Capitolo 3: Cinematica Relativistica ed Unita’ di Misura

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare I

Professor Carlo Dionisi

A.A. 2004-2005

RICHIAMI DI RELATIVITA' RISTRETTA

PRINCIPIO DI RELATIVITA'

- Le leggi della Fisica sono le stesse in ogni riferimento inerziale;
- La velocità della luce nel vuoto, c, è la stessa in ogni riferimento inerziale;
- La velocita' della luce nel vuoto, c, e' insuperabile (principio di causalita')
- Il tempo non è un invariante;
- La relatività di Galileo e le leggi della meccanica sono valide per v/c<<1;
- Le leggi di trasformazione dello spazio-tempo che soddisfano il Principio di Relatività di Einstein sono le **TRASFORMAZIONI DI LORENTZ**.

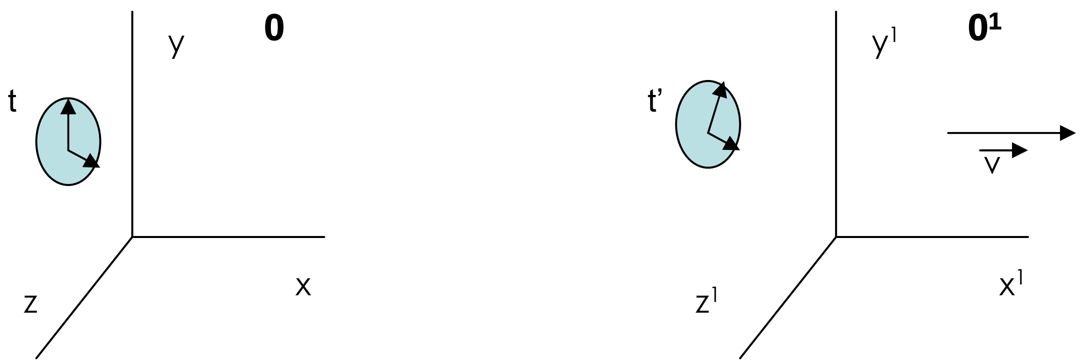


Fig. 1 : due riferimenti inerziali in moto relativo

Sia:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ed O' in moto con velocita' $\vec{v}$ rispetto ad O.

Definendo il quadrivettore posizione: $x \equiv (ct;\vec{x})$,

la Trasformazione di Lorentz L(β) trasforma

$x \equiv (ct;\vec{x})$ in $x' \equiv (ct';\vec{x}')$ come dato da:

$$x' = L(\beta)x$$

Dove I coefficienti di L(β) sono:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma x \\ -\beta\gamma ct + \gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Dove det(L) = $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$.

L è una rotazione nello spazio-tempo.

La **Trasformazione inversa:** $x = L^{-1}(\beta)x' = L(-\beta)x'$ **e' definita da:**

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' + \beta\gamma x' \\ \beta\gamma ct' + \gamma x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Se v<<c, approssimazione non relativistica,

$$\beta << 1\ ;\ \gamma = 1 + \frac{\beta^2}{2} + ...$$

Al primo ordine in β si ottiene:

$$x' = (1 + \frac{\beta^2}{2})x - \beta(1 + \frac{\beta^2}{2})ct = x - \mathrm{v}t$$

$$t' = -\frac{\beta}{c}(1 + \frac{\beta^2}{2})x + (1 + \frac{\beta^2}{2})t \cong t - \frac{\beta^2 x}{\mathrm{v}} \cong t$$

CONSEGUENZE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

1) Contrazione delle Distanze

Sia $d' = x'_2 - x'_1$ la distanza misurata in O' di una sbarra a riposo in O'. Avremo:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma c(t_2 - t_1)$$

Ma l'osservatore O misura le posizioni x_2 e x_1 simultaneamente, cioè allo stesso istante $t_2 = t_1$. Quindi:

$$d' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma d$$

$$d = \frac{d'}{\gamma} \rightarrow d < d'$$

2) Dilatazione degli intervalli di tempo

Sia $T' = t'_2 - t'_1$ l' intervallo tra due istanti misurati in O' nello stesso punto $x'_2 = x'_1$. L' osservatore O misura:

$$c \cdot T = c(t_2 - t_1) = \gamma \cdot c(t'_2 - t'_1) + \beta \cdot \gamma (x'_2 - x'_1) =$$

$$= \gamma \cdot c(t'_2 - t'_1) = \gamma \cdot c \cdot T'$$

$$T = \gamma \cdot T' \qquad \Rightarrow \qquad T > T'$$

L' intervallo di tempo misurato nel sistema di quiete e' chiamato " intervallo di tempo proprio ".

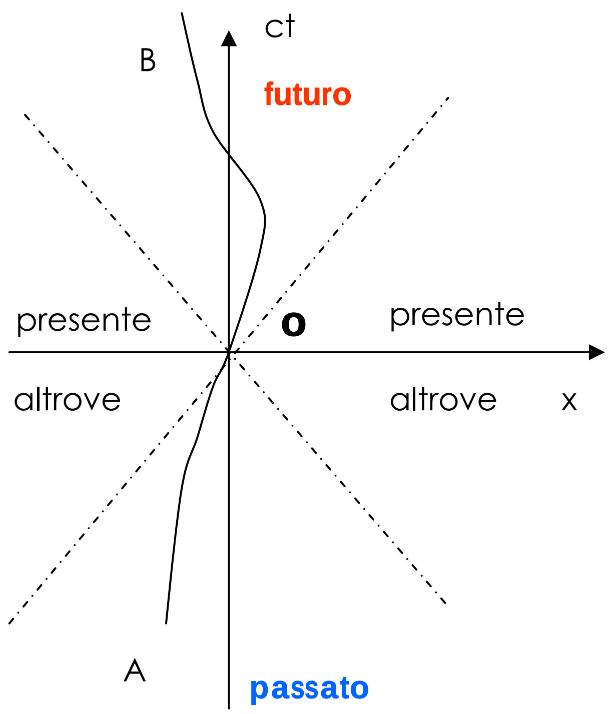
3) L' invariante relativistico ds²

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ e' un invariante relativistico

Nel caso in cui in O' la misura venga fatta nello stesso punto avremo: $ds^2 = c^2dt'^2$.

Definiamo l' ipercono: $c^2t^2 - \vec{x}^2 = 0$

$x = \pm\ ct$ e' definito : cono di luce.



CONO DI LUCE E TEMPO PROPRIO

Vogliamo sottolineare le conseguenze della divisione dello spazio-tempo nelle regioni:

a) **passato-futuro** (all'interno del cono di luce)
b) **altrove** (esterna al cono di luce)

Consideriamo la **"distanza invariante"** o **"intervallo"** S_{12} tra due eventi P_1 $(x_1; t_1)$ e P_2 $(x_2; t_2)$ nello spazio tempo.
Avremo:

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\ x_1 - x_2\ |^2$$

Dati P_1 e P_2 arbitrari ci sono tre possibilità:

1) Se $S_{12}^2 > 0$ si dice che i due eventi hanno una **separazione di TIPO TEMPO** : cioè è sempre possibile trovare una trasformazione di Lorentz (TdL) ad un nuovo sistema di riferimento O' tale che:

Quindi $S_{12}^2 = c^2(t_1^{'} - t_2^{'}) > 0$

P_1 e P_2 coincidono spazialmente, ma sono separati nel tempo.

2) Se invece $S_{12}^2 < 0$ si dice che i due eventi hanno una **separazione di TIPO SPAZIO** : e' cioe' possibile trovare un sistema di riferimento inerziale O'' in cui $t_1'' = t_2''$ da cui:

$$S_{12}^2 = -\left|x_1^{''} - x_2^{''}\ ^2\right| < 0$$

In O'' i due eventi si verificano in punti dello spazio separati, ma nello stesso tempo.

Esercizio sulla dilatazione relativistica del tempo

Nei laboratori fasci di particelle di vita media τ nota, vengono trasportati, prima di decadere, su distanze molte volte superiori al limite Galileiano della distanza di decadimento : **$c\tau$.**

Per esempio π carichi con impulsi di 200 GeV/c vengono prodotti, ad una targhetta primaria, e trasportati su distanze, per esempio, di 300 m con una perdita dovuta ai decadimenti inferiore al 3%.

Con una vita media τ **=** 2.56 10^{-8} sec, la distanza media di decadimento Galileiano sarebbe $c\tau$ = 7.7 m e quindi solo la frazione $e^{-300/7.7} \cong 10^{-17}$ dei pioni prodotti potrebbe sopravvivere a 300 metri di distanza.

MA

$$\gamma = \frac{E}{m_\pi c^2} = \frac{\sqrt{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2}}{m_\pi c^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_\pi^2 c^2}} \cong \frac{p}{m_\pi c} = 1429$$

Per cui d =$\beta\gamma c\tau$ = 11000 m = 11 km

Richiami sui quadrivettori

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad x^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} x_{\nu}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

$$x^{\mu} \equiv (ct; \vec{r}) \quad ; \quad x_{\mu} \equiv (ct; -\vec{r})$$

$$dx^{\mu} \cdot dx_{\mu} = ds^2$$

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \Longrightarrow \begin{cases} u^{\mu} \equiv (\gamma; \gamma\vec{\beta}) \\ u^{\mu} u_{\mu} = 1 \end{cases}$$

DAL PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

$$\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\vec{F} \perp \vec{v}} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\vec{F} \parallel \vec{v}} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nel Formalismo Quadridimensionale

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \longrightarrow \begin{cases} p_\mu \equiv \left(\frac{E}{c}; -\vec{p}\right) \\ p_\mu \equiv \left(\frac{E}{c}; \vec{p}\right) \end{cases}$$

$$p^\mu = m_0 c u^\mu \longrightarrow p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

Ricaviamo di conseguenza:

$$i)\ \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \qquad ii)\ E = \gamma m_0 c^2 \qquad iii)\ \vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}$$

$$iv)\ \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \qquad v)\ \gamma\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m_0} \qquad vi)\ \vec{\beta} = c\frac{\vec{p}}{E}$$

$$vii)\ \gamma\vec{\beta} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\vec{p}}{m_0} \qquad viii)\ T = m_0 c^2(\gamma - 1)$$

$$ix)\ E = T + m_0 c^2 = m_0 c^2(\gamma - 1) + m_0 c^2$$

$$E = m_0 c^2 \gamma$$

Esercizio: ricaviamo la relazione tra energia totale ed energia cinetica di una particella

