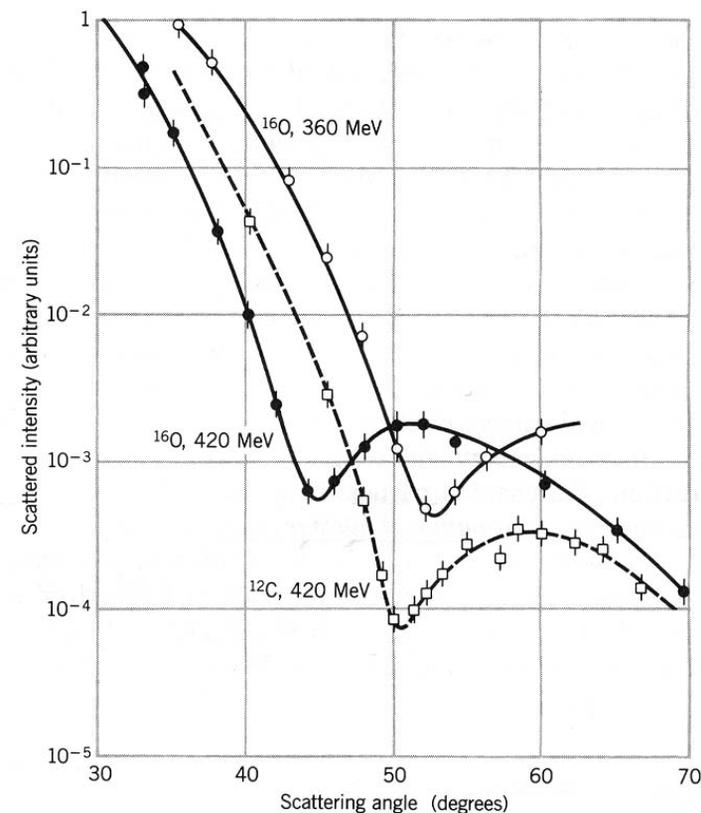


Fig 1

◆ Come calcolato in appendice 3, vedi in seguito, nel caso di una distribuzione di una carica sferica ed omogenea il fattore di forma e' una funzione oscillante con minimi di diffrazione a  $q \times R / (h/2\pi)$ . La distribuzione dei minimi ci da' quindi informazioni su R.



◆ Diffrazione da un disco circolare di diametro D. Il primo minimo e' a  $\theta = \sin^{-1}(1.22\lambda D)$ .  
Da questo stimiamo:

$$R(^{16}\text{O}) \cong 2.6 \text{ fm}$$

$$R(^{12}\text{C}) \cong 2.3 \text{ fm}$$

Fig 2

## Appendice 3: fattore di forma per una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio $R_0$

Condizione di normalizzazione:  $\rho_0 \int \rho(r) d^3r = 1$

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} & \text{per } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{per } r > R_0 \end{cases}$$

$$F(q^2) = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{R_0} e^{iqr \cos\vartheta/\hbar} r^2 dr$$

$$= \rho_0 2\pi \int_0^{R_0} r^2 dr \frac{\hbar}{iqr} \frac{2}{r} \left( e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar} \right)$$

$$= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{9} \int_0^{R_0} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) r dr \quad \text{ponendo } x = \frac{qr}{\hbar}$$

$$F(q^2) = \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^2}{q^2} \int_0^{x_0} x \sin x dx = \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^2}{q^2} \left[ \hbar x - x \cos x \right]_0^{x_0}$$

$$= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^2}{q^2} \left[ \sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right] =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} \hbar^3 \frac{4\pi}{9^3} \left[ \sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right]$$

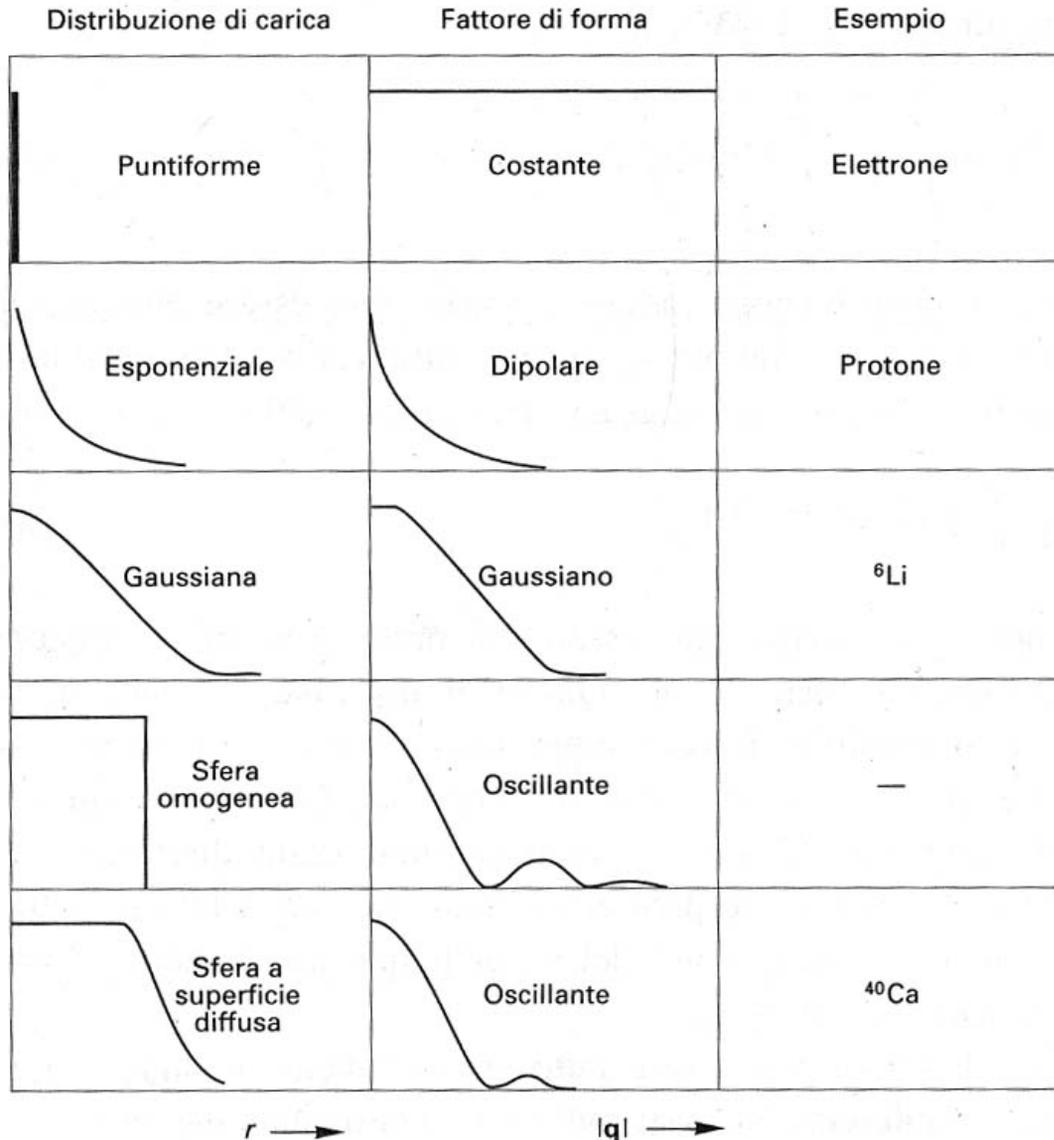
N.B. questo fattore di forma riproduce in modo soddisfacente la diffusione su nuclei con  $A$  grande.

# Distribuzioni di carica $\Leftrightarrow$ Fattori di forma del nucleo

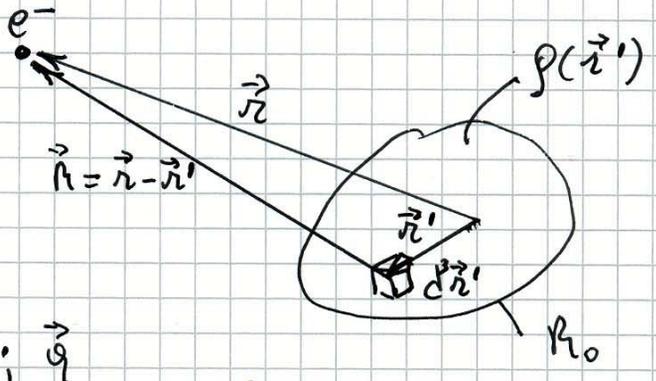
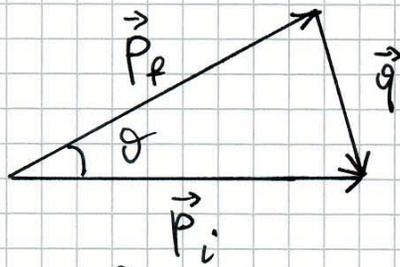
**Tabella 5.1**

Relazione fra le distribuzioni di carica e i fattori di forma per alcune distribuzioni di carica a simmetria sferica, applicando l'approssimazione di Born.

Distribuzione di Carica $f(r)$		Fattore di Forma $F(q^2)$	
Puntiforme	$\delta(r)/4\pi$	1	Costante
Esponenziale	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipolare
Gaussiana	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gaussiano
Sfera omogenea	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ con $\alpha =  q R/\hbar$	Oscillante



# Esercizio: Fattore di forma elettrico



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad ; \quad x \ll R_0 \ll \lambda$$

La particella terghetta è un elettrone e quella bersaglio abbia una struttura di carica distribuita con densità  $\rho(\vec{r}')$ . Avremo

$$V(\vec{r}) = e^2 Z \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad ; \quad \int \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' = 1$$

Avremo

$$\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = e^2 Z \int_V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} \int_{R_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' d^3\vec{r}$$

Calcoleremo il doppio integrale prima su  $\vec{r}$  tenendo costante  $\vec{r}'$ ;  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle &= e^2 Z \int_V \int_{R_0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}/\hbar} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'/\hbar} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d^3\vec{r}' d^3\vec{R} \\ &= e^2 Z \int_V \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}/\hbar}}{R} d^3\vec{R} \int_{R_0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'/\hbar} \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' \end{aligned}$$

# Fattore di Forma elettrico

$$\begin{aligned}
 & \int_V \frac{e}{R} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}/\hbar} d^3\vec{R} = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^\infty \frac{e}{R} e^{iqR\cos\chi/\hbar} R^2 dR \\
 & = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta \int_0^\infty \frac{e}{R} e^{iqR\cos\chi/\hbar} R^2 dR \\
 & = 2\pi \int_0^\infty \frac{R^2 dR}{R} \frac{2\hbar}{2iqR} \left( e^{iqR/\hbar} - e^{-iqR/\hbar} \right) \\
 & = 4\pi \frac{\hbar}{q} \int_0^\infty \frac{\sin qR/\hbar}{R} R^2 dR = 4\pi \left( \frac{\hbar}{q} \right)^2
 \end{aligned}$$

Risassumendo otteniamo :

$$\langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle = 4\pi e^2 Z \frac{\hbar^2}{q^2} \int_{R_0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'/\hbar} d^3\vec{r}'$$

dove chiamiamo Fattore di Forma Elettrico la quantità  $F(q^2)$  definita da

$$F(q^2) = \int_{R_0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'/\hbar} \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

# Fattori di Forma Nucleari

Per  $\frac{|q| \cdot R}{\hbar} \ll 1$  sviluppiano  $F(q^2)$  in serie di potenze  $q$ :

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int f(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{i q |z| \cos \vartheta}{\hbar} \right)^m d^3x \quad \vartheta \text{ è tra } \vec{x} \text{ e } \vec{q} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(x) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{q r}{\hbar} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \dots \right] d\phi \cos \vartheta r^2 dz \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dz - \frac{1}{6} \frac{q^2}{\hbar^2} 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^4 dz + \dots \end{aligned}$$

Se definiamo  $\langle r^2 \rangle$ , **RAGGIO QUADRATICO MEDIO** della distribuzione di carica, come

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) r^2 dz$$

Avremo:  $F(q^2) = 1 + \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots$

$\langle r^2 \rangle$  si misura a piccoli valori di  $q^2$   $\left. \vphantom{\langle r^2 \rangle} \right\} \langle r^2 \rangle = -6 \hbar^2 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$

# Distribuzione di carica dei nuclei

◆ A partire dalla metà degli anni 50 studi sistematici fondati su numerose misure di queste distribuzioni hanno portato alle seguenti conclusioni:

- 1) I nuclei non sono sfere con una superficie definita in modo netto;
- 2) al loro interno la densità di carica è costante mentre in superficie si annulla in modo graduale;
- 3) la densità di carica è ben riprodotta, vedi Fig 1, dalla distribuzione di Woods-Saxon a due parametri:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \rightarrow \text{dove} \rightarrow \rho(c) = \rho(0)/2$$

$$\text{per } A \text{ grande} \rightarrow c = 1.07 \text{ fm} \times A^{\frac{1}{3}}; a = 0.54 \text{ fm}$$

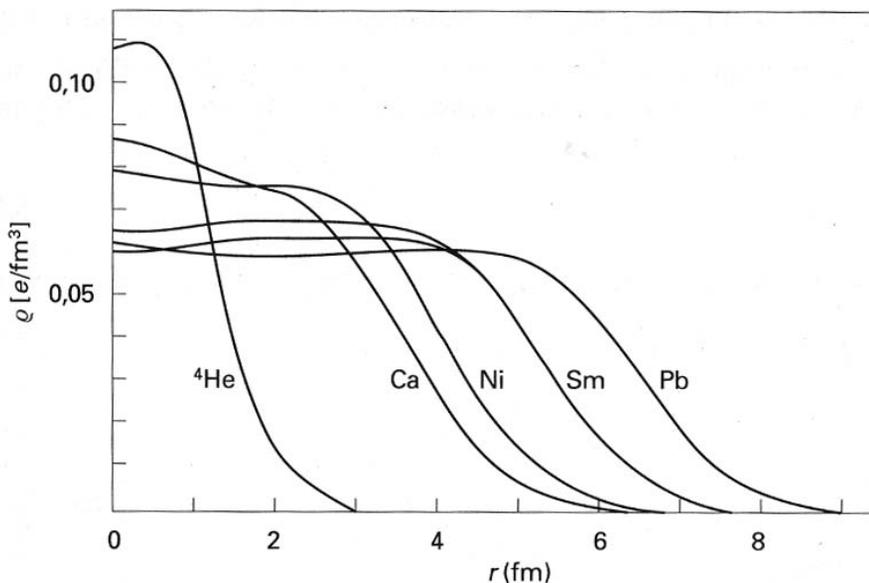


Fig. 1

◆ Essendo la densità costante, avremo:  $(4/3) \times \pi \times R^3 \times \rho_0 = A$   
da cui, per  $\rho_0 = 0.17$  nucleoni/fm<sup>3</sup>,

$$R = 1.12 \times A^{1/3} \text{ fm}$$

# Raggio dei nuclei

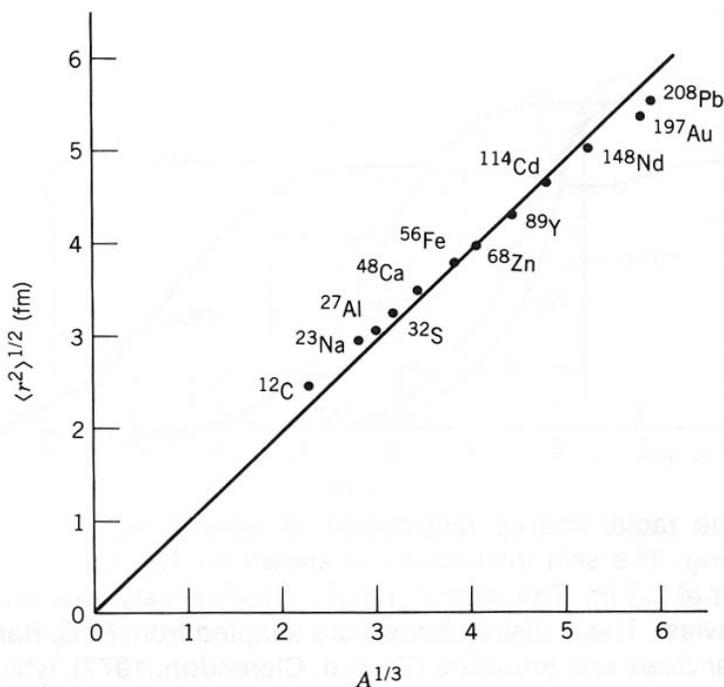
◆ In Fig. 2 vediamo lo r.m.s. del raggio nucleare per vari nuclei in funzione di  $A^{1/3}$  determinato da esperimenti di diffusione di elettroni. Un fit con una retta, forzata a passare per l' origine, da' come risultato una pendenza di  $R_0 = 1.23$  fm.

◆ Se assumiamo che  $\rho(\text{protone}) = \rho(\text{carica})$  e che  $\rho(\text{neutrone}) = \rho(\text{protone})$ , avremo:  $\rho(\text{neutrone}) / \rho(\text{protone}) = N/Z$ .

Quindi **la densita' totale dei nucleoni** sara' :  $\rho_T = \rho_n + \rho_p = N/Z \times \rho_p + \rho_p = N/Z \rho_{\text{carica}} + \rho_{\text{carica}} = [(N + Z) / Z] \times \rho_{\text{carica}}$

$$\rho_T = A/Z \times \rho_{\text{carica}}$$

◆  $\rho_{\text{carica}}(0)$  diminuisce leggermente al crescere di A. Mentre  $\rho_T$  e' costante per tutti I nuclei.



**Fig. 2** The rms nuclear radius determined from electron scattering experiments. The slope of the straight line gives  $R_0 = 1.23$  fm. (The line is not a true fit to the data points, but is forced to go through the origin to satisfy the equation  $R = R_0 A^{1/3}$ .) The error bars are typically smaller than the size of the points ( $\pm 0.01$  fm). More complete listings of data and references can be found in the review of C. W. de Jager et al., *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **14**, 479 (1974).

# Raggio dei nuclei

- ◆ Se indichiamo con  $t$  lo spessore dello strato di superficie per cui  $\rho(r)$  passa dal 90% al 10% del suo valore massimo, si trova che  $t$  ha lo stesso valore per TUTTI i nuclei pesanti:  $t \cong 2.40$  fm, vedi Fig. 3
- ◆ Per una materia nucleare infinitamente estesa si avrebbe  $\rho_T \cong 0.17 \times \text{nucleoni/fm}^3$
- ◆ I Lantanidi ( Terre rare ) hanno una forma **elissoide**;
- ◆ Nuclei leggeri come  ${}^6,7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$  ed in particolare  ${}^4\text{He}$ , sono casi particolari con  $\rho(r)$  di tipo **gaussiano**.

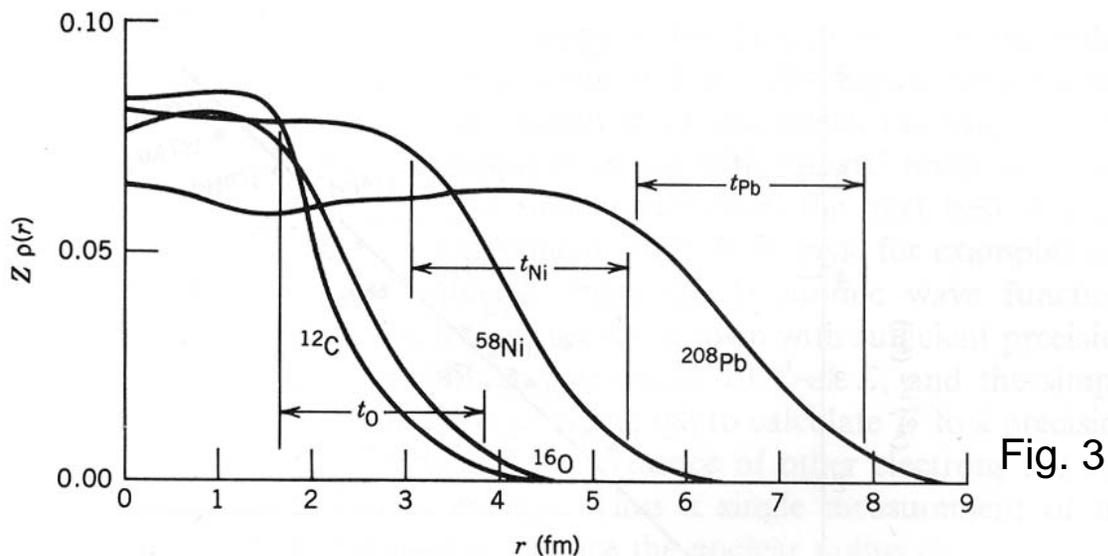


Fig. 3

**Figure 3.4** The radial charge distribution of several nuclei determined from electron scattering. The skin thickness  $t$  is shown for O, Ni, and Pb; its value is roughly constant at 2.3 fm. The central density changes very little from the lightest nuclei to the heaviest. These distributions were adapted from R. C. Barrett and D. F. Jackson, *Nuclear Sizes and Structure* (Oxford: Clarendon, 1977), which gives more detail on methods of determining  $\rho(r)$ .

# Proprieta' dei Nuclei

Le grandezze che caratterizzano i Nuclei Atomici e che danno informazioni sulla loro struttura sono:

- 1) la massa, il raggio, lo spin;
- 2) la carica elettrica, il momento di dipolo magnetico, il momento di quadrupolo elettrico, ....

I nuclei sono indicati con il **Simbolo dell' Elemento X**, il **Numero Atomico Z** ed il **Peso Atomico A** nel modo seguente:



La **Carica Elettrica** di un nucleo e' data dal Numero di protoni ( Z ) moltiplicato per la carica elementare:

$$Q = Z e \quad ; \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

Il numero Atomico Z determina le Proprieta' Chimiche di un dato elemento:

- i) nuclei con lo stesso Z e diverso A sono chiamati **isotopi**: hanno la stessa posizione nella Tavola di Mendeleev.
- ii) nuclei con lo stesso A e diverso valore di Z sono chiamati **isobari**: hanno la massa approssimativamente uguale.
- iii) nuclei con lo stesso numero di neutroni (  $N = A - Z$  ) sono chiamati **isotoni**.

Z e' stato misurato dallo studio degli spettri di emissione dei raggi X che sono caratteristici dell' atomo in esame opportunamente eccitato.

Nel 1913 Moseley, stabilendo una relazione tra la frequenza dei raggi X ed il numero atomico degli elementi, ordino' TUTTI gli elementi allora noti nella tavola di Mendeleev.

## Legge di Moseley :

$$h \cdot \nu = \frac{3}{4} R_y (Z-1)^2 ; R_y = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} = 13.6 \text{ MeV}$$

dove  $R_y$  e' chiamata Energia di Rydberg

## Massa dei Nuclei

La massa dei nuclei, come anticipato nel capitolo sui metodi di misura, e' determinata misurando la traiettoria degli ioni in campi elettrici e magnetici. Oggi si raggiungono precisioni fino a  $\cong 10^{-6}$ . Per ridurre gli errori sistematici, le misure si fanno di solito per **confronto** con nuclei di calibrazione che hanno valori di massa molto vicini a quelli dei campioni da misurare. L' unita' di misura usata in fisica nucleare e' la Atomic Mass Unit, u, definita da:

$$u = 1/12 \text{ massa dell' isotopo } ({}^{12}_6\text{C})$$

In queste unita' la massa dell' atomo di idrogeno e'

$$M({}^1_1\text{H}) = 1.007825 u = 938.783 \text{ MeV}/c^2$$

con fattore di conversione:  $u = 931.494 \text{ MeV}/c^2$

	simbolo	massa atomica (u)	massa nucleare (MeV)
	$\frac{1}{12} [ {}^{12}_6\text{C} ]$	1	931.494
elettrone	$e$		0.511
protone	$p$		938.272
neutrone	$n$		939.566
idrogeno	${}^1_1\text{H}$	1.007825	938.373
deuterio	${}^2_1\text{H}$	2.014102	1875.613
trizio	${}^3_1\text{H}$	3.016049	2808.921
elio	${}^4_2\text{He}$	4.002603	3727.379

# L' energia di legame e la massa dei nuclei

Come già ricordato, le masse dei nuclidi instabili a vita media breve NON possono essere misurate con uno spettrometro di massa. In questi casi si possono usare le leggi della conservazione dell' energia in opportune reazioni nucleari.