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; Teorema delle forze vive:

$$dT = Fdx = \frac{dp}{dt}dx = c\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}dp = c\frac{\text{v}}{c}dp$$

$$= \beta c dp = \beta c d(\gamma m_0 \frac{c}{c}\text{v}) = \beta c^2 d(\gamma m_0 \beta)$$

$$= \beta c^2 d(\beta m)$$

dove $m = m_0\gamma$

$$= \beta c^2 (\beta dm + m d\beta) =$$

ma: $dm = m_0 d\gamma = m_0 d(1-\beta^2)^{-1/2} =$

$$= \frac{1}{2}m_0(1-\beta^2)^{-3/2} 2\beta d\beta$$

$$= m_0\gamma^3 \beta d\beta = m\gamma^2 \beta d\beta$$

$$dm = m\gamma^2 \beta d\beta$$

inoltre: $\gamma\left[1+\gamma^2\beta^2\right] = \gamma\left[1+\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}\right] = \gamma\gamma^2 = \gamma^3$

Ne segue che:

$$dT = \beta c^2\left[\beta m\gamma^2\beta d\beta + m d\beta\right] = \beta c^2\left[m d\beta\left(\beta^2\gamma^2+1\right)\right] =$$

$$= c^2\left(\beta m d\beta \gamma^2\right) = c^2 m_0 \beta d\beta \gamma^3 = c^2 m_0 \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}\beta d\beta$$

$$T = \int dT = \frac{m_0 c^2}{2}\int\left(1-\beta^2\right)^{-3/2} d\beta^2 = -\frac{m_0}{2}c^2\frac{\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= m_0 c^2\gamma + Cost \quad T(\beta=0)=0 \rightarrow Cost = -m_0 c$$

$$T = m_0 c^2\gamma - m_0 c^2 = m_0 c^2(\gamma-1); \qquad E = T + m_0 c^2$$

$$E = m_0 c^2 \gamma = m_0\frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Sistemi di riferimento

♦ Sistema del Laboratorio

E' quello in cui la particella targhetta e' inizialmente in quiete:

Lab: $p_1=(E_1;\mathbf{p}_1)$; $p_2(M;\mathbf{0})$;

$P_{tot} = (E_1+M;\mathbf{p}_1)$

♦ Sistema del Centro di Massa

e' quello definito dalla condizione :

CdM = $\sum_k \vec{p}_k = \vec{P}_{Tot} = \vec{0}$

$p_1^*=(E_1^*;\mathbf{p}^*)$; $p_2^*=(E_2^*;-\mathbf{p}^*)$; $P^*=(E^*;\mathbf{0})$

dove $E^* = E_1^* + E_2^*$

$P^{*2}_{CdM} = E^{*2} = P_{LAB}^2 = m_1^2 + M^2 + 2E_1M$

Massa Invariante

- Consideriamo un sistema di N particelle.

$$p_k^{\mu} = \left(E_k ; \vec{p}_k\right) \quad ; \quad P^{\mu} = \sum_k p_k^{\mu} = \left(\sum_k E_k ; \sum_k \vec{p}_k\right)$$

$$P^{\mu}P_{\mu} = \text{ Invariante Relativistico}$$

$$P^{\mu}P_{\mu} = \text{ Massa Invariante del sistema di N particelle}$$

$$P^{\mu}P_{\mu} = \left(E_1 + E_2 + ... + E_N\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N\right)^2$$

- Nel Centro di Massa del sistema abbiamo per definizione:

$$\vec{P}^{*}_{Tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{\mu *} = \left(E^{*}_{Tot} ; \vec{0}\right)$$

$$\boxed{\text{Massa Invariante} = P^{\mu}P_{\mu} = E^{*2}_{\text{Tot}}}$$

- <u>Esercizio</u>: consideriamo l' urto di due particelle m_1 e m_2

i) Collisione a targhetta fissa :

- Calcoliamo la massa invariante del sistema delle due particelle nel riferimento del Laboratorio dove $p_2 = 0$, nella ipotesi che $E_1 \gg m_1, m_2$:

$$P^{\mu}P_{\mu} = \Big|_{Nel\ Lab.} \left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 =$$

$$= m_1^2 + p_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1 - p_1^2 \simeq 2m_2E_1$$

- Nel centro di massa abbiamo $P^{\mu}P_{\mu} = s$ da cui :

$$s = 2m_2E_1$$

$\Longrightarrow$ **Facciamo l' esempio di un fascio di protoni da 100 GeV che urta una targhetta di idrogeno, protoni a riposo:**

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2} \approx \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 1} \approx 14 \text{ GeV}$$

ii) Esperimento ai collider p-p :

nella ipotesi che $E_1 >> m_1, m_2$ avremo $|p_{1,2}| = |p| \approx E_{1,2}$.
Ora avremo due protoni che collidono frontalmente :

$$\overrightarrow{\quad\quad} \qquad\qquad \overleftarrow{\quad\quad}$$
$$\mathbf{p}_1^{\mu}(E_1, \vec{\mathbf{p}}_1) \qquad \mathbf{p}_2^{\mu}(E_2, \vec{\mathbf{p}}_2)$$

La grandezza invariante $s = (p_1^{\mu} + p_2^{\mu})(p_{1\mu} + p_{2\mu})$

$$s = (p_1^{\mu} p_{1\mu} + p_2^{\mu} p_{2\mu} + 2 p_1^{\mu} p_{2\mu})$$

$$= E_1^2 - |\vec{p}_1|^2 + E_2^2 - |\vec{p}_2|^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \cos\theta)$$

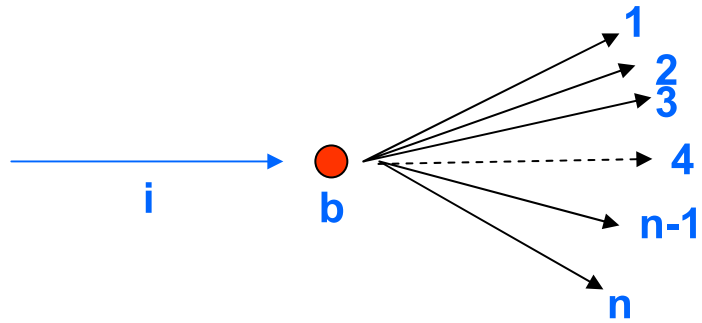
nella ipotesi che $E_1 >> m_1, m_2$ avremo $|p_{1,2}| = |p| \approx E_{1,2}$.

$$s = 2(E^2 - E^2 \cos\theta)$$
$$s = 4E^2$$
$$\sqrt{s} = 2E \qquad\qquad \sqrt{s} = 2 \cdot 100 = 200 \text{ GeV}$$

Mentre in un esperimento a targhetta fissa la gran parte della energia del protone e' "sprecata" per fornire impulso al centro di massa del sistema INVECE di renderla disponibile per la interazione, in un esperimento al collider $\sqrt{s}$ e' l' energia nel sistema di riferimento a impulso totale nullo : e' quindi la quantita' di energia disponibile per l' interazione.
E' quindi la massima energia/massa per una particella prodotta dalla annichilazione protone-protone !

Energia di Soglia di una Reazione

- **In generale in un urto avremo la produzione di N particelle che nel laboratorio possiamo rappresentare come:**



Definiamo ENERGIA di SOGLIA quella in corrispondenza della quale nel Centro di Massa le particelle dello stato finale SONO PRODOTTE FERME. Avremo quindi per lo stato finale:

$$E^{*2} = \left[\sum_{1}^{N}{}_{f}\left(T_f^{*} + m_f\right)\right]^2 \geq \left[\sum{}_{f} m_f\right]^2$$

Per lo stato iniziale avremo invece:

$$E^{*2} = \left(E_i + m_b\right)^2 - \left(p\right)_i^2 = 2m_b E_i + m_i^2 + m_b^2 =$$

$$= 2\mathrm{m_b}\left(T_i + m_i\right) + m_i^2 + m_b^2 = 2\mathrm{m_b} T_i + \left(m_i + m_b\right)^2$$

$$\boxed{T_i \geq T_{soglia} = \frac{\left(\sum_f m_f\right)^2 - \left(m_i + m_b\right)^2}{2m_b}}$$

$T_{soglia} > 0$ $\rightarrow$ **C'e' una soglia.**

$T_{soglia} < 0$ $\rightarrow$ **NON c'e' una soglia**

Esercizi sulle soglie di una Reazione

- Come vedremo, **l'antiprotone è stato scoperto in urti protone-nucleone**. Con un bersaglio di idrogeno abbiamo praticamente un protone LIBERO di massa $m_p = 0.939$ GeV.
  La reazione è: $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$

  L'Energia di soglia:

$$T_s = \frac{\left[(4m_p)^2 - (2m_p)^2\right]}{2m_p} = 6m_p = 5.6 \text{ GeV}$$

- Se consideriamo anche il legame del protone in un nucleo di rame, è la targhetta usata, p_{FERMI} e' circa uguale a 0.24GeV e diretto in modo casuale rispetto alla direzione del proiettile incidente.
  Il valore massimo (minimo) di Ts lo avremo con $\vec{p}_{Fermi}$ parallelo (antiparallelo) al $\vec{p}_{protone}$

$$E_F = \sqrt{p_F^2 + m_p^2} \quad ; \quad \mathrm{p_{Lab}} = \left(E_p + E_F ; \vec{p}_p + \vec{p}_F\right)$$

$$p_{Lab}^2 = 2m_p^2 + 2E_pE_F - 2\vec{p}_p \bullet \vec{p}_F =$$

$$= 2\left(m_p^2 + E_pE_F \pm p_pp_F\right) \geq 16m_p^2$$

$$m_p^2 + E_pE_F \pm p_pp_F \geq 8m_p^2 \quad \text{da cui} \quad E_pE_F \pm p_pp_F \geq 7m_p^2$$

$$\text{Approssimando } \mathrm{E_F} = m_p + \frac{p_F^2}{2m_p} \text{ e } \mathrm{p_p} \cong E_p \text{ otteniamo:}$$

$$E_pE_F \pm p_pp_F = E_p\left(m_p \pm p_F + \frac{p_F^2}{2m_p}\right) \geq 7m_p^2$$

Avremo quindi :

$$E_p \geq \frac{7m_p}{1 \pm \frac{p_F}{m_p} + \frac{p_F^2}{2m_p^2}} \quad ; \quad \mathrm{E_p} = T + m_p$$

$$T_{Min} = 4.2 \text{ GeV} \quad ; \quad \mathrm{T_{Max}} = 7.5 \text{ GeV}$$

Esercizi sulle soglie di una Reazione

Esperimento con un bersaglio di atomi di idrogeno, fisso nel laboratorio, contro il quale va ad urtare fascio di antiprotoni incidenti di impulso p = 0.65 GeV/c.
Calcolare la soglia della reazione :

$$\overline{p} + p \rightarrow \Lambda + \overline{\Lambda} \quad \text{con } \left|\vec{\mathrm{p}}_{\overline{\mathrm{p}}}\right| = 0.65 \text{ GeV/c}$$

Ricordiamo inoltre che $\mathrm{m}_{\Lambda} = \mathrm{m}_{\overline{\Lambda}} = 1.116 \text{ GeV/c}^2$

Avremo : $\mathrm{E}^2_{\mathrm{Lab}} = m^2_{\overline{p}} + m^2_p + 2m_p\sqrt{m^2_{\overline{p}} + p^2_{\overline{p}}} = 3.90 \text{ GeV}^2$

$$\mathrm{E}^{*2} = \left(m_{\Lambda} + m_{\overline{\Lambda}}\right)^2 = \left(2 \cdot 1.1116\right)^2 = 4.98 \text{ GeV}^2$$

Quindi per $\left(\mathrm{p}_{\overline{\mathrm{p}}}\right)_{Lab} \leq 0.65$ GeV/c la reazione

non puo' avvenire:

$$\overline{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \neq > \Lambda + \overline{\Lambda}$$

Esercizi sulle soglie di una Reazione

- Calcolare la soglia di:

$$\gamma + N \rightarrow e^{+} + e^{-} + N$$

Dove m_γ=0 ; il nucleano ha massa M e l' elettrone ed il positrone hanno massa m_e.

$$T_S = \frac{(2m_e + M)^2 - M^2}{2M} \approx 2m_e(1 + \frac{m_e}{M}) \approx 2\mathrm{m_e}$$

- Calcolare l'energia di soglia della reazione:

$$\pi^- + p \rightarrow \wedge^0 + k^0$$

$$m_{\pi^-} = 0.140 GeV/c^2; m_p = 0.938 GeV/c^2$$

$$m_{\wedge^0} = 1.116 GeV/c^2; m_{k^0} = 0.494 GeV/c^2$$

$$P^2_{LAB(stato\_iniziale)} = m^2_{\pi^-} + m^2_p + 2E_\pi m_p$$

$$P^2_{c.d.m.(stato\_finale)} = (m_{\wedge^0} + m_{k^0})^2$$

$$E_{soglia} = \frac{\left[(m_{\wedge^0} + m_{k^0})^2 - m^2_\pi - m^2_p\right]}{2m_p} = 0.9 GeV$$

Esercizi sulle soglie di una Reazione

1) Calcolare l'energia di soglia di:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$

$$P^2_{LAB(stato\_iniziale)} = m_e^2 + 2E_\nu m_e$$

$$P^2_{c.d.m.\_\min(stato\_finale)} = m_\mu^2 \rightarrow E_{soglia} = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_e} = 11 GeV$$

N.B: m_μ=0.106 GeV/c2 ; m_e = 0.51 MeV/c2 ; $m_\nu \cong 0$

2) Calcolare l'energia di soglia di:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

a) Targhetta Fissa:

$$P^2_{LAB(stato\_iniziale)} = 2m_e^2 + 2E\, m_e$$

$$P^2_{c.d.m.\_\min(stato\_finale)} = (2m_\mu)^2$$

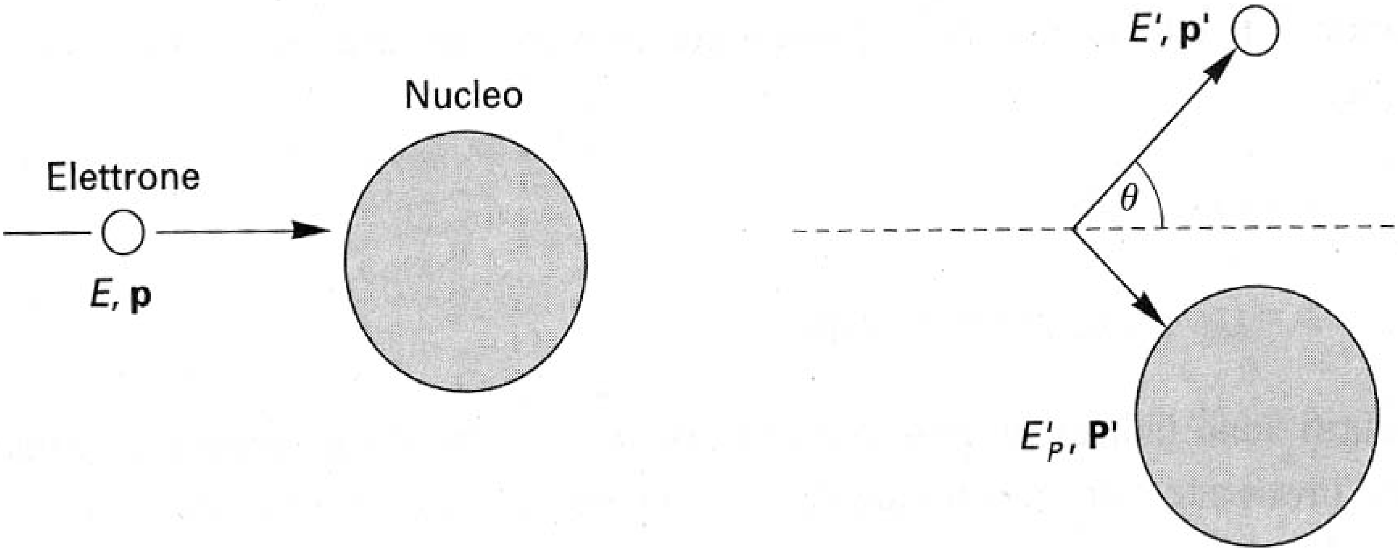
$$E_{soglia} = \frac{2m_\mu^2 - m_e^2}{m_e} \approx \frac{2m_\mu^2}{m_e} = 44\, GeV$$

b) Collisione e^+e^- :

$$E^{*2} = P^2_{c.d.m.(stato\_iniziale)} = (2E_e)^2$$

$$2E^{beam}_{soglia} = 2m_\mu \qquad E^{beam}_{soglia} = m_\mu = 0.106\, GeV$$

Scattering Elastico



- Dalla conservazione dell' energia e dell' impulso:

  $p+P = p'+P'$ dove: $p=(E/c;\mathbf{p})$, $p'=(E'/c;\mathbf{p'})$,

  $P=(mc;\mathbf{0})$, $P'=(E'/c;\mathbf{P'})$

  $p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2$

- L' urto e' elastico per cui:

  $p^2=p'^2=m_e^2c^2$; $P^2=P'^2=Mc^2$ per cui : $pP = p'P'$

- Sperimentalmente riveliamo l' elettrone diffuso:

  $pP = p'(p+P-p') = p'p + p'P - m_e^2c^2$

  da cui moltiplicando a destra e sinistra per c^2

  $EMc^2 = E'E - \mathbf{pp'}c^2 + E'Mc^2 - m_e^2c^4$

- Per energie elevate si trascura $m_e^2c^4$ ed $E \cong pc$

  $EMc^2 = EE' (1-\cos\theta) + E'Mc^2$

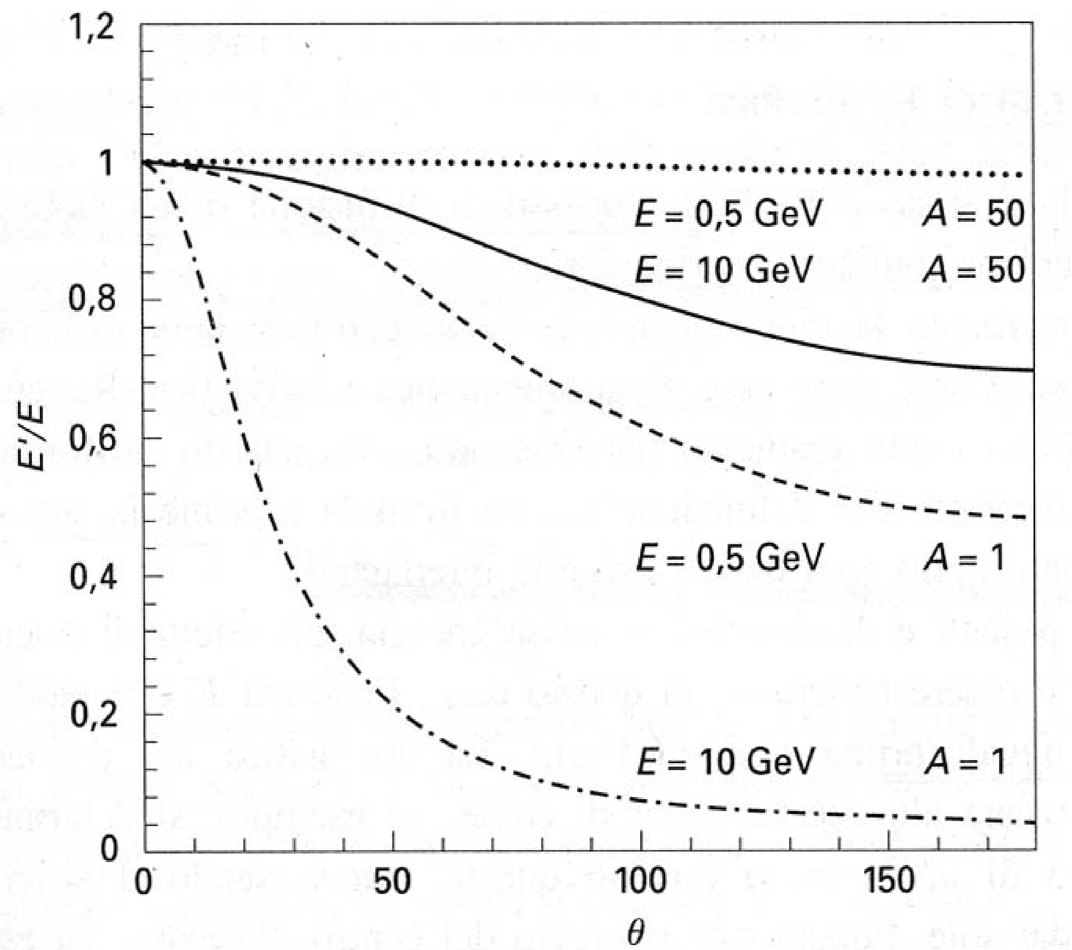
Scattering Elastico

- **Avremo quindi:**

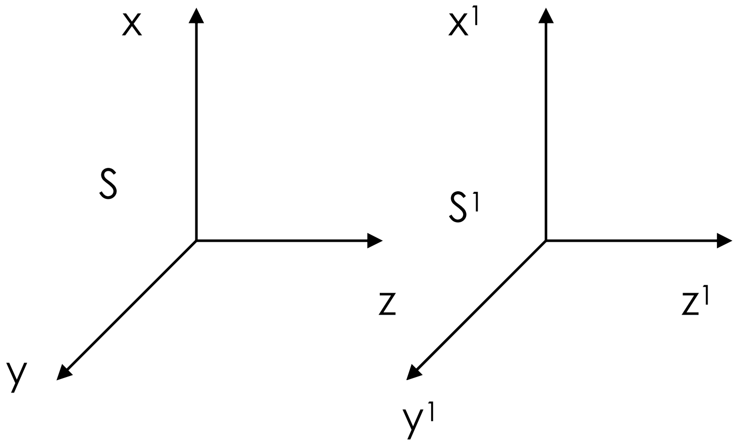
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos\vartheta)}$$

Dove θ e' l' angolo di diffusione. Quindi nel caso di urti elestici esiste una dipendenza univoca tra θ ed E'.