Si definisce **Energia di Legame B** la grandezza data da :

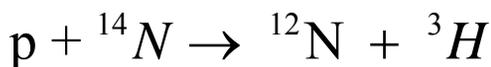
$$B(Z, A) = [ Z M(^1\text{H}) + (A - Z) M_n - M(A, Z) ]$$

Dove  $M(^1\text{H}) = M_p + M_e$  e si trascura l' energia di legame dell' atomo di idrogeno ( $B_H \cong 13.6 \text{ eV}$ ).

Si definisce **Q-Value** di una reazione Nucleare :

$$Q = ( M_{\text{iniziale}} - M_{\text{finale}} ) c^2 = T_{\text{finale}} - T_{\text{iniziale}}$$

**Esempio N. 1)** : Consideriamo il caso dell' Azoto  $^{12}_7\text{N}$



Dalla conservazione dell' energia abbiamo:

$$M_p \cdot c^2 + T_p + M_{^{14}\text{N}} \cdot c^2 + T_{^{14}\text{N}} = M_{^{12}\text{N}} \cdot c^2 + T_{^{12}\text{N}} + M_{^3\text{H}} \cdot c^2 + T_{^3\text{H}}$$

si trova  $Q = -22.1355 \text{ MeV}$  da cui

$$M_{^{12}\text{N}} = M_p + M_{^{14}\text{N}} - M_{^3\text{H}} - \frac{Q}{c^2}$$

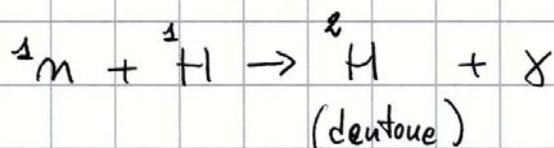
**NOTA BENE:** Le energie di legame degli

elettroni atomici sono circa uguali a  $20.8 \cdot Z^{\frac{7}{3}} \text{ eV}$ .

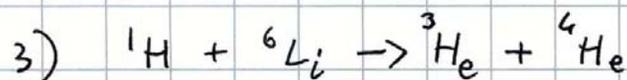
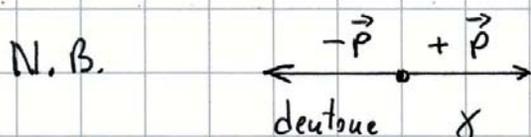
Per l' idrogeno si ottiene  $\cong 13.6 \text{ eV}$ .

# L'energia di legame e le masse dei nuclei

2) Misura delle masse del neutrone dalle catture in quiete dello stesso:



$$M_n + M_p - M_d = h\nu + \frac{(h\nu)^2}{2M_d c^2} = 2.225 \text{ MeV}$$



$$E_{{}^1_1\text{H}} + E_{{}^6_3\text{Li}} = E_{{}^3_2\text{He}} + E_{{}^4_2\text{He}} \quad (E = Mc^2 + T)$$

Note le masse e misurate le energie cinetiche dei tre nuclei noti e di quello di cui si vuole misurare la massa, è determinata l'energia di legame B.

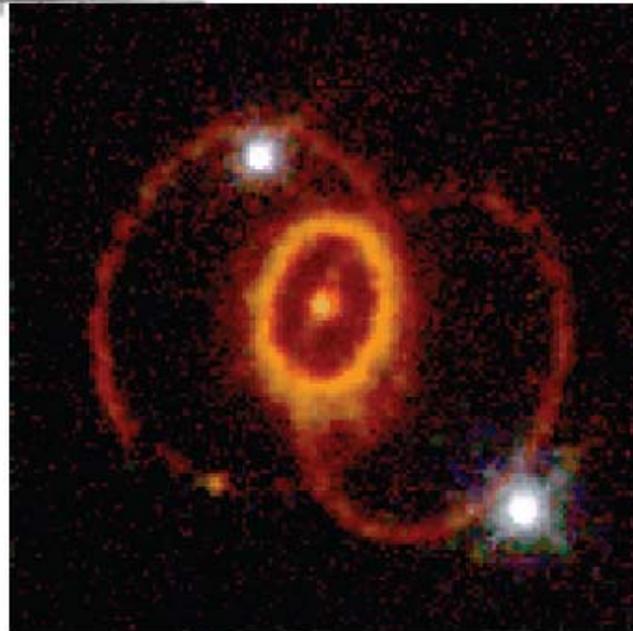
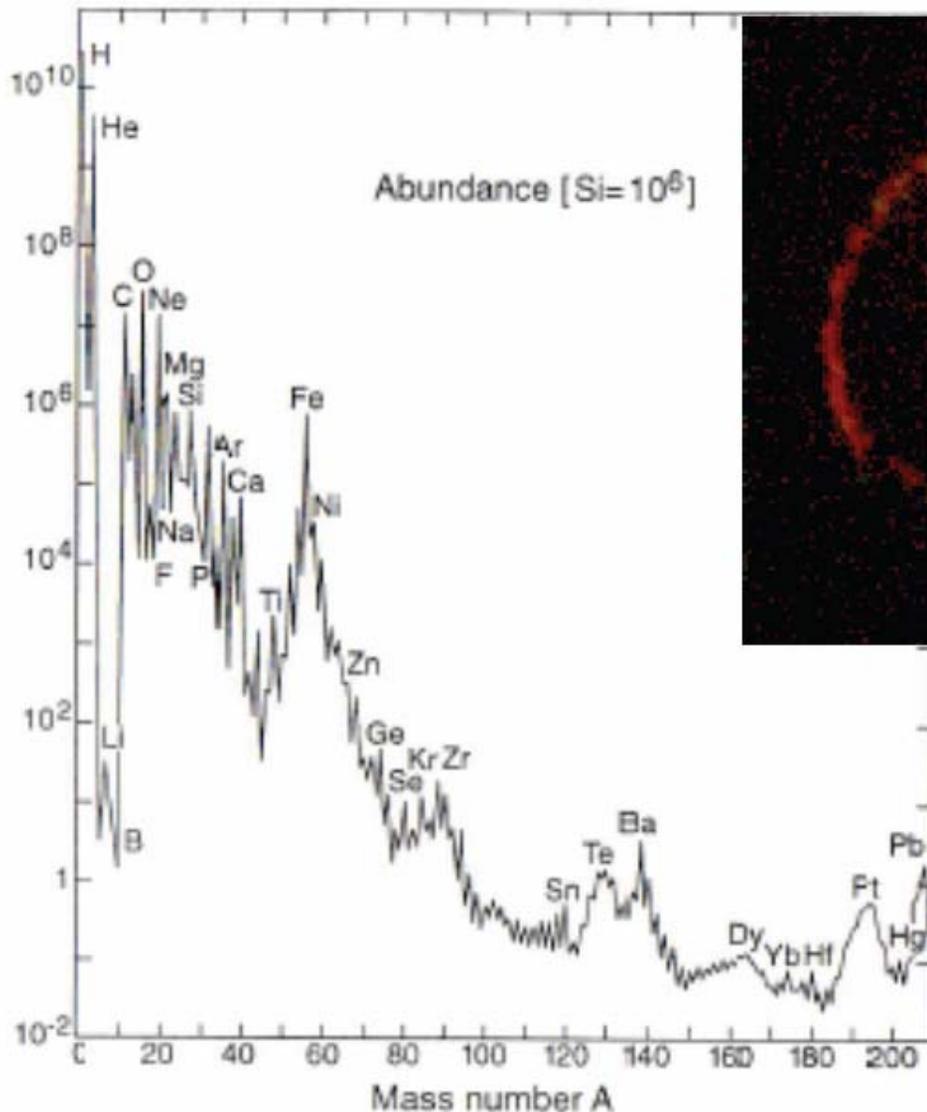
Note Bene: In natura si trova:

① Nuclei con Z dispari hanno 1 o 2 isotopi stabili

2) Z dispari ed A pari: sono instabili

3) Z dispari ed A dispari: solo uno, due nuclei  $\beta$ -stabili

# L' Abbondanza dei Nuclidi



Solar system abundances of the elements

I nuclei piu' leggeri fino al  $56\text{Fe}$  ( il nucleo piu' stabile ), furono prodotti per fusione nucleare nelle stelle. I nuclei piu' pesanti furono creati nelle esplosioni di stelle molto pesanti come le supernovae.

# Esplorando l'atomo si trova che e' un : Oggetto Quantistico !

- Proprieta' Periodiche

Mendeleev

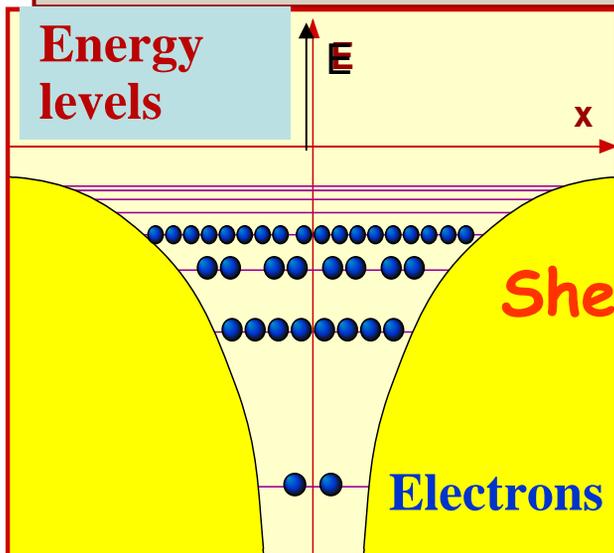


1 1a	2 IIa																18 0	
H	He																	
Li	Be												B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	3 IIIb	4 IVb	5 Vb	6 VIb	7 VIIb	8 VIIIb	9 VIIIb	10 VIIIb	11 Ib	12 IIb		Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn		Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd		In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg		Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra		Unq <sup>†</sup>	Unp <sup>§</sup>	Unh	Uns												
			La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	
			Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

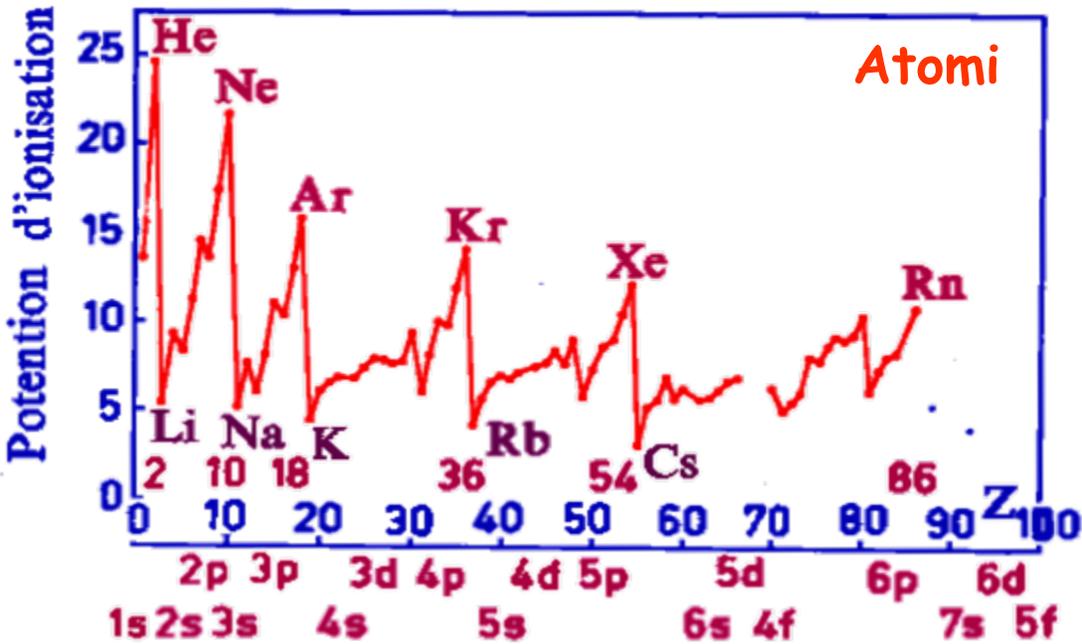
Click on individual elements for atomic information.