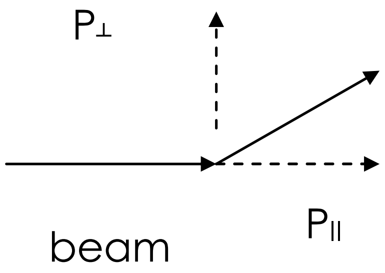
Questo NON e' piu' vero nel caso di urti anelastici. L' energia di rinculo del bersaglio e' legata al termine E/Mc^2



Ancora sulle Trasformazioni di Lorentz



$$\begin{cases} P_x = P_{x^1} ; P_y = P_{y^1} \\ P_z = \gamma\left[P_{z^1} + \beta E^1\right] \\ E = \gamma\left[\beta P_{z^1} + E^1\right] \end{cases}$$

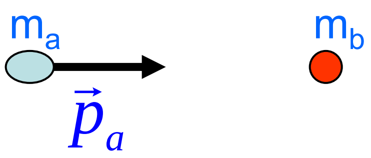


$$\begin{pmatrix} E \\ P_{II} \\ P_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{I} \\ E^{I}_{II} \\ E^{I}_{\perp} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{I} \\ P^{I}_x \\ P^{I}_y \\ P^{I}_z \end{pmatrix}$$

Esercizi sui Sistemi di Riferimento

Nel Lab :



Nel C d M :

$$\vec{P}^{*}_{Tot} = 0$$

Avremo:

$$s = \left(E_a + E_b\right)^2 - p_a^2 = m_a^2 + p_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b - p_a^2 =$$

$$= m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b$$

- **Calcoliamo il β del Centro di Massa :**

$$P^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} E_a + m_b \\ \vec{p}_a \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{*} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E_a} + m_b \\ 0 \\ 0 \\ p_a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{CdM} & 0 & 0 & \beta_{CdM}\gamma_{CdM} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{CdM}\gamma_{CdM} & 0 & 0 & \gamma_{CdM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_a + m_b = \gamma_{CdM}\sqrt{s} \quad \text{e} \quad \mathrm{p_a} = \beta_{CdM}\gamma_{CdM}\sqrt{s}$$

Ricaviamo quindi :

$$\beta_{CdM} = \frac{\mathrm{p_a}}{\gamma_{CdM}\sqrt{s}} \quad \text{e} \quad \gamma_{CdM} = \frac{E_a + m_b}{\sqrt{s}}$$

Otteniamo infine : $\beta_{\mathrm{CdM}} = \dfrac{p_a}{\dfrac{\left(E_a + m_b\right)}{\sqrt{s}}\sqrt{s}} = \dfrac{p_a}{\left(E_a + m_b\right)}$

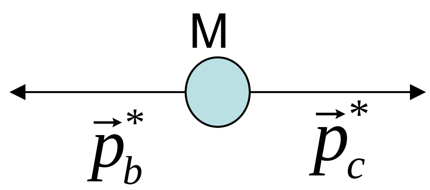
Decadimenti

- Si consideri il decadimento

  a → b + c

  con M_a,m_b ed m_c le masse delle tre particelle. Nel riferimento del centro di massa a e' in quiete e la conservazione del quadri impulso e' data dalle equazioni:

  $M_a = E_b^* + E_c^*$



$$\vec{0} = \vec{p}_b^{\,*} + \vec{p}_c^{\,*}$$

- $P = (E^*_b+E^*_c;\mathbf{0})$; $p^*_b = p^*_c = p^*$

  $M_a = (p^{*}_b{}^2+m_b^2)^{1/2} + (p^*_c{}^2+m_c^2)^{1/2}$

  $\quad = (p^{*2}+m_b^2)^{1/2} + (p^{*2}+m_c^2)^{1/2}$

Quindi:

$M_a^2 + p^{*2} + m_b^2 - 2M_a(p^{*2}+m_b^2)^{1/2} = p^{*2} + m_c^2$
$M_a^2 + m_b^2 - m_c^2 = 2M_a(p^{*2}+m_b^2)^{1/2}$
$\mathbf{M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2M_a^2(m_b^2 - m_c^2) = 4M_a^2(p^{*2} + m_b^2)}$

da cui :

$$p^{*2} = \frac{M_a^4 - 2M_a^2\left(m_b^2 + m_c^2\right) + \left(m_b^2 - m_c^2\right)^2}{4M_a^2}$$

Decadimenti

♦ Che possiamo anche scrivere:

$$p^{*2} = \frac{\left[M_a^{\ 2} - (m_b + m_c)^2\right] \bullet \left[M_a^{\ 2} - (m_b - m_c)^2\right]}{4M_a^{\ 2}}$$

$$E_b^{\ *} = \sqrt{p^{*2} + m_b^{\ 2}} = \frac{M_a^{\ 2} + \left(m_b^{\ 2} - m_c^{\ 2}\right)}{2M_a}$$

$$E_c^{\ *} = \sqrt{p^{*2} + m_c^{\ 2}} = \frac{M_a^{\ 2} - \left(m_b^{\ 2} - m_c^{\ 2}\right)}{2M_a}$$

♦ Nel caso particolare : $m_b = m_c = m$

$E^*_b = E^*_c = E^*/2$; $p^{*2} = (E^*/2)^2 - m^2$

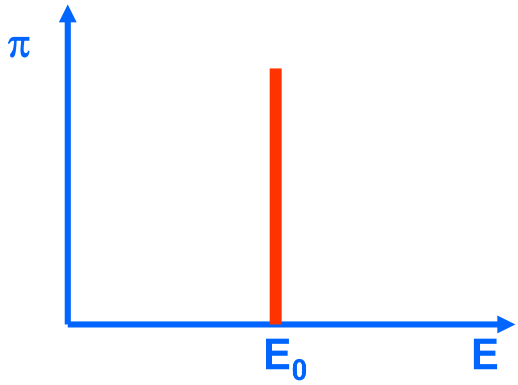
⇒ Nel decadimento a due corpi:

Nel sistema di riferimento della particella che decade, note le masse delle due particelle figlie, rimane determinato il modulo del loro impulso e quindi le loro energie

Il Decadimento e' Monoenergetico

Decadimenti

- $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$



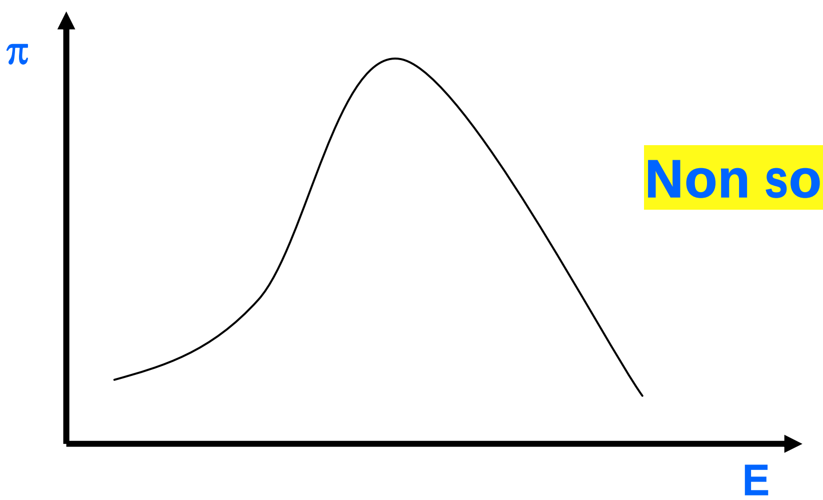
π(E) = funzione densita' di probabilita'
La probabilita' che l' energia del π- abbia un certo valore E_0 e' esattamente uguale a 1 ed e' invece uguale a zero per ogni altro valore:
$\pi(E) = \delta(E - E_0)$

- **Decadimento a tre corpi :**

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad ; \text{ ricordiamo che } m_{\bar{\nu}_e} = 0$$

Nel sistema di riferimento del neutrone avremo :

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad ; \quad m_n = \sqrt{p_1^2 + m_p^2} + \sqrt{p_2^2 + m_e^2} + p_3$$

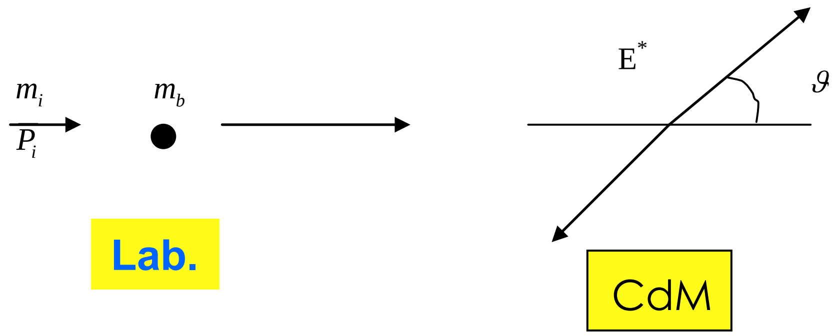


Non sono monoenergetici

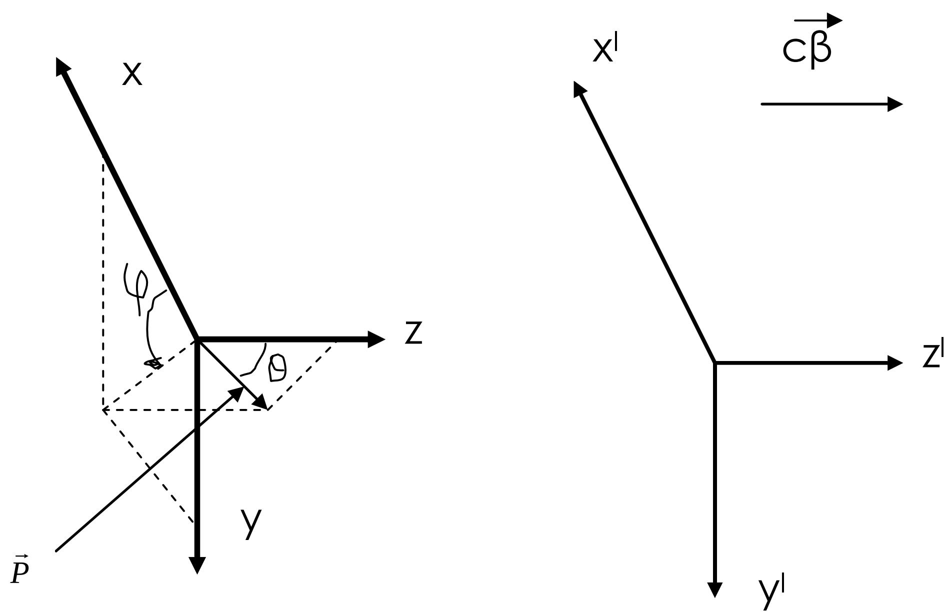
Urto in due corpi

- Consideriamo l'urto:

$$m_i + m_b \rightarrow m_1 + m_2$$



- Calcoliamo l'energia e l'impulso delle particelle emesse nelle reazioni e nei decadimenti.



Urto in due corpi

$$\begin{cases} P_z = p\cos\vartheta \\ P_x = p\sin\vartheta\cos\varphi \\ P_y = p\sin\vartheta\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ p\sin\vartheta\cos\varphi \\ p\sin\vartheta\sin\varphi \\ p\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^* \\ p^*\sin\vartheta^*\cos\varphi^* \\ p^*\sin\vartheta^*\sin\varphi^* \\ p^*\cos\vartheta^* \end{pmatrix}$$

$$E = \gamma E^* + \beta\gamma p^* \cos\vartheta^* \qquad (1)$$

$$p\sin\vartheta\cos\varphi = p^* \sin\vartheta^* \cos\varphi^* \qquad (2)$$

$$p\sin\vartheta\sin\varphi = p^* \sin\vartheta^* \sin\varphi^* \qquad (3)$$

$$p\cos\vartheta = E^*\beta\gamma + \gamma p^* \cos\vartheta^* \qquad (4)$$

Urto in due corpi

a) $(2)^3 + (3)^2 = p^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$
$= p^{*2} \sin^2 \vartheta^* (\cos^2 \varphi^* + \sin^2 \varphi^*)$

Quindi:

$$P_\perp = p \sin \vartheta = p^* \sin \vartheta^* = P_\perp^*$$

Il Momento Trasverso è un **Invariante**

b) $tg\varphi = tg\varphi^* ; \varphi = \varphi^*$ [si ottiene dividendo la 3) per la 2)]

L'angolo azimutale attorno ad un asse è INVARIANTE per trasformazioni di Lorentz lungo quell'asse.

c) Dividiamo (3) con (4) ed essendo $\varphi = \varphi^*$

$$tg\vartheta \sin\varphi = \frac{p^* \sin\vartheta^* \sin\varphi^*}{\gamma(E^*\beta + p^* \cos\vartheta^*)} = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma(\frac{E^*}{p^*}\beta + \cos\vartheta^*)}$$

$$\boxed{tg\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma(\beta/\beta^* + \cos\vartheta^*)}}$$

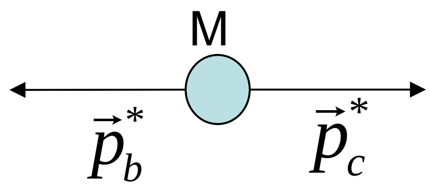
Decadimenti esercizio: angolo limite nel laboratorio

- Si consideri il decadimento

$$a \rightarrow b + c$$

con M_a,m_b ed m_c le masse delle tre particelle. Nel riferimento del centro di massa a e' in quiete e la conservazione del quadri impulso e' data dalle equazioni:

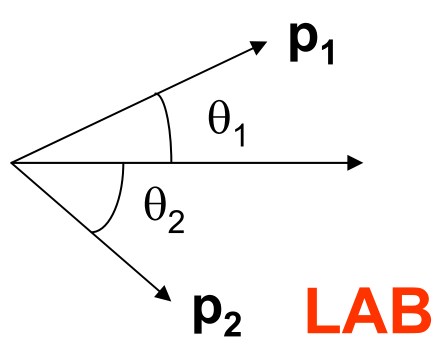
$$M_a = E_b^* + E_c^*$$

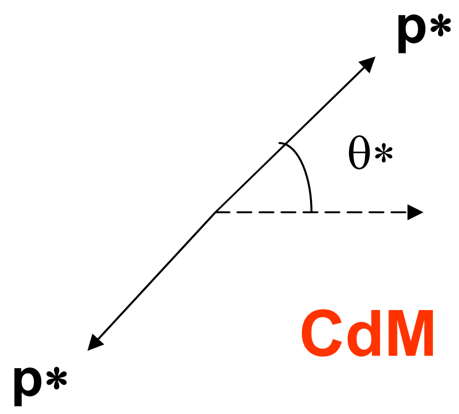


$$\vec{0} = \vec{p}_b^{\,*} + \vec{p}_c^{\,*}$$

♦ Se nel laboratorio a ha impulso **p** il β della trasformata di Lorentz al CdM sara'

$$\beta = p/E \qquad e \qquad \beta\gamma = p/M_a$$





Decadimenti esercizio: angolo limite nel laboratorio

$$\begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ P_x^* \\ P_y^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_1 = \gamma E_1^* + P_{1x}^* \beta\gamma = \gamma E_1^* + \beta\gamma \cos\vartheta^* p^* \\ P_{1x} = P_1 \cos\vartheta_1 = \gamma P_{1x}^* + \beta\gamma E_1^* = \gamma p^* \cos\vartheta^* + \gamma\beta E_1^* \\ P_{1y} = P_1 \sin\vartheta_1 = P_{1y}^* = P^* \sin\vartheta^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_2 = -\beta\gamma p^* \cos\vartheta^* + \gamma E_2^* \\ P_{2x} = P_2 \cos\vartheta_2 = -\gamma p^* \cos\vartheta^* + \beta\gamma E_2^* \\ P_{2y} = P_2 \sin\vartheta_2 = p^* \sin\vartheta^* \end{cases}$$

$$tg\vartheta_1 = \frac{p^* \sin\vartheta^*}{\gamma p^* \cos\vartheta^* + \gamma\beta E_1^*} = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma(\cos\vartheta^* + \beta/\beta_1^*)}$$

$$tg\vartheta_2 = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma(-\cos\vartheta^* + \beta/\beta_2^*)}$$

$$\beta_1^* = \frac{P^*}{E_1^*}; \beta_2^* = \frac{p^*}{E_2^*}$$

Se : $\beta^*_i < \beta$ $\Longrightarrow$ **La particella i verrà emessa in avanti per qualunque valore di θ^***

Decadimenti esercizio: angolo limite nel laboratorio

- **Calcoliamo il valore $\vartheta_{massimo}$**

$$\frac{dtg\vartheta_1}{d\vartheta^*} = \frac{1+\cos\vartheta^* \dfrac{\beta}{\beta_1^*}}{\gamma\left(\cos\vartheta^* + \dfrac{\beta}{\beta_1^*}\right)^2} = 0 \Rightarrow \cos\vartheta^* = -\frac{\beta_1^*}{\beta}$$

$$tg\vartheta_{\max} = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_1^*}{\beta}\right)^2}}{\gamma\left(\dfrac{\beta}{\beta_1^*} - \dfrac{\beta_1^*}{\beta}\right)} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{\beta_1^*}\right)^2 - 1}}$$

- **Calcoliamo l'angolo $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$**

$$p^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\vartheta = M^2$$

$$\cos\vartheta = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - M^2}{2p_1p_2}$$

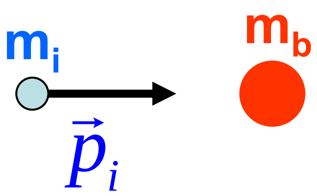
- Nel limite $E_i >> m_i$ ⟶ $P_i \cong E_i$

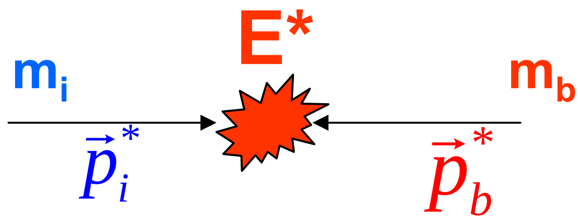
$$2E_1E_2(1-\cos\vartheta) = 4E_1E_2\sin^2\frac{\vartheta}{2} = M^2 - m_1^2 - m_2^2$$

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{M^2 - m_1^2 - m_2^2}}{2\sqrt{E_1E_2}}$$

ϑ e' minimo per $E_1 = E_2$

Esercizio: trasformazioni LAB⇒CdM





$$E^{*2} = (E_i + m_b)^2 - p_i^2 = E^2 - p^2$$

$$\beta_{CdM} = \frac{P}{E} = \frac{P_i}{\sqrt{p_i^2 + m_i^2} + m_b}$$

$$1 - \beta_{CDM}^2 = 1 - \frac{P^2}{E^2} = \frac{E^2 - P^2}{E^2} = \frac{E^{*2}}{E^2}$$

$$\gamma_{CdM} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{CdM}^2}} = \frac{E}{E*}$$

$$\beta_{CdM}\gamma_{CdM} = \frac{P_i}{E^*}$$

Decadimento del π^0

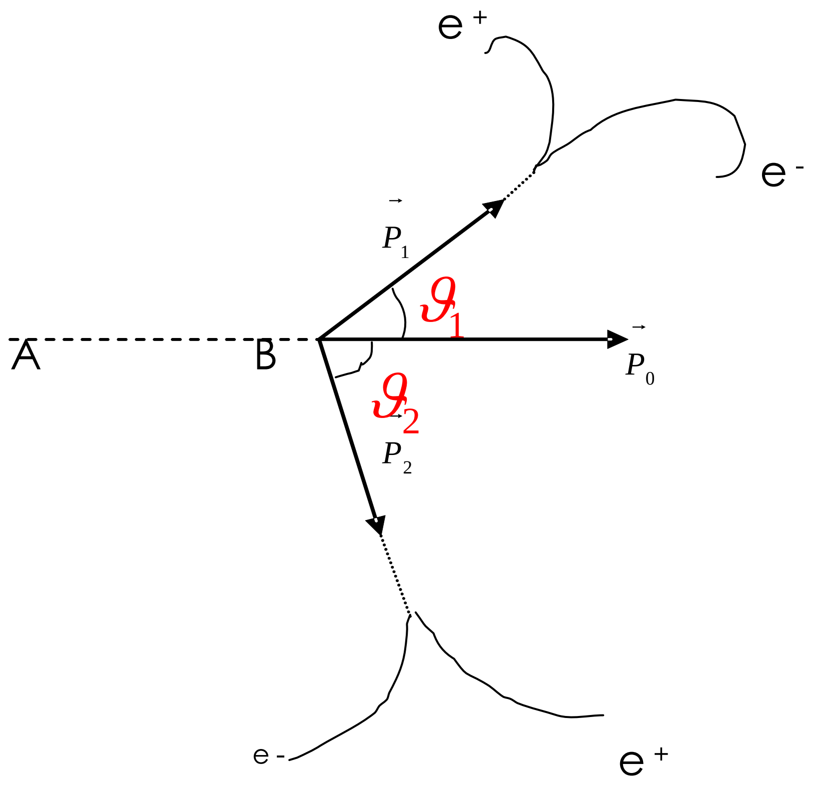
Carta di identita' :

decadimento: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

massa: $m_{\pi^0} = 135\ \text{MeV}$

vita media: $\tau_{\pi^0} = 0.828 \cdot 10^{-16}\ \text{sec}$

(non e' possibile rivelare il suo cammino prima del suo decadimento in $\gamma\gamma$)



$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad ; \qquad \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

Decadimento del π^0

$a)\quad \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \rightarrow \quad p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta$

$b)\quad \sqrt{m_{\pi^0}^2 + p_0^2} = E_1 + E_2 = p_1 + p_2 \quad \rightarrow \quad m_{\pi^0}^2 + p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$

Sommando le equazioni a) e b) si ottiene:

$$2p_1p_2\left(1-\cos\vartheta\right) = m_{\pi^0}^2 \quad \rightarrow \quad 4p_1p_2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\boxed{\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{4E_1E_2}}$$

Dimostriamo che il minimo valore di ϑ si ha quando :

$E_1 = E_2 = \dfrac{E_0}{2}$ dove $E_0 = \sqrt{m_{\pi^0}^2 + p_0^2}$

Il minimo ϑ corrisponde a E_1E_2 = Massimo. Poniamo

$y = E_1E_2 = E_1(E_0 - E_1) = E_1E_0 - E_1^2 = xE_0 - x^2$

dove abbiamo posto $x = E_1$ che e' quindi la nostra incognita.