Alkali metals
Alkaline earth metals
Transition metals
Lanthanide series
Actinide series
Other metals
Nonmetals
Noble gases

† Other proposed names are kurchatovium (former Soviet Union) and hahnium (U.S.).  
§ Other proposed names are nielsbohrium (former Soviet Union) and rutherfordium (U.S.).

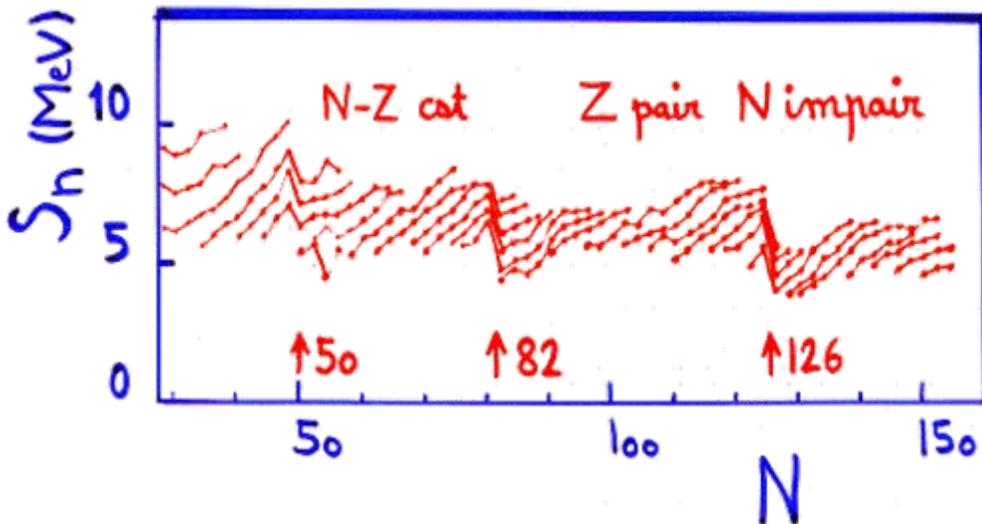


- Proprieta' Periodiche degli atomi
- “ Numeri Magici “

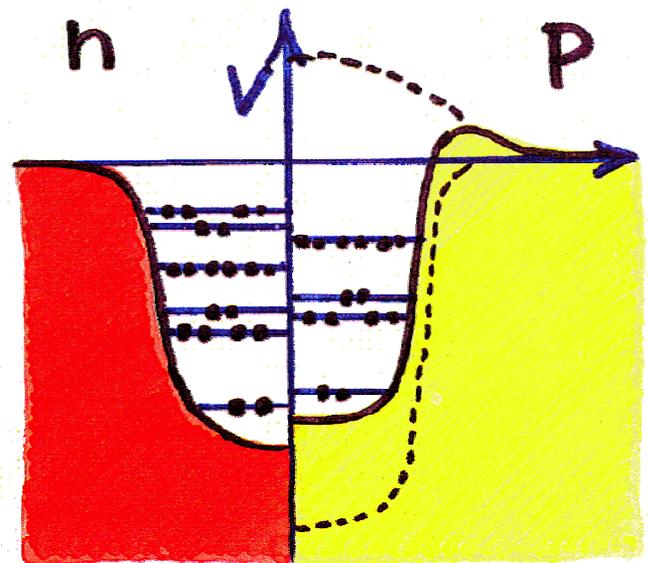
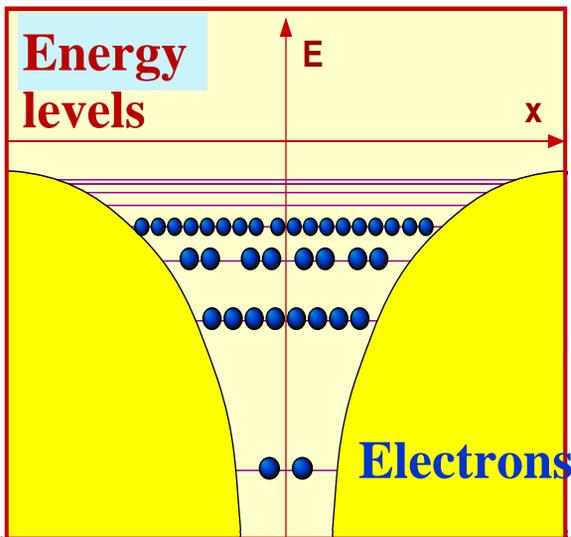
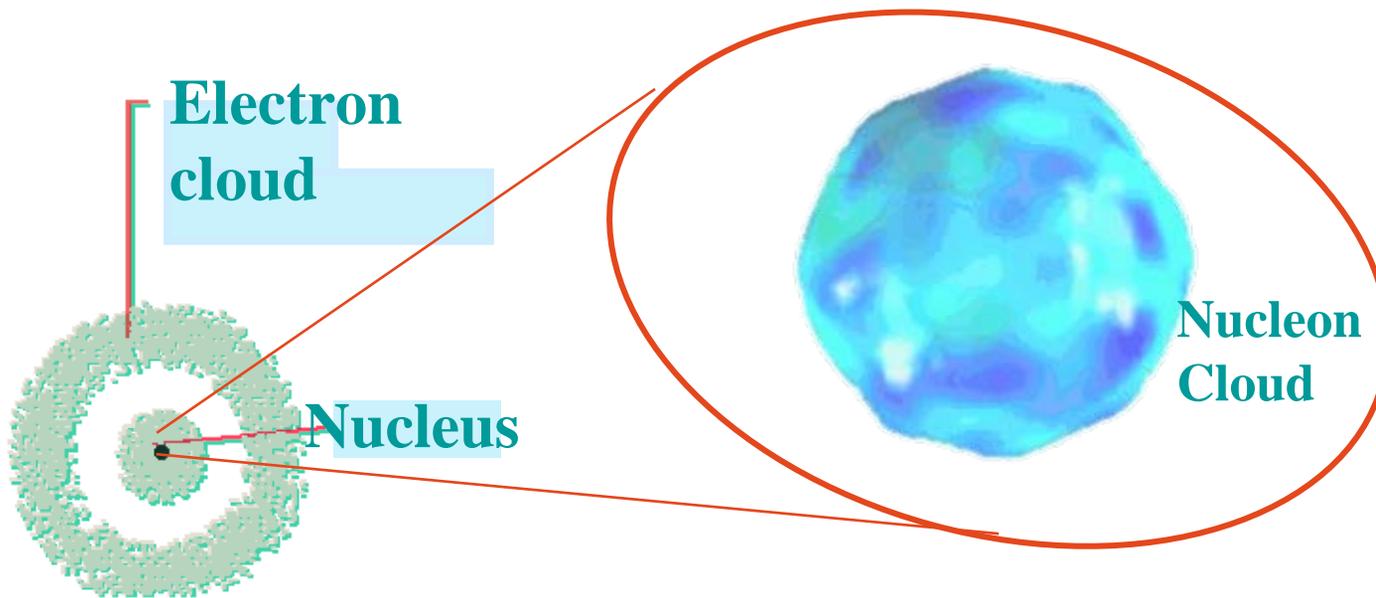


Anche nelle energie di legame dei nuclei ritroviamo delle “ regolarita’ “ che “ colpiscono “ !!

### Nuclei

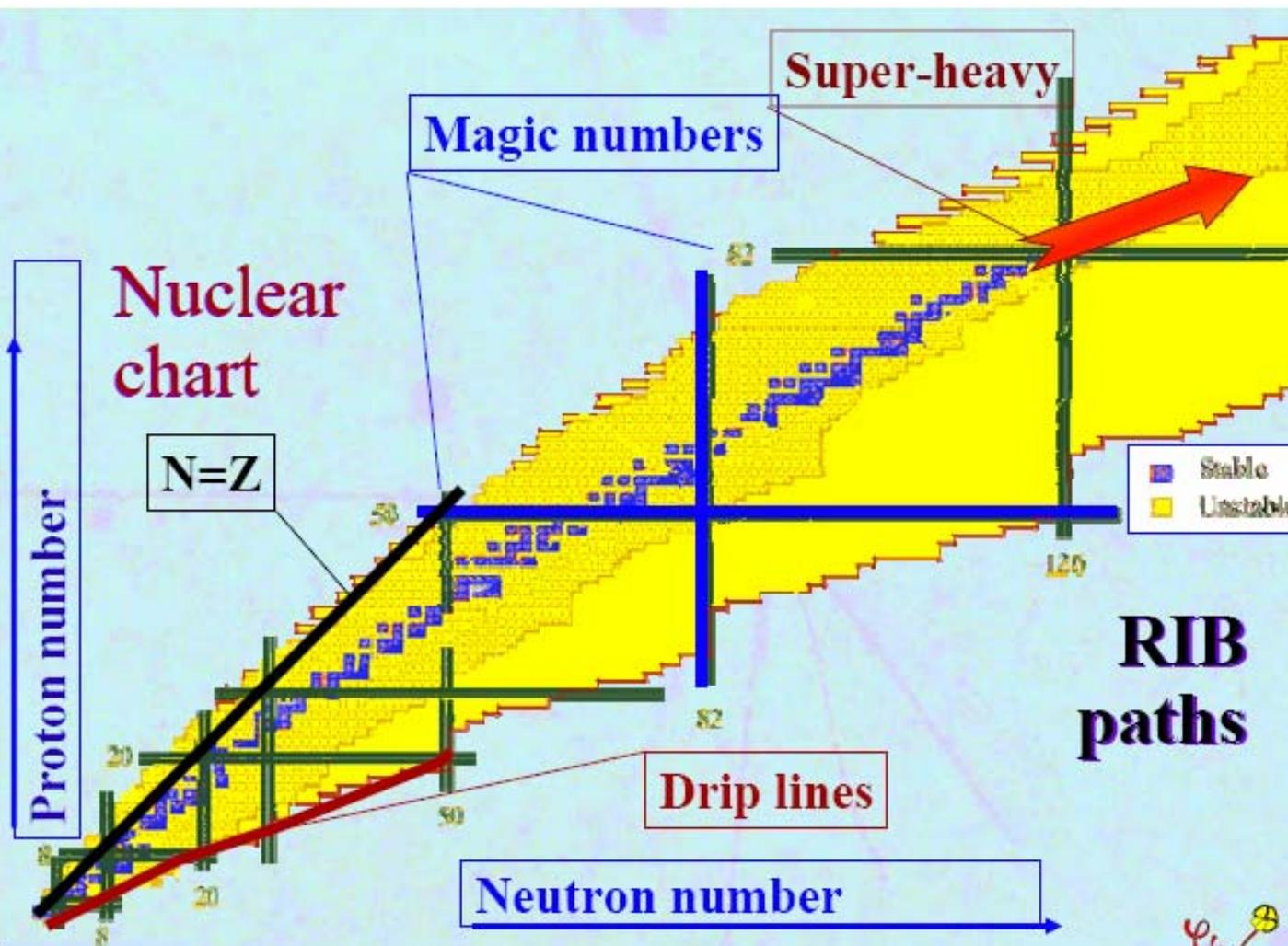


# Numeri Magici dei Nuclei

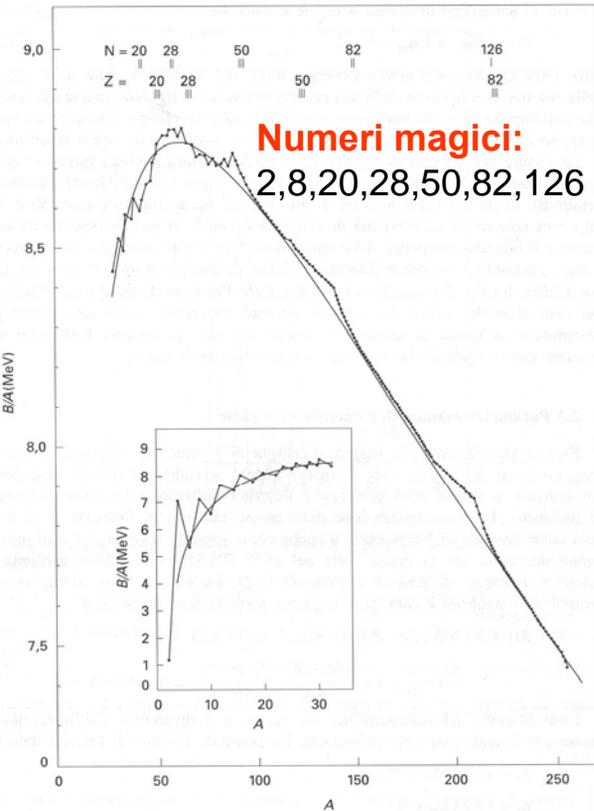


**Atomic shells:**  
gli elettroni sono organizzati dai nuclei atomici

**Nuclear shells:**  
I nucleoni si "auto-organizzano" nei nuclei



# Energia di legame dei nuclei



◆  $B/A \cong 8 \text{ MeV}$

● ci sono grandi fluttuazioni soprattutto tra B di un nucleo e di quello che lo precede: e' il B dell'ultimo nucleone aggiunto al nucleo.