$\dfrac{dy}{dx} = E_0 - 2x = 0$ da cui segue $x = \dfrac{E_0}{2}$ e quindi: $E_1 = \dfrac{E_0}{2}$

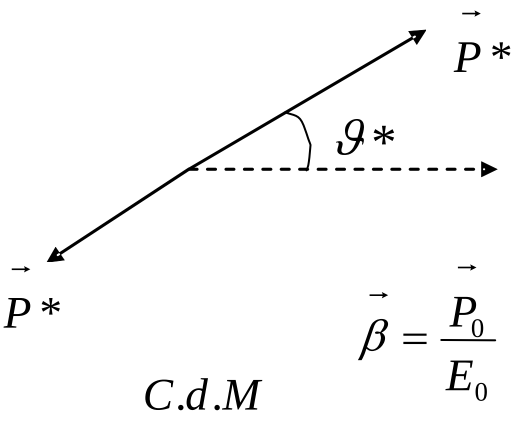
Abbiamo quindi ricavato che :

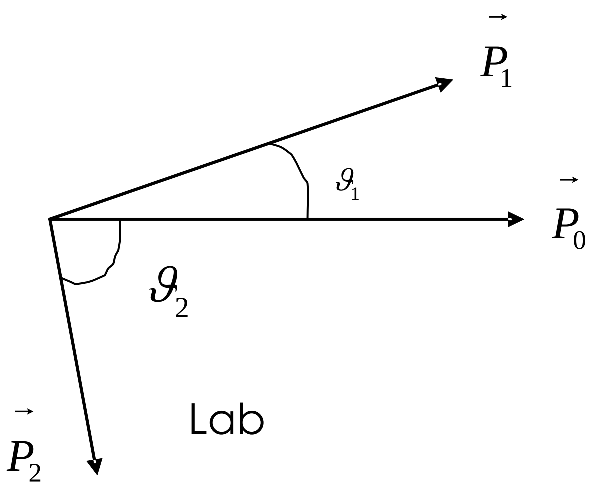
- quando la apertura angolare dei due fotoni e' minima:

  si ha l' equipartizione dell' energia del π^0 tra i due fotoni.

Impulso dei fotoni da $\pi^0 \rightarrow \gamma+\gamma$ **nel Laboratorio**

- Sappiamo che nel sistema di riferimento del π^0 a riposo I fotoni hanno impulso monocromatico uguale a $M\pi^0$ ./2.
- Ricaviamo la distribuzione degli impulsi dei fotoni nel sistema di riferimento del laboratorio.





Essendo **$M\gamma = 0$, avremo che $p^* = p_1^* = p_2^* = E_1^* = E_2^* = M\pi_0/2$**

Inoltre, se p_0 e' l' impulso del π_0 nel laboratorio avremo :

$$\beta = \frac{p_0}{E_0} \quad ; \quad \gamma = \frac{E_0}{E^*} = \frac{E_0}{M_{\pi^0}} \quad ; \quad p_y = p_y^* = p^* \sin \vartheta^*$$

$$p_x = \gamma \left(p^* \cos \vartheta^* + \beta E^* \right)$$

Impulso dei fotoni da $\pi^0 \rightarrow \gamma+\gamma$ nel Laboratorio

$$E_1 = \gamma\left(E_1^* + \beta \cdot p_1^* \cdot \cos\vartheta^*\right) = \gamma \cdot \frac{m_{\pi^0}}{2}\left(1 + \beta \cdot \cos\vartheta^*\right) =$$

$$= \frac{E_0}{m_{\pi^0}} \cdot \frac{m_{\pi^0}}{2}\left(1 + \frac{p_0}{E_0} \cdot \cos\vartheta^*\right) = \frac{E_0}{2}\left(1 + \frac{p_0}{E_0} \cdot \cos\vartheta^*\right) =$$

$$= \frac{E_0}{2} \cdot \frac{E_0 + p_0 \cdot \cos\vartheta^*}{E_0} = \frac{E_0 + p_0 \cdot \cos\vartheta^*}{2}$$

Quindi nel laboratorio:

E_γ variera' tra due valori minimi e massimi dati da:

E_γ sara' minimo per : $\cos\vartheta^* = -1 \;\Rightarrow\; \vartheta^* = \pi$

$$\mathrm{E}_\gamma = \frac{E_0 - p_0}{2}$$

E_γ sara' massimo per : $\cos\vartheta^* = 1 \;\Rightarrow\; \vartheta^* = 0$

$$E_\gamma = \frac{E_0 + p_0}{2}$$

Ricaviamo adesso la funzione di distribuzione di E_γ tra questi valori minimi e massimi.

Ricordando che il π^0 ha spin zero, avremo che nel sistema a riposo del π^0 la distribuzione in $\cos\vartheta^*$ deve essere piatta.

Avremo quindi:

Impulso dei fotoni da $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ nel Laboratorio

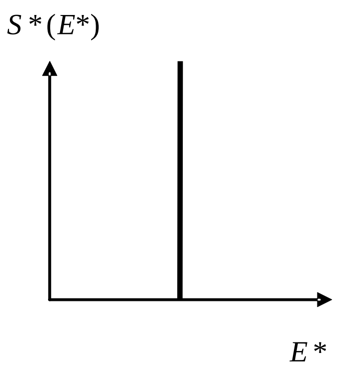
$$\int_{-1}^{+1} f(\cos\vartheta^*)\, d\cos\vartheta^* = 1 \Rightarrow f(\cos\vartheta^*) = \tfrac{1}{2}$$

$$dE_1 = \frac{1}{2} P_0\, d\cos\vartheta^* = \beta\gamma \frac{m\pi^0}{2} d(\cos\vartheta^*)$$

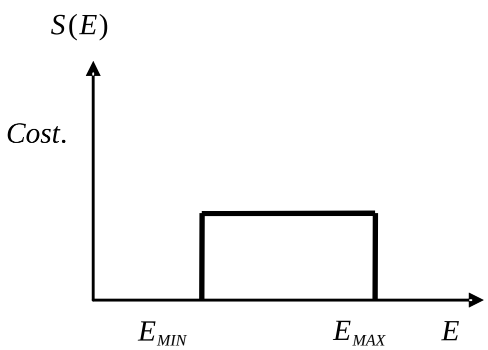
$$dN = f(\cos\vartheta^*)\, d\cos\vartheta^* = \frac{1}{2} d\cos\vartheta^* = \frac{dE_1}{\beta\gamma M_{\pi^0}} = \frac{dE_1}{P_0}$$

$$\frac{dN}{dE_1} = \frac{1}{P_0}$$

Costante nel Laboratorio



CM



LAB

Distribuzione angolare dei fotoni dal decadimento dei π^0

Vogliamo ora dimostrare che la configurazione di decadimento del π^0 ad angolo minimo e' anche la configurazione piu' probabile.

In generale abbiamo ricavato la formula seguente:

$$c)\quad \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{m^2_{\pi^0}}{4E_1E_2}$$

$$\rightarrow \quad 4E_1\cdot\left(E_0-E_1\right)=\frac{m^2_{\pi^0}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

Differenziando a destra e sinistra abbiamo:

$$4(\mathrm{E}_0-2E_1)\cdot dE_1 = -2\frac{m^2_{\pi^0}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot d\vartheta$$

$$\mathrm{d)}\quad \frac{dn}{d\vartheta}=\frac{dn}{dE_1}\frac{dE_1}{d\vartheta}=\frac{1}{p_0}\cdot\frac{m^2_{\pi^0}}{4(\mathrm{E}_0-2E_1)}\cdot\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}$$

Riscriviamo l' equazione c) come

$$\mathrm{E}_1\left(\mathrm{E}_0-\mathrm{E}_1\right)=\frac{m^2_{\pi^0}}{4\cdot\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \quad\rightarrow\quad \mathrm{E}_1^2-\mathrm{E}_0\mathrm{E}_1+A$$

dove A= $\dfrac{m^2_{\pi^0}}{4\cdot\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$

Distribuzione angolare dei fotoni dal decadimento dei π^0

La soluzione in E_1 sara' data da:

$$E_1 = \frac{E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - 4 \cdot A}}{2}; \quad \text{avremo quindi:}$$

$$E_0 - 2E_1 = E_0 - E_0 \mp \sqrt{E_0^2 - 4 \cdot A} =$$

$$= \mp \sqrt{E_0^2 - \frac{m_{\pi^0}^2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}} = \mp \frac{E_0}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{m_{\pi^0}^2}{E_0^2}}$$

.