● questa energia di legame e' particolarmente grande per i nuclei pari-pari :

● mentre e' particolarmente piccola per i nuclei ad essi immediatamente successivi:

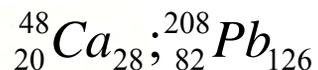
Table 4.2. Energies of some light nuclei

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
$^2_1\text{H}$	2.22	2.2	1.1	$1^+$
$^3_1\text{H}$	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
$^4_2\text{He}$	28.30	19.8	7.1	$0^+$
$^5_2\text{He}$	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
$^6_3\text{Li}$	31.99	4.7	5.3	$1^+$
$^7_3\text{Li}$	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
$^8_4\text{Be}$	56.50	17.3	7.1	$0^+$
$^9_4\text{Be}$	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
$^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	$3^+$
$^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
$^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	$0^+$
$^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
$^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	$1^+$
$^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	$0^+$
$^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

◆ Tutto questo ci richiama:

- 1) il modello a goccia;
- 2) una struttura a gusci.

◆ Numeri Doppiaemente magici:



# Formula di massa semiempirica

$$\blacklozenge B(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c (Z^2/A^{1/3}) - a_a [(N-Z)^2/4A] - \delta(1/A^{1/3})$$

$$\blacklozenge M(A;Z) = (N \times M_n + Z(M_p + m_e)) - B(A;Z)$$

→ il plot di  $M(A;Z)$  Vs  $Z$  e' una parabola

◆  $\delta = +11.2$  MeV per nuclei dispari-dispari

◆  $\delta = -11.2$  MeV per nuclei pari pari

◆  $\delta = 0$  per nuclei pari-dispari

◆ Questo termine, detto di simmetria, tende a rendere simmetrici i nuclei in termini di numeri di neutroni e protoni.

◆ Come conseguenza del principio di Pauli, in media in un nucleo l'attrazione neutrone-protone e' maggiore di quella protone-protone e neutrone-neutrone.

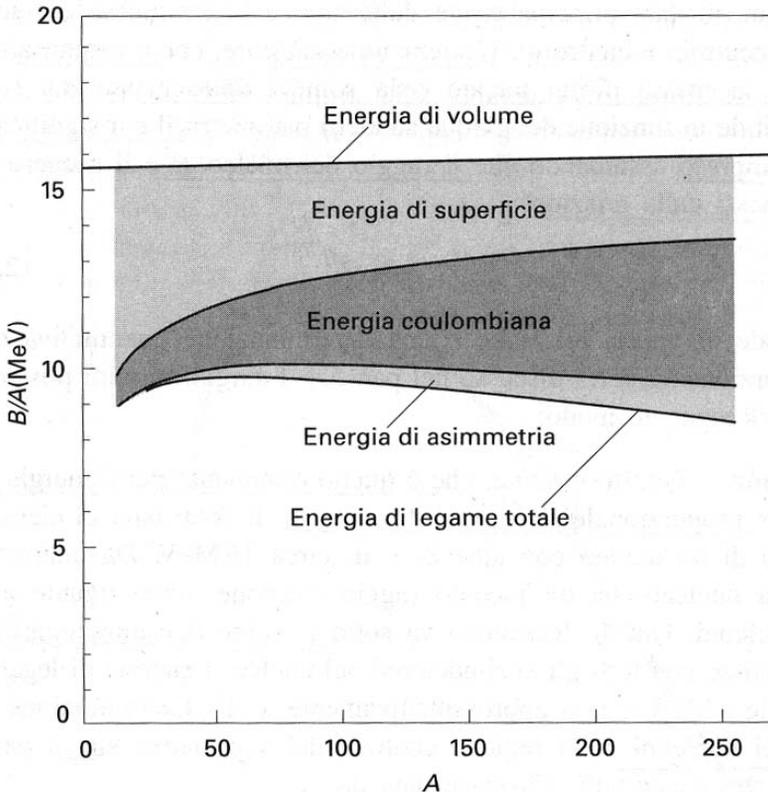


Figura 2.5

I diversi contributi all'energia di legame per nucleone espressi in funzione del numero di massa  $A$ . La linea orizzontale a  $\approx 16$  MeV rappresenta il contributo dell'energia di volume. A questo si sommano con segno negativo il termine di energia di superficie, quello di asimmetria e quello coulombiano risultando in un valore dell'energia di legame per nucleone di  $\approx 8$  MeV (linea più bassa). Il contributo dei termini di asimmetria e coulombiano aumentano rapidamente con  $A$ , mentre quello di superficie diminuisce.

# La stabilita' dei nuclei

- ◆ I nuclei di Fe e Ni posseggono la massima energia di legame per nucleone e sono, quindi, i nuclidi piu' stabili.
- ◆ per gli isobari con eccesso di neutroni e' energeticamente vantaggioso convertire un neutrone in un protone, mentre, nel caso di un eccesso di protoni puo' avvenire la reazione inversa: **decadimento  $\beta$** .
- ◆ Nei nuclei piu' pesanti, a causa della maggiore repulsione coulombiana, l' energia di legame per nucleone e' minore.
- ◆ I nuclei ancora piu' pesanti diventano instabili e decadono per **fissione** in due o piu' nuclei piu' leggeri.

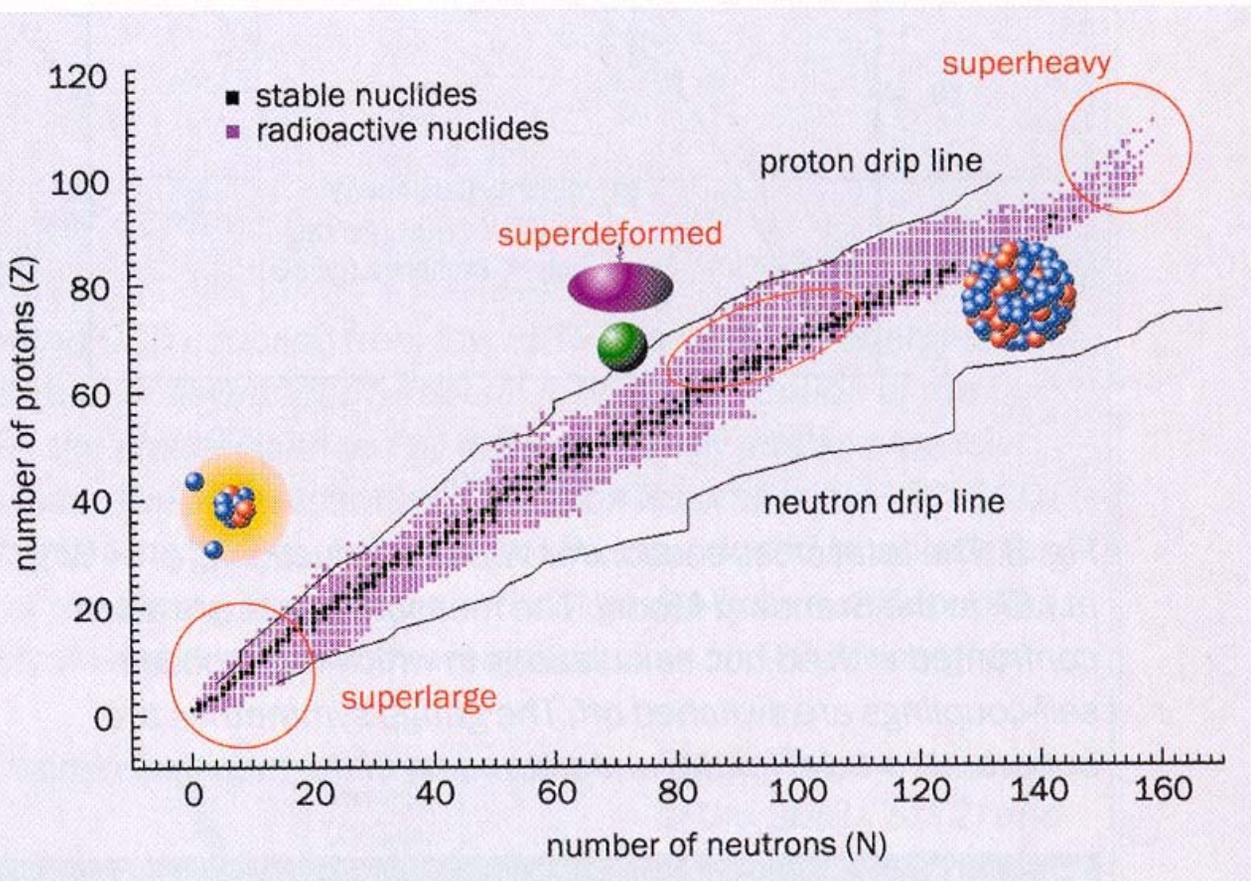
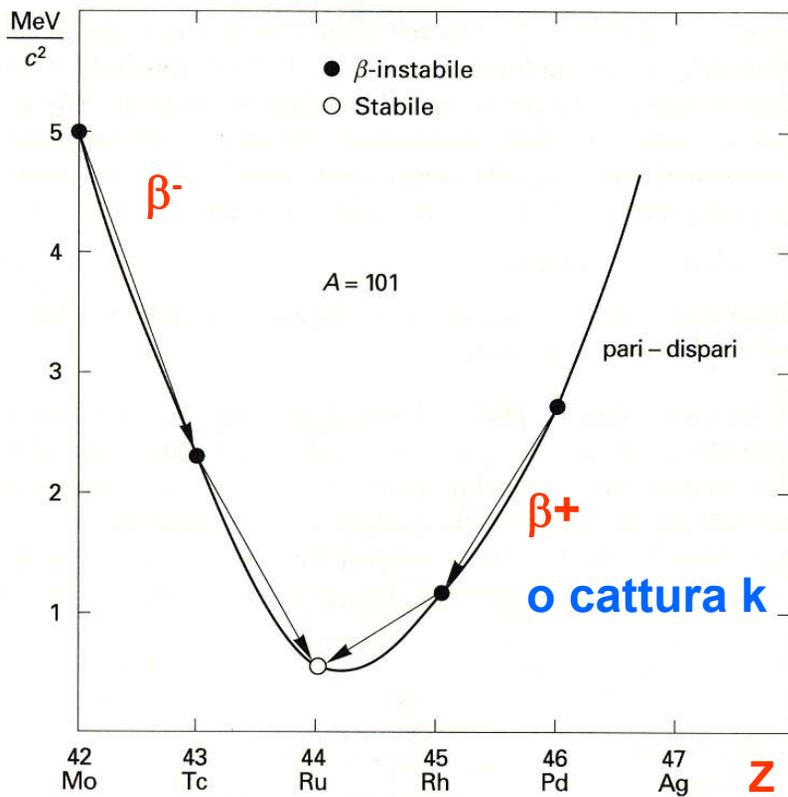
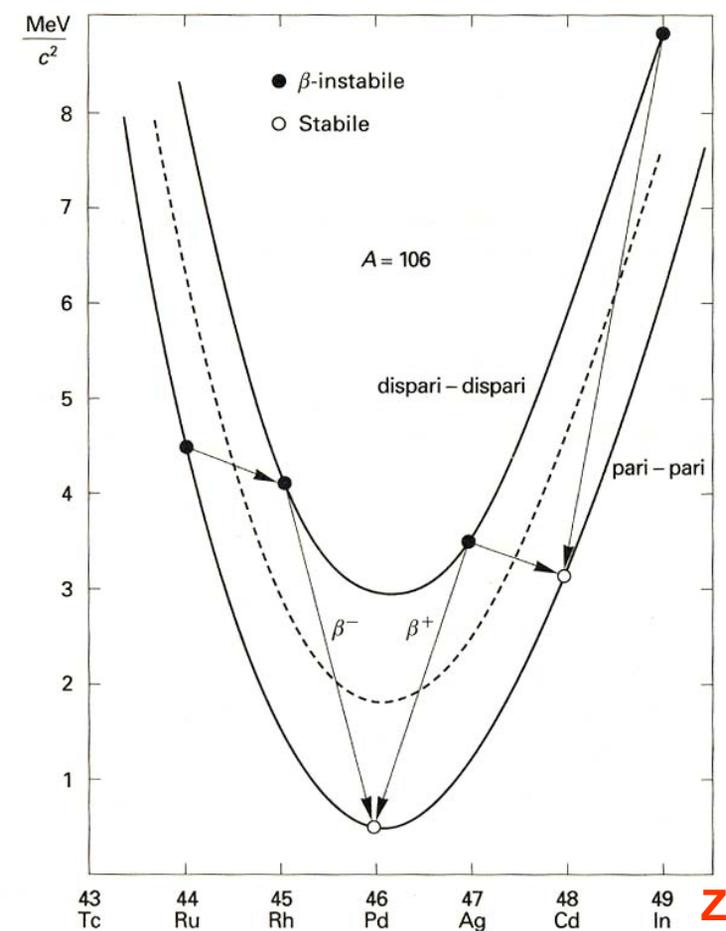


Fig. 1. The table of known stable and radioactive nuclides, showing the regions that are inhabited by the superheavy, superdeformed and superlarge nuclei, as well as the drip lines, which have been calculated using the Hartree-Fock-Bogoliubov plus Gogny method.

# Il decadimento $\beta$ : the $\beta$ stability valley

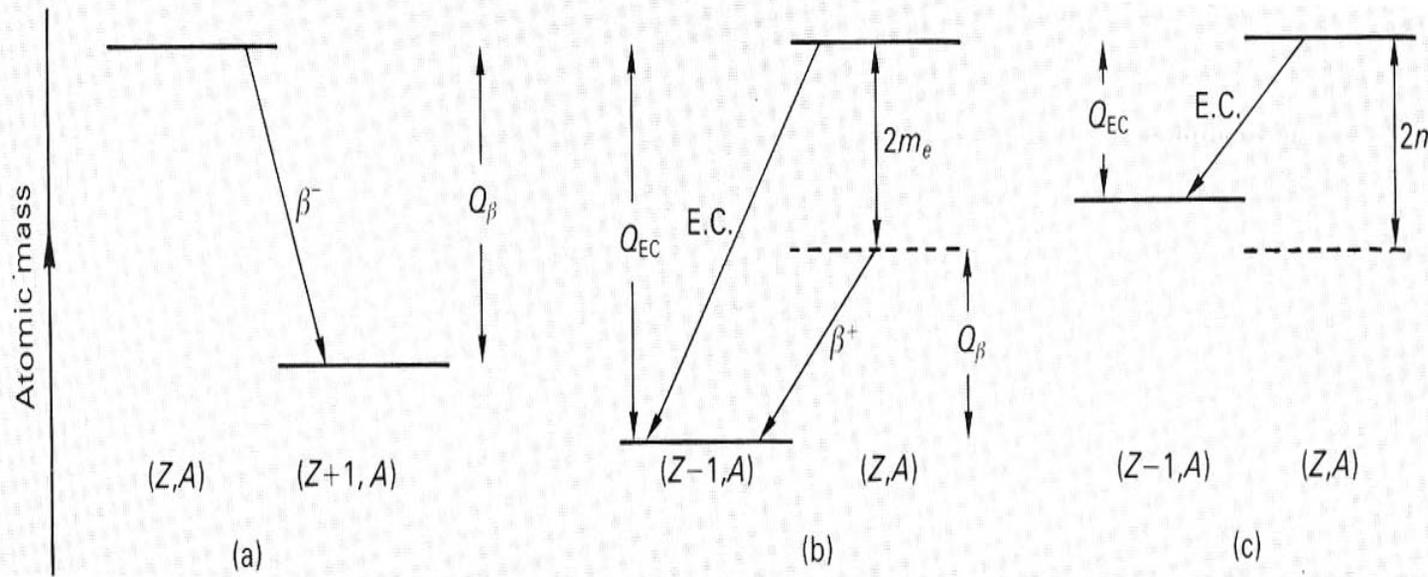


Un solo valore di Z  $\beta$ -stabile per nuclei con A dispari



I nuclei con A pari sono divisibili in due classi: a) N e Z entrambi pari b) N e Z entrambi dispari. Sono separate da  $2\delta$ .

# Decadimento $\beta$



a) e' possibile solo se:  $M_{nucleo}(A, Z) > M_{nucleo}(A, Z+1) + m_e$  ( $m_\nu \cong 0$ )

se aggiungiamo a destra ed a sinistra  $Zm_e$  otteniamo:

$$M_{atomo}(A, Z) > M_{atomo}(A, Z+1)$$

dove abbiamo trascurato al solito l' energia di legame degli elettroni. Questa formula e' conveniente perche di solito il decadimento  $\beta$  avviene negli atomi.

b) e' possibile se:  $M_{nucleo}(A, Z) > M_{nucleo}(A, Z-1) + m_e$

se di nuovo aggiungiamo  $Zm_e$  a destra ed a sinistra otteniamo:

$$M_{atomo}(A, Z) > M_{atomo}(A, Z-1) + 2m_e$$

c) e' possibile (cattura elettronica) se:  $M_{nucleo}(A, Z) + m_e > M_{nucleo}(A, Z-1)$

se aggiungiamo  $m_e(Z-1)$  a destra ed a sinistra abbiamo:

$$M_{atomo}(A, Z) > M_{atomo}(A, Z-1)$$

# Decadimento $\beta$

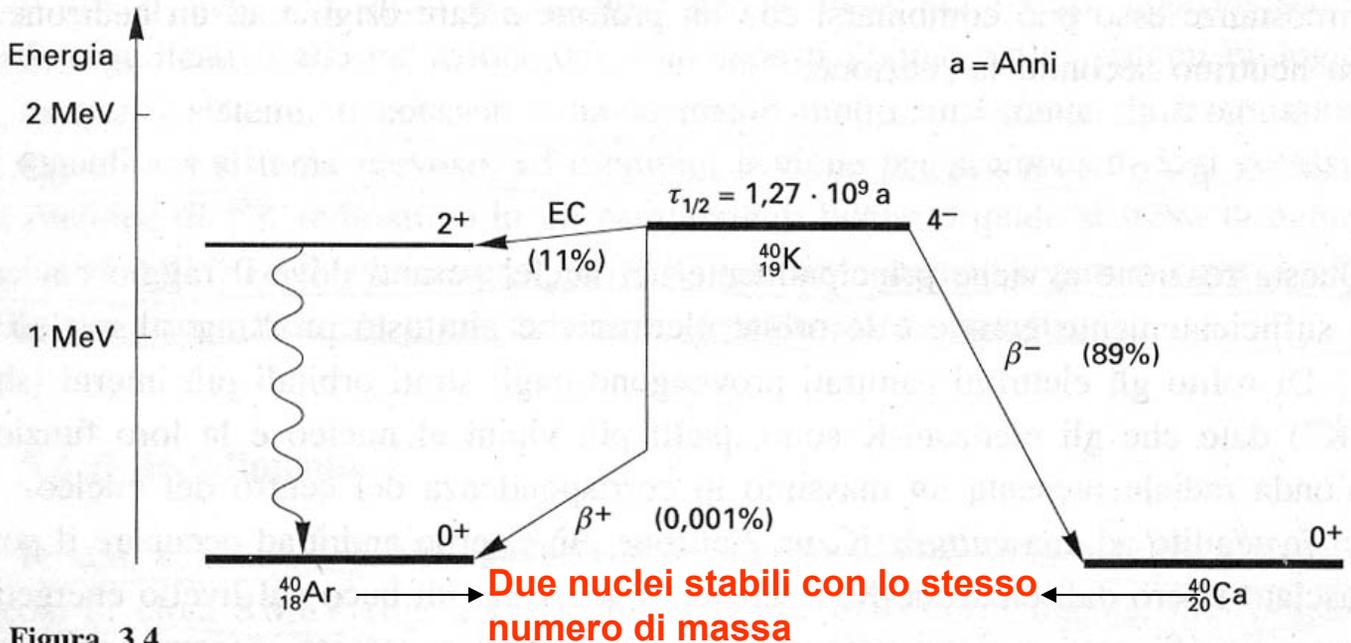


Figura 3.4

Il decadimento  $\beta$  del  $^{40}\text{K}$ . In questo caso il decadimento  $\beta^-$ , quello  $\beta^+$  e anche il processo di cattura elettronica (EC) si trovano a competere fra loro. La frequenza associata ad ognuno di questi processi è indicata fra parentesi. La freccia piegata nel decadimento  $\beta^+$  indica che la produzione di un  $e^+$  e la presenza di un elettrone in più nell'atomo di  $^{40}\text{Ar}$  richiedono 1.022 MeV, mentre il resto dell'energia disponibile lo si ritrova sotto forma di energia cinetica del positrone e del neutrino. Lo stato eccitato dello  $^{40}\text{Ar}$  prodotto nella cattura elettronica, decade allo stato fondamentale con emissione di un fotone.

◆ La vita media  $\tau$  dei nuclei soggetti a decadimento  $\beta$  varia da pochi m-secondi a  $10^{16}$  anni:

◆  $\tau$  dipende fortemente dalla energia disponibile nel decadimento

◆  $\tau \propto 1/E^5$

◆  $n_{\text{libero}} \rightarrow p + e^- + \text{anti-}\nu_e$  ( $E_{\text{rilasciata}} = 0.78 \text{ MeV}$ )