Sostituendo $(E_0 - 2E_1)$ nell' equazione d) abbiamo:

$$\frac{dn}{d\vartheta} = \frac{m_{\pi^0}^2}{p_1 \cdot E_0} \cdot \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{m_{\pi^0}^2}{E_0}}}$$

La distribuzione avra' quindi un massimo per

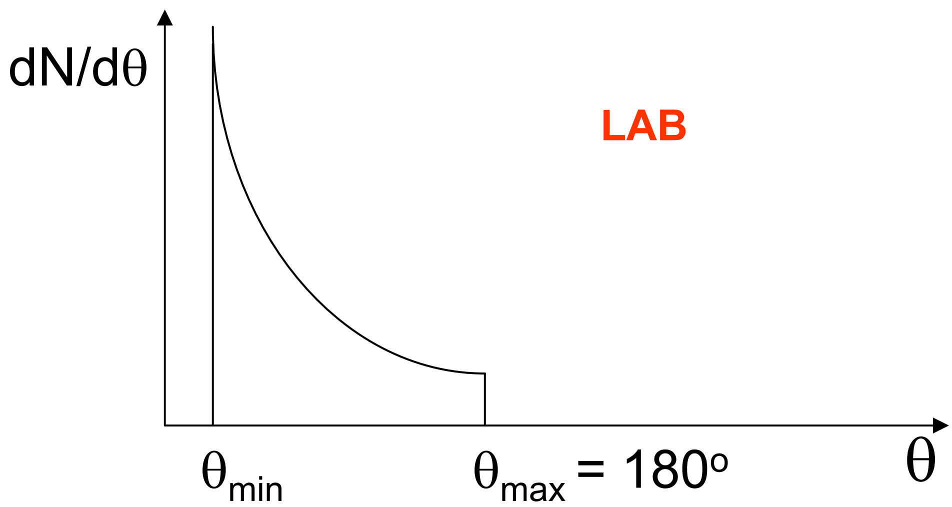
$$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{m_{\pi^0}^2}{E_0}:$$

$\vartheta_{\text{minimo}}$ e' quindi ANCHE la configurazione piu' probabile

Distribuzione angolare dei fotoni dal decadimento dei π^0

- Ne segue che la **configurazione di decadimento piu' probabile** e' quella con **il minimo angolo di apertura** tra i due fotoni.

  Abbiamo visto che questa corrisponde ad avere **equipartizione della energia iniziale e dell' angolo di apertura totale**



- $E_\gamma = (E_0 + p_0 \cos\theta) / 2$

avremo:

E_γ minima per $\cos\theta^*=0 \Rightarrow \theta^*=\pi/2$

$E\gamma$ massima per $\cos\theta^*=1 \Rightarrow \theta^*=0$

Esercizio sul decadimento del π^0: distribuzione di $p_\gamma=p_\gamma(\theta*)$

$$E_{\pi^0}^{LAB} = 4.05 Gev \qquad M_{\pi^0} = 135 MeV \qquad E* = M_{\pi^0}$$

$$E_{\pi^0}^{LAB} = \gamma M_{\pi^0} \qquad \beta_{\gamma_1}^* = \frac{P_{\gamma_1}^*}{E_{\gamma_1}^*} = 1 \qquad E_{\gamma_1}^* = \frac{M_{\pi^0}}{2} = E_{\gamma_2}^* = 67.5 MeV$$

$$E_{\gamma_1} = \gamma \cdot E_{\gamma_1}^* \left(1 + \beta \cdot 1 \cdot \cos\vartheta^*\right)$$

$$E_{\gamma_1} = \frac{E_{\pi^0}^{Lab}}{M_{\pi^0}} \cdot E_{\gamma_1}^* \left(1 + \beta\cos\vartheta^*\right) = E_{\pi^0}^{Lab} \cdot \frac{\left(1 + \beta\cos\vartheta^*\right)}{2}$$

$$E_{\gamma_1} = E_{\pi^0}^{Lab} \cdot \frac{\left(1 + \beta\cos\vartheta^*\right)}{2} \text{ ; sappiamo inoltre che :}$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta_1 = \frac{\sin\vartheta_1^*}{\gamma\left(\beta + \cos\vartheta_1^*\right)}$$

A) $\theta* = 90° :$

$$E_{\gamma_1} = 4050 \frac{(1 + \beta \cdot 0)}{2} = 2025 MeV$$

$$E_{\gamma_1}^* = 67.5$$

$$\gamma = \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} = 30 GeV$$

$$tg\,\vartheta_1(\theta_1^* = 90°) = \frac{1}{\beta\gamma}$$

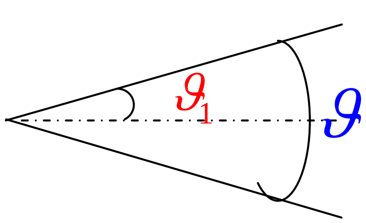
Esercizio sul decadimento del π^0: distribuzione di $p_\gamma = p_\gamma(\theta*)$

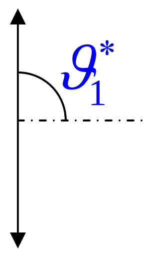
$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - (\frac{1}{2\gamma^2})$$

$$(1-\beta) = \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{1800} \approx 1$$

$$tg\vartheta_1 = \frac{1}{30} \Rightarrow \vartheta_1^{Lab} \approx 2° \rightarrow \vartheta = 4°$$

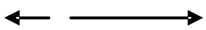


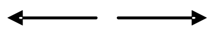


B)

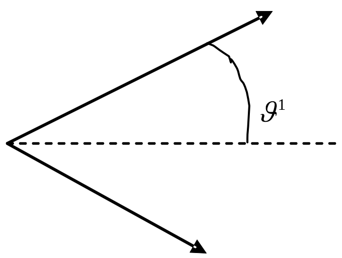
$$\theta* = 0; \theta* = 180° :$$

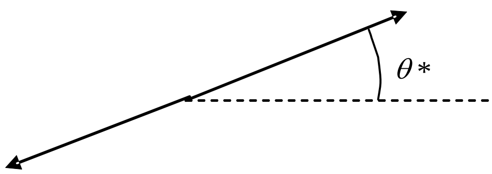
$$E_\gamma = \gamma E_\gamma^* (1 \pm \beta) \begin{cases} E_{\pi^0}^{Lab} / M_{\pi^0} \cdot \frac{M_{\pi^0}}{2} (1+1) = E_{\pi^0}^{Lab} = 4050 Mev \\ \gamma E_\gamma^* (1-\beta) \approx \gamma E_\gamma^* \cdot \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{E_{\pi^0}^{Lab}}{4\gamma^2} \approx 1.1 Mev \end{cases}$$





C)





Esercizio sul decadimento del π^0: distribuzione di $p_\gamma = p_\gamma(\theta*)$

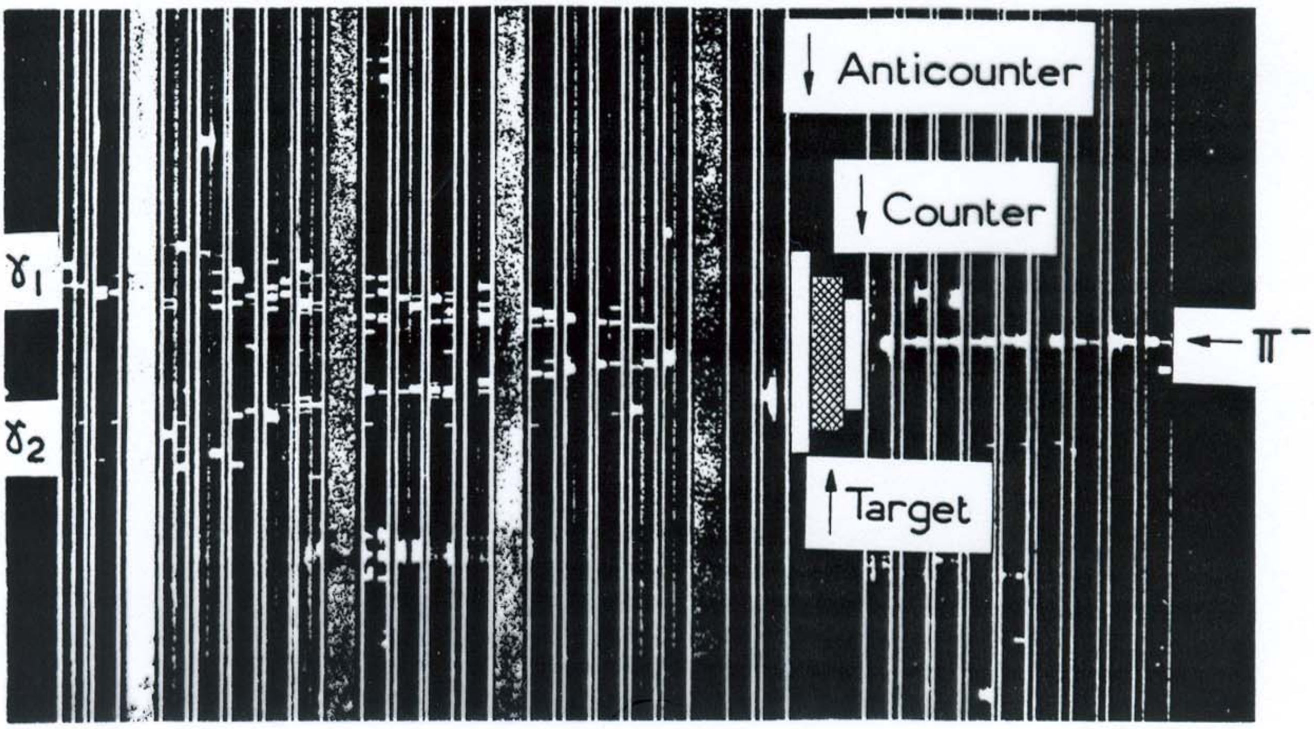
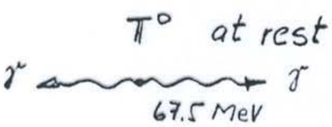


Fig. 1.6 In the target, a π^0 is produced by charge exchange $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. The two gamma rays from the decay $\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ produce "showers" γ_1 and γ_2 in a spark chamber. The energy of the π^0, E_{π^0} is about 3 GeV. The decay is slightly asymmetric ; (Photo CERN, SIS 16754)



Esercizio: nucleo formato di protoni ed elettroni

♦ Prima della scoperta del neutrone era stata formulata l' ipotesi che il nucleo contenesse al suo interno protoni ed elettroni mescolati insieme.

Dimostrare col principio di inderminazione, sapendo che le energie medie di elettroni che escono dai nuclei non sono MAI superiori di qualche MeV, che questo non e' possibile.

Soluzione:

Sia :

Δx(elettrone in un nucleo) $\cong$ 2 Raggi nucleari $\cong 2\ 10^{-14}$ m

$\Delta p \cong h/\Delta x = 6.6\ 10^{-34}$ J sec / $2\ 10^{-14}$ m per cui avremo

$p_{elettrone} = \Delta p = 3.3\ 10^{-20}$ J s/m

$E^2_{elettrone} = p^2_{el}\, c^2 + m^2_{el}\, c^4$

$p^2_{el}\, c^2 = (3.3\ 10^{-20})^2 (3\ 10^8)^2 \cong 10^{-22}\ J^2$

$m^2_{el}\, c^4 = (9\ 10^{-31}\ kg)^2 (3\ 10^8)^4 \cong 10^{-26}\ J^2 \Rightarrow$ **trascurabile**

$\mathbf{E_{el} = 10^{-11}\ J = 10^{-11}/1.6\ 10^{-19} = 0.6\ 10^8\ eV = 60\ MeV}$

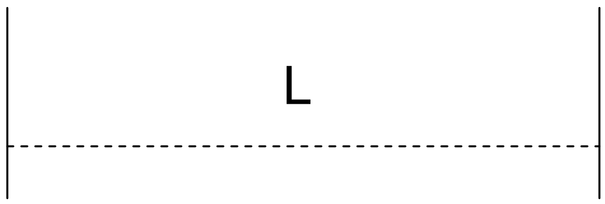
Ben maggiore delle energie misurate sperimentalmente

Esercizio da fare:

Provare che per il protone si ottengono energie cinetiche dell' ordine di qualche MeV.