$\tau_n = 889.1 \pm 2.1 \text{ s}$

# Decadimento $\alpha$

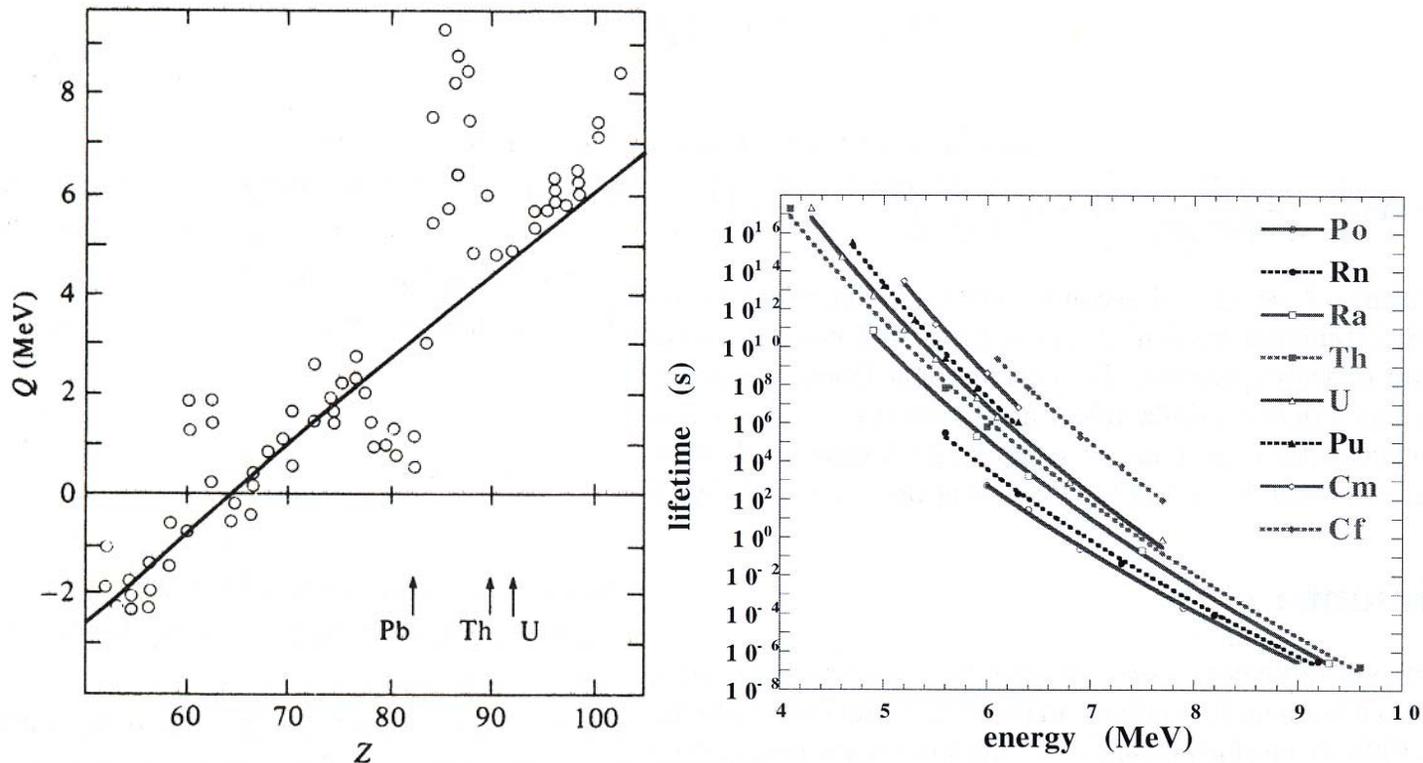
◆ Come abbiamo già ricordato, gran parte dei nuclei pesanti,  $A \geq 200$ , decadono  $\alpha$ . Nel 1903 Rutherford misurò il rapporto  $q/M\alpha$  ed ottenne un valore pari a  $2/3$  dello stesso rapporto per il protone. Nel 1909, facendo decadere una sostanza radiattiva nel vuoto ed analizzando lo spettro del gas, osservò che questo conteneva elio: **scopri' quindi che le particelle  $\alpha$  sono nuclei di elio**. Abbiamo visto che il nucleo di elio ha una energia di legame di circa 28.3 MeV. Quindi affinché sia possibile che un nucleo  $(A,Z)$  decada  $\alpha$  dando un nucleo  $(A-4;Z-2)$  deve valere la condizione :

$$M(A;Z)+B(A;Z) > M(A-4;Z-2)+B(A-4;Z-2)+M\alpha+B\alpha \quad \text{da cui}$$

$$M(A;Z)- M(A-4;Z-2)- M\alpha > B(A-4;Z-2)+28.3- B(A;Z) >0 \quad \text{da cui}$$

$$B(A;Z) < B(A-4;Z-2)+28.3 \quad (\text{vedi Fig. 1})$$

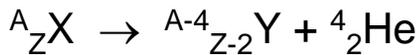
Per i nuclei  $\beta$  stabili fino ad  $A \geq 165$  questa condizione è sempre soddisfatta ma con una vita media così grande ( $\tau > \text{vita dell' universo} = 10^9$  anni) che fino al bismuto,  $^{209}_{83}\text{Bi}$ , i nuclei possono essere considerati  $\beta$  ed  $\alpha$  stabili. Sopra gli actinidi il decadimento  $\alpha$  e la fissione sono la causa dell' esaurimento degli elementi della tavola periodica.



**Fig. 6.1** Experimental and theoretical  $\alpha$ -decay energies  $Q = B(A - 4, Z - 2) + 28.3 \text{ MeV} - B(A, Z)$ , as a function of the atomic number  $Z$  of the parent nucleus. The experimental points are from cases where both parent nucleus and daughter nuclei are  $\beta$ -stable. The theoretical curve is from equation (4.5) (neglecting the pairing energies) together with equation (4.14).

# Decadimento $\alpha$

- ◆ Per  $A \geq 150$  abbiamo nuclei instabili per decadimento  $\alpha = {}^4\text{He}^{++}$  con  $B \cong 28.3 \text{ MeV}$ :



E' un decadimento a due corpi ed e' quindi Monocromatico. In generale si ha:

$$4 \text{ MeV} < T_\alpha < 8 \text{ MeV}$$

la vita media ha una fortissima dipendenza da  $T_\alpha$  e, nell'intervallo citato, varia di 20 ordini di grandezza secondo **la legge di Geiger-Nuttal:**

$$\ln \tau = a - b \ln T_\alpha$$

◆ Il processo e' RARO a causa della barriera coulombiana repulsiva che circonda il nucleo. Per nuclei leggeri il Q-value della reazione e' cosi' basso da inibire il processo stesso. Nel riferimento del nucleo madre:

- ◆  $M_X c^2 = M_Y c^2 + M_\alpha c^2 + T_Y + T_\alpha$  ed  $\mathbf{p}_Y + \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{0}$

$$(M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = Q =$$

$$= p^2/(2M_Y) + p^2/(2M_\alpha) = p^2/(2M_\alpha) [1 + M_\alpha/M_Y]$$

per  $M_Y \gg M_\alpha \rightarrow Q \cong p^2/(2M_\alpha)$

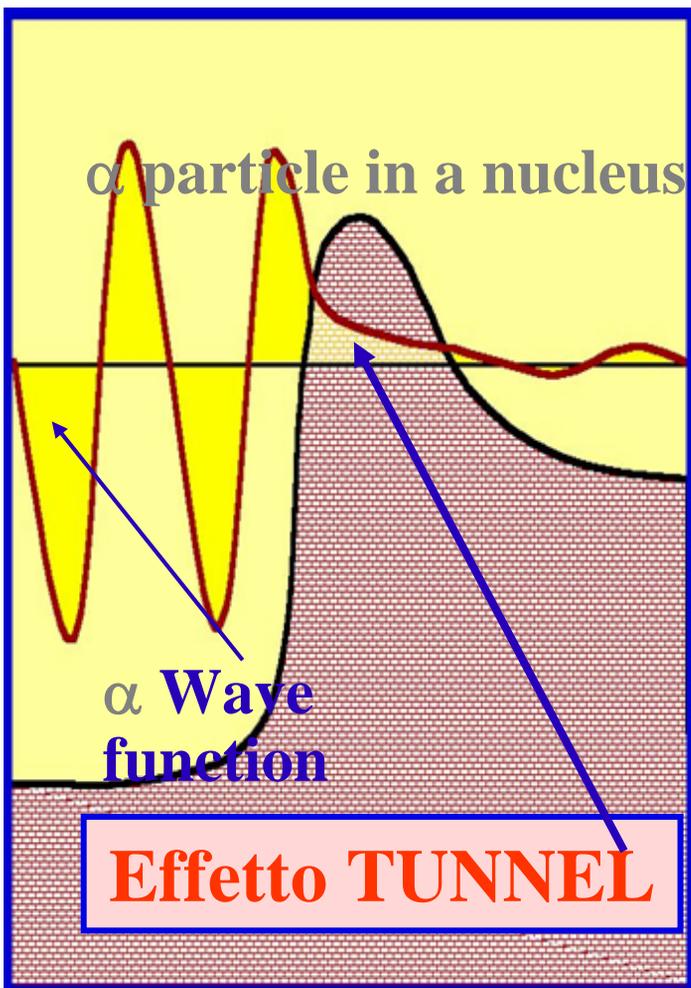
$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}} \cong Q \left(1 - \frac{4}{A}\right)$$

$$T_Y = Q \frac{\frac{M_\alpha}{M_Y}}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}} \cong Q \times \frac{4}{A} \rightarrow T_\alpha \gg T_Y$$

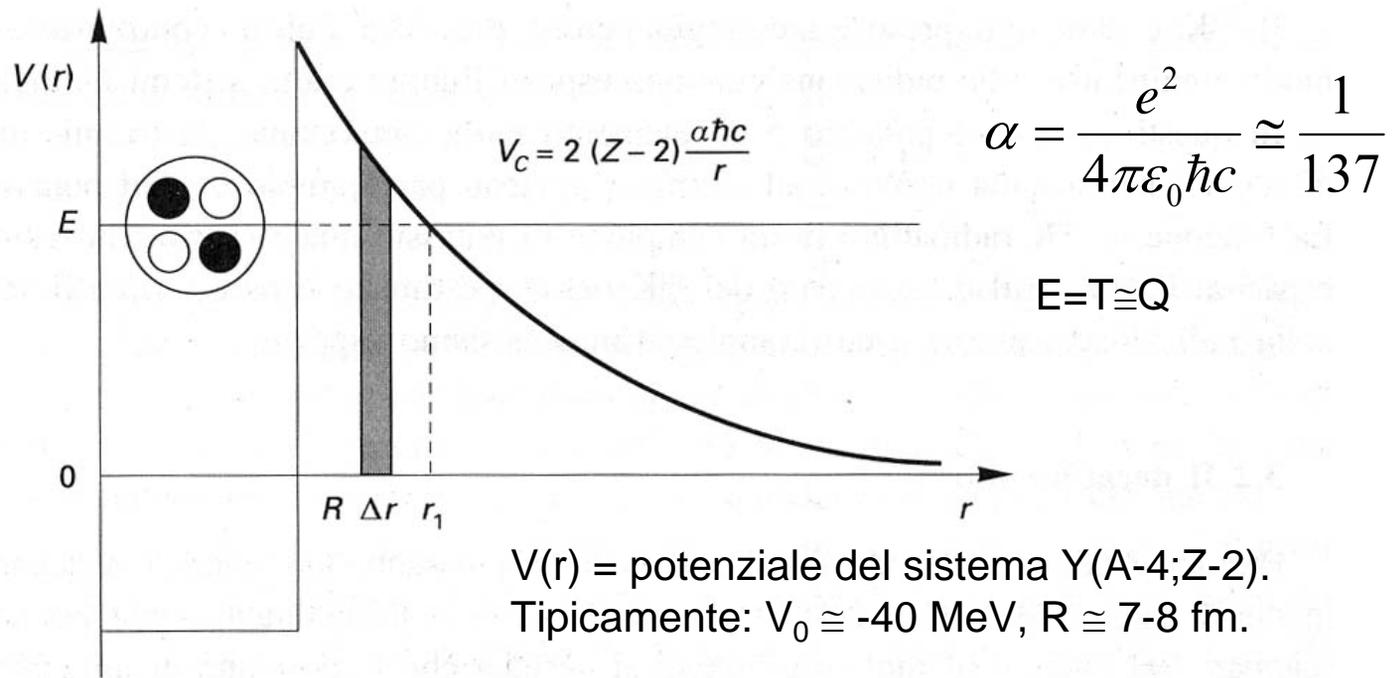
# Decadimento $\alpha$

- ◆ La particella  $\alpha$  ha un Q-value positivo. Lo stesso NON avviene per l'emissione di singoli nucleoni od altri nuclei leggeri per i quali il decadimento non è energeticamente possibile.
- ◆ Riportiamo nella tabella che segue il Q-value per il decadimento del ( $^{238}_{94}\text{Pu}$ ) in alcuni nuclei leggeri:

Nucleo	Q-value (MeV)
p	-6.0
$^2\text{H}$	-10.3
$^3\text{H}$	-9.7
$^4\text{He}$	+5.6
$^6\text{Li}$	-3.8



# Decadimento $\alpha$



**Figura 3.5**  
 L'energia potenziale di una particella  $\alpha$  in funzione della distanza dal centro del nucleo. La probabilità che essa passi attraverso la barriera coulombiana per effetto "tunnel", può essere calcolata come la sequenza di processi di perforazione di barriere di potenziale sottili di spessore  $\Delta r$  (vedi fig. 3.6).

## ◆ Probabilità' di Trasmissione

$$T = e^{-2 \times G}$$

◆ **G e' il fattore di Gamov ( $\cong 30-50$ )**

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m(E-V)} dr \cong \frac{2\pi(Z-2)\alpha}{\beta}$$

$$G \propto \frac{Z}{\beta} \propto \frac{Z}{\sqrt{E}}$$

$$\lambda = w_\alpha \times \frac{v_0}{2R} \times e^{-2 \times G} = \text{Prob. di Effetto Tunnel}$$

◆ prob. che  $\alpha$  sia preformata nel nucleo

◆ Collisioni nell'unita' di tempo

◆ Prob. di Trasmissione

# La Struttura dei Nuclei

## 1) Modello a goccia

◆ Si trova che  $B/A$  e' ~ costante. Se l' interazione fosse forte con TUTTI I nucleoni del nucleo, avremmo che il numero di legami attrattivi deve essere uguale a  $A(A-1)/2$ . Quindi, per  $A \gg 1$ ,  $B \propto A^2$  e ne segue che  $B/A \propto A$  e NON costante come dato dalle misure. Abbiamo un fenomeno di  **saturazione delle forze nucleari** : interazione solo con I primi vicini.

◆ E' una situazione analoga a quella del legame chimico di una goccia di idrogeno liquido: forte legame OMOPOLARE tra coppie di atomi con formazione di  $H_2$ . Un terzo atomo NON e' attratto: molecola di  $H_2$ : satura. Questo e' dovuto alla forza di scambio: scambio degli elettroni tra I due atomi della molecola.

◆ Densita'  $\rho = \text{costante}$   $\rightarrow$  ad un certo punto deve intervenire una forza REPULSIVA altrimenti c'e' il collasso. Nella molecola la forza repulsiva e' data dalla sovrapposizione degli orbitali elettronici pieni.

## 2) Modello a gas di Fermi

◆ E' un modello statistico a particelle indipendenti, che fornisce indicazioni sulla densita'  $\rho$  e sulla energia cinetica  $T$ , con le seguenti ipotesi:

i)  $Z$  protoni e  $(A-Z)$  neutroni di spin  $1/2$ ;

ii) il singolo nucleone e' soggetto alla interazione con TUTTI gli altri. Questa interazione e' rappresentata da un potenziale  $V(r)$  a simmetria sferica fino a  $r=R_0 A^{1/3}$ ;

iii) il gas e' degenere: I nucleoni occupano gli stati ad energie piu' basse. 36

# Struttura dei Nuclei

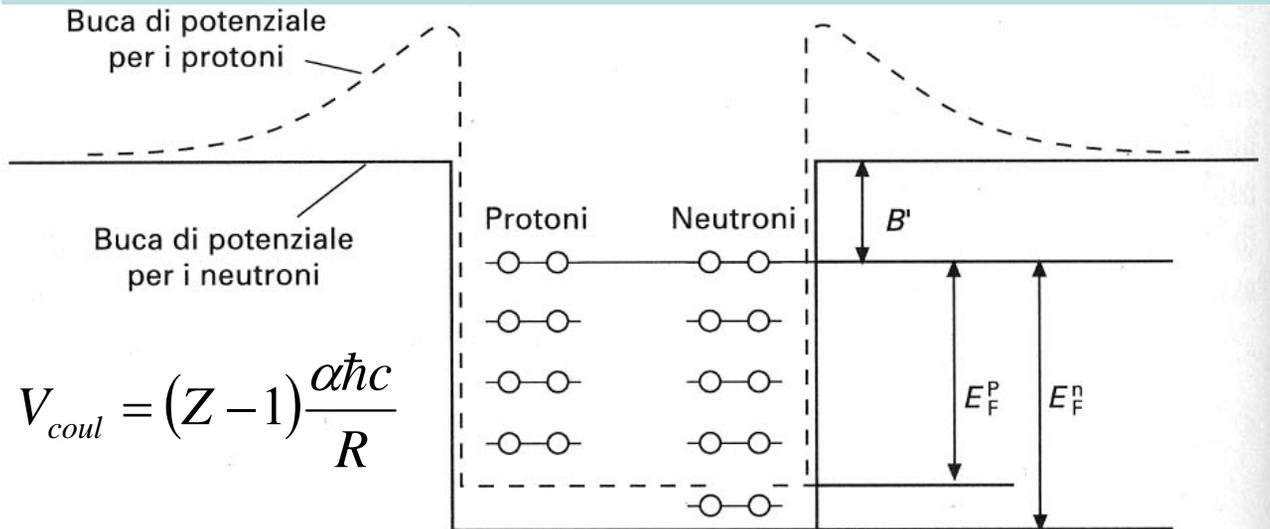


Figura 17.1

Diagramma dei potenziali e degli stati di protoni e neutroni nell'ambito del modello a gas di Fermi.

◆ Il numero di stati accessibili per un nucleone allo zero assoluto, ossia quando il nucleo è nel suo stato fondamentale, saranno tutti gli stati occupati fino ad un certo impulso massimo  $p_F$ : **impulso di fermi**, in un volume  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \times A$

$$dn = \frac{4\pi \times p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3}; n = \int_0^{p_F} dn = \frac{V \times p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}; \quad \blacklozenge N = 2n; N = 2p$$

$$\blacklozenge p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \cong 250 \text{ MeV} / c \quad (\text{questo per } Z=N=A/2)$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \cong 33 \text{ MeV}$$

$$V_0 = E_F + B' \cong 40 \text{ MeV}$$

$$\blacklozenge \langle T \rangle = \frac{\int_0^{p_F} T p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp}$$

◆ Il modello **NON** è adeguato per nuclei leggeri.

◆  $V_0^n > V_0^p \rightarrow$  ci sono più neutroni

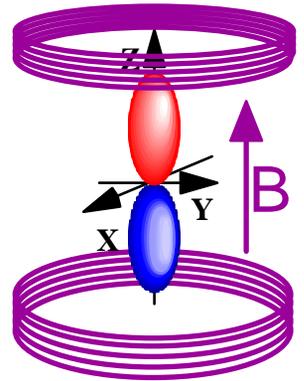
◆ Deve però essere  $E_F^p \cong E_F^n$  altrimenti avremmo decadimento  $\beta$ .

## 3) Modello a guscio

- ◆ Modello a particelle indipendenti costruito in analogia con quello atomico: in un campo di potenziale medio dovuto a tutti gli altri nucleoni;
- ◆ Questo e' suggerito dall'esistenza di livelli di energia discreti all'interno del nucleo: I picchi di energia di legame.
- ◆ Dai Numeri Magici: 2,8,20,28,50,82,126:
  - a) hanno molti isotopi e/o isotoni;
  - b) energia di legame molto piu' alta di quella del vicino:  
gas nobili
  - c) metalli alcalini: un solo nucleone di valenza;
  - d) come visto : tutto accentuato per I nuclei doppiamente magici
  - e) Momenti di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico  
NULLI per gusci chiusi;
  - f) forte accoppiamento spin-orbita Nucleare con  $V_{is}$  negativo.
- ◆ Spiega I momenti angolari nucleari,

# Symmetry breaking

- Breaking degeneracy



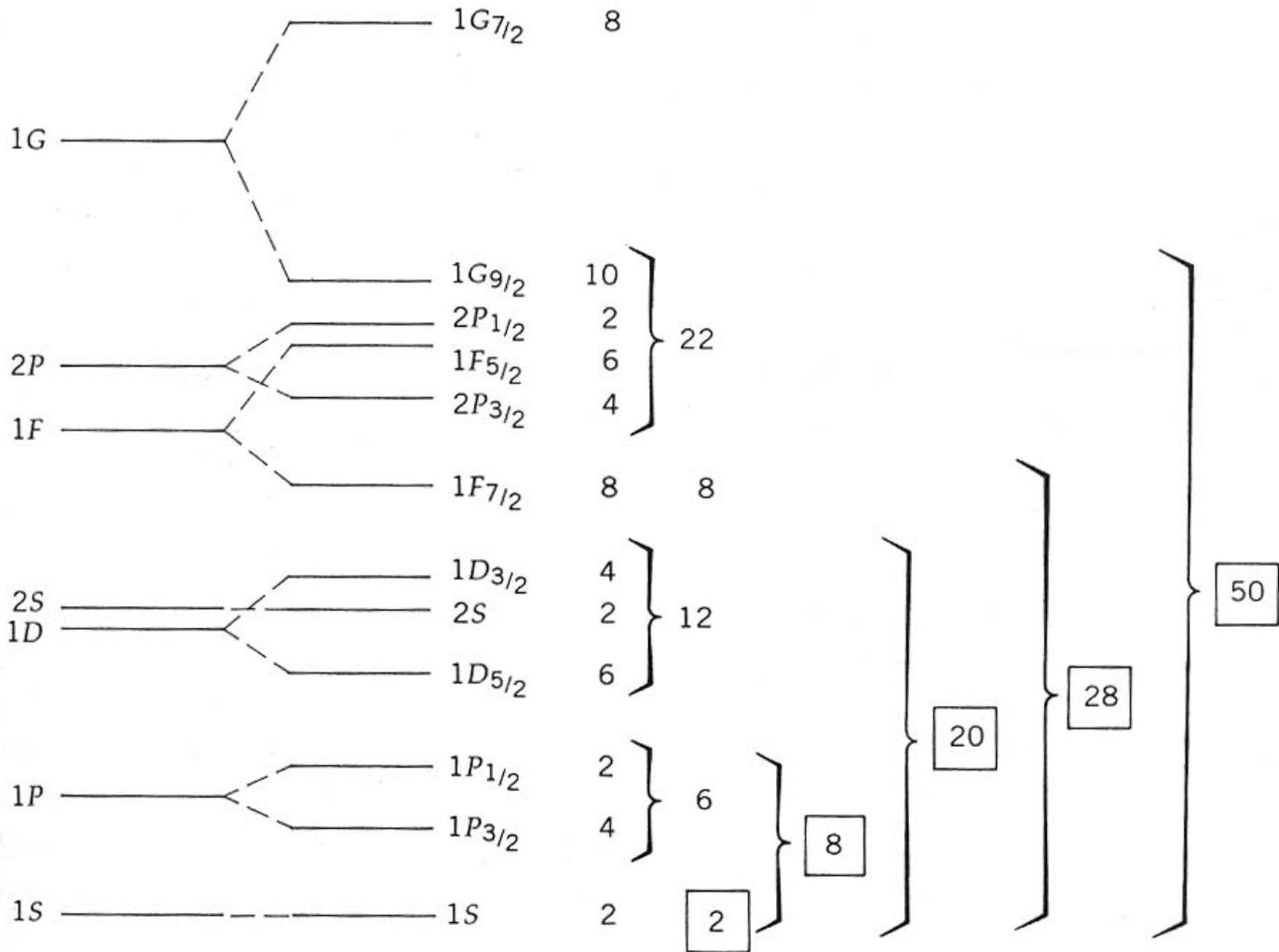
$B \neq 0$



$B = 0$



# Modello a guscio: livelli di energia



**Figure 3.4** Energy levels in a single-particle shell model. The boxed integers correspond to the magic nuclear numbers.

# Momenti magnetici anomali

◆ Il magnetismo nucleare e' generato dai momenti magnetici intrinseci dei singoli nucleoni e dai momenti magnetici associati ai loro moti orbitali.

◆ Il momento magnetico di una particella carica di spin  $\frac{1}{2}$  che NON possiede una struttura interna ( Particella di Dirac ) e' dato da

$$\mu = g \times \frac{e}{2M} \times \frac{\hbar}{2}$$

dove M e' la massa della particella ed il fattore g deriva dalla equazione relativistica di Dirac.

Per particelle di Dirac cariche il fattore g deve essere esattamente uguale a 2 mentre per quelle neutre deve essere uguale a 0. Sperimentalmente, a parte correzioni di ordine superiore, per gli elettroni e I muoni si trova  $g=2$ .

Per I protoni e I neutroni si trova:

$$\mu_p = + ( 2.7928456 \pm 0.0000011 ) \mu_N$$

$$\mu_n = + ( 1.9130418 \pm 0.0000088 ) \mu_N$$

$$\text{dove } \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} \left( \frac{MeV}{T} \right)$$

◆ I nucleoni NON sono quindi particelle di Dirac. Come vedremo sono "composti" da quark ed i loro fattori g sono determinati dalla loro struttura INTERNA.

◆ I valori dello spin e dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei sono determinati dai "nucleoni di valenza".

◆ In particolare tutti I nuclei con Z ed N pari hanno spin nullo.