Esercizio: misura del tempo di volo di una particella

In fisica delle particelle e' possibile identificare una particella da un' altra, avente lo stesso impulso ma di diversa massa, **dalla misura del tempo di volo** che le particelle impiegano a compiere una determinata distanza. Calcoliamo il tempo di volo a percorrere una distanza L=15 metri tra due rivelatori a scintillazione posti ai due estremi della stessa distanza.



Le particella di massa m_1 ed m_2 ed impulso **p** percorreranno la distanza L rispettivamente nei tempi t_1 e t_2 dati da :

$$t_i = \frac{L}{v_i} = \frac{L}{c\frac{v_i}{c}} = \frac{L}{c\beta_i} = \frac{L}{c^2\frac{p}{E_i}} = L\frac{\sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4}}{c^2 p}$$

$$t_i = \frac{L}{c}\sqrt{1 + \frac{m^2{}_i c^2}{p^2}} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\frac{m_2c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1c^2}{p^2}}\right)$$

$$\frac{\Delta t}{L} = 3.34\left(\sqrt{1+\frac{m_2{}^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_1{}^2}{p^2}}\right)\frac{n\sec}{m}$$ (m e p in MeV)

Se $p^2 \gg m_1^2c^2$ ed $m_2^2c^2$, avremo:

$$\frac{\Delta t}{L} \cong 1670\frac{\left(m_2{}^2 - m_1{}^2\right)}{p^2}\frac{ps}{m} \quad ; \quad 1ps = 10^{-12}\text{s}$$

- ♦ Δt va come $1/p^2$

Le unita' di Misura nella fisica delle Particelle

Unita' Naturali

Unita' del Sistema Internazionale (S.I.)

kg m s

$[M]\,[L]\,[T]$

- Per la fisica di ogni giorno le unita' del S.I. sono una scelta naturale: M(uomo) ~ 75 Kg ; Altezza(uomo) ~ 1.75 m

- Per la fisica delle particelle la scelta non e' cosi' felice:

$$M_{protone} \sim 10^{-27}\ \mathrm{kg} \quad ; \quad R_{nucleo} \sim 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

- Si usa una base diversa basata sul linguaggio della fisica delle particelle, meccanica quantistica e relativita': UNITA' NATURALI

Unita' di azione in M.Q. :	$\hbar$	(Js)
Velocita' della luce :	c	(ms^{-1})
Unita' di Energia :	GeV = 10^9 eV = 1.6×10^{-10} J	

Natural Units

GeV $\hbar$ c

Le unita' allora diventano :

Energy	GeV	Time	$(\mathrm{GeV}/\hbar)^{-1}$
Momentum	GeV/c	Length	$(\mathrm{GeV}/\hbar c)^{-1}$
Mass	GeV/c^2	Area	$(\mathrm{GeV}/\hbar c)^{-2}$

Tutto si semplifica se si sceglie : $\boxed{\hbar = c = 1}$

- $E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}^2 = M^2 + p^2$

$$\Rightarrow \quad [\mathrm{E}] = [\mathrm{p}] = [\mathrm{M}] = \text{ GeV}$$

- $[c] = [L][T]^{-1} = 1$ ed inoltre $[\hbar] = [M][L] = 1$

$$\Rightarrow \quad [L] = [T] = [M]^{-1} = \text{ GeV}$$

Tutte le quantita' sono espresse in potenze di GeV:

Energy	GeV	Time	GeV^{-1}
Momentum	GeV	Length	GeV^{-1}
Mass	GeV	Area	GeV^{-2}

Si ritorna indietro alle unita' del S.I. reintroducendo I fattori c ed $\hbar$

EXAMPLE: $\mathrm{Area} = 1\ \mathrm{GeV}^{-2}$

$$[\mathrm{L}]^2 = [\mathrm{E}]^{-2}[\hbar]^n[c]^m$$

$$[\mathrm{L}]^2 = [\mathrm{E}]^{-2}[\mathrm{E}]^n[\mathrm{T}]^n[\mathrm{L}]^m[\mathrm{T}]^{-m}$$

$$\therefore n = 2 \quad \text{and} \quad m = 2$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \mathrm{Area(S.I.)} &= 1\,\mathrm{GeV}^{-2} \times \hbar^2 c^2 \\
&= 3.8 \times 10^{-32}\, m^2 \\
&= 0.38 \times 10\, mb
\end{aligned}$$

Heaviside-Lorentz units $\epsilon_0 = \mu_0 = \hbar = c = 1$

Fine structure constant α:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

becomes $$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

★ **Valori Utili da Ricordare**

$$\begin{cases} \hbar c = 197.3\ \text{MeV} \cdot fm \\ \alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\hbar c} = \dfrac{1}{137} \end{cases}$$

$$\hbar = 6.582 \times 10^{-22}\ \text{MeV} \cdot \text{s}$$

$$\text{c} = 2.998 \times 10^{23}\ \text{fm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Unita' Naturali

In fisica delle particelle il sistema MKS non è appropriato in quanto le lunghezze caratterisitiche sono tipicamente dell'ordine di 10^{-15} m e le masse di 10^{-27} kg.
E' invece più conveniente lavorare con un sistema di unità, noto come UNITA' NATURALI, in cui $c = \hbar = 1$
Per completare il sistema si sceglie come terza grandezza l'energia in eV oMeV oppure GeV.
Ricordiamo che:

$$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot sec} \quad ; \quad \mathrm{c} = 2.998 \cdot 10^{8} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

Nelle unita' naturali $\hbar$ e' quindi una unita' di azione (ML^2/T) e c e' una unita' di velocita' (L/T).
Il sistema di Unita' Naturali e' allora completamente definito s specifichiamo l' unita' di energia (ML^2/T^2).

Se scegliamo il Giga-Electron volt come unita' di energia, avremo:

$$1 \ \mathrm{GeV} = 1.602 \cdot 10^{-10} \ \mathrm{J} \quad ; \quad \mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s} = 6.582 \cdot 10^{-25} \ \mathrm{GeV \cdot s}$$

$$\mathrm{c} = 2.998 \cdot 10^{8} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad ; \quad \hbar \cdot \mathrm{c} = 0.1973 \ \mathrm{GeV \cdot fm}$$

$$1 \ \mathrm{fm} = 10^{-15} \ \mathrm{m}$$

Unita' Naturali

Vediamo quali sono le conseguenze di imporre $c = \hbar = 1$

I) mettendo c=1 imponiamo che le due unità NON sono INDIPENDENTI e che hanno dimensioni equivalenti

[L] = [T] $\quad Per$ esempio : se c = 1 abbiamo come conseguenza che $1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$

Questo e' in accordo con la teoria della relativita' che tratta spazio e tempo " on the same footing ": intervalli di tempo e distanze sono diverse speci della stessa cosa e NON ci sono ragioni fondamentali per misurarle con unita' divesrse ed indipendenti.

La scelta c = 1 e' una scelta NATURALE ed il numero 2.998 10^8 e' UN FATTORE DI CONVERSIONE.

II) Il concetto di dualità onda -corpuscolo descritto dalle relazioni di Einstein e De Broglie:

$$E = \mathrm{h}\nu \quad ; \quad \mathrm{p} = \frac{\mathrm{h}}{\lambda}$$

$$in \text{ unita' } \hbar = 1 \text{ implicano che :}$$

$$[\mathrm{E}] = \left[T^{-1}\right] = [p] = \left[L^{-1}\right]$$

Unita' Naturali

Ad un livello più fondamentale questa equivalenza sorge dalle relazioni di commutazione di base e dal fatto che gli operatori di energia e impulso sono i generatori delle traslazioni nello spazio-tempo.
Il modo naturale di misurare un momento è quello di una "lunghezza inversa". Il numero 6.626*10^{34} è un fattore di conversione che converte una lunghezza inversa nelle unità convenzionali.

Le dimensioni di $\hbar$ sono Energia $\cdot$ tempo quindi avremo :

$$[\hbar] = [M] \cdot [L^2] \cdot [T^{-1}]$$

Per cui ponendo $\hbar = 1$:

$$[\mathrm{M}] = [L^{-1}] = [T^{-1}]$$

Nella fisica delle particelle, come gia' detto, si sceglie [M] come DIMENSIONE INDIPENDENTE.

Unita' Naturali

I fattori di conversione appropriati sono :

$$\text{Massa : 1 kg} = 5.607 \cdot 10^{26}\ \text{GeV}$$

$$\text{Lunghezza : 1 m} = 5.068 \cdot 10^{15}\ \text{GeV}^{-1}$$

$$\text{Tempo : 1 s} = 1.519 \cdot 10^{24}\ \text{GeV}^{-1}$$

Nota Bene : $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16}\ \text{eV} \cdot \text{s}$; con $c = 1$ avremo :

$\hbar = 2.0 \cdot 10^{-27}\ \text{eV m}$

(difatti avremo :

$1\text{s} = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m}$ da cui : $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{eV} \cdot \text{m}$)

Se $\hbar = 1$ ne consegue che : $1\ \text{m} = \dfrac{1}{2.0 \cdot 10^{-7}\ \text{eV}}$

La dimensione di un atomo e' di circa 10^{-10} m.

1 Angstrom = $1\ \mathring{\text{A}} = 10^{-10}$ m. Quindi :

$$\hbar = 1 \quad \Rightarrow \quad 1\ \mathring{\text{A}} = \frac{1}{2000\ \text{eV}}$$

Nota Bene : in queste unita' AUMENTARE l' energia significa DIMINUIRE la dimensione

Unita' Naturali : promemoria

- In MKS system quantity has dimensions $M^p L^q T^r$

- In natural units quantity has dimensions E^{p-q-r}

Quantity	MKS p	MKS q	MKS r	Natural n
Action ($\hbar$)	1	2	-1	0
Velocity (c)	0	1	-1	0
Mass	1	0	0	1
Length	0	1	0	-1
Time	0	0	1	-1
Momentum	1	1	-1	1
Energy	1	2	-2	1
Fine structure constant α	0	0	0	0
Fermi constant G_F	1	5	-2	-